مضبوطیٔ اشیا

حصۂ دوم

سلسلۂ نصابِ تعلیم جامعۂ عثمانیہ

مضبوطیٔ اشیا

(حصۂ دوم)

مصنّفۂ

آرتھر مارلے - ڈی - ایس سی ، وغیرہ

مترجمہ

مولوی ضیاء الدین صاحب انصاری ایم اے (عثمانیہ) بی ایس سی آنرز (مینچسٹر)

پروفیسر سول انجینیری ، کلیۂ انجینیری جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی

سنہ ۱۳۶۰ھ م سنہ ۱۳۵۰ف م سنہ ۱۹۴۱ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب مسرز لانگمنس، گرین اینڈ کمپنی کی
اجازت سے اُردو میں ترجمہ کر کے
طبع و شایع کی گئی ہے۔

مضبوطی اشیا

حصۂ دوم

باب ۱ تا باب ۱۷

فہرستِ مضامین

مضبوطیٔ اشیاء

حصّۂ دوم

دسواں باب

گیارھواں باب

صفحہ

بارھواں باب

پندرھواں باب

جانچ مشینیں، آلات اور طریقے

صفحہ

سولہواں باب

خصوصی امتحانات ۸۸۶

سترہواں باب

خصوصی مسالے ۹۱۶

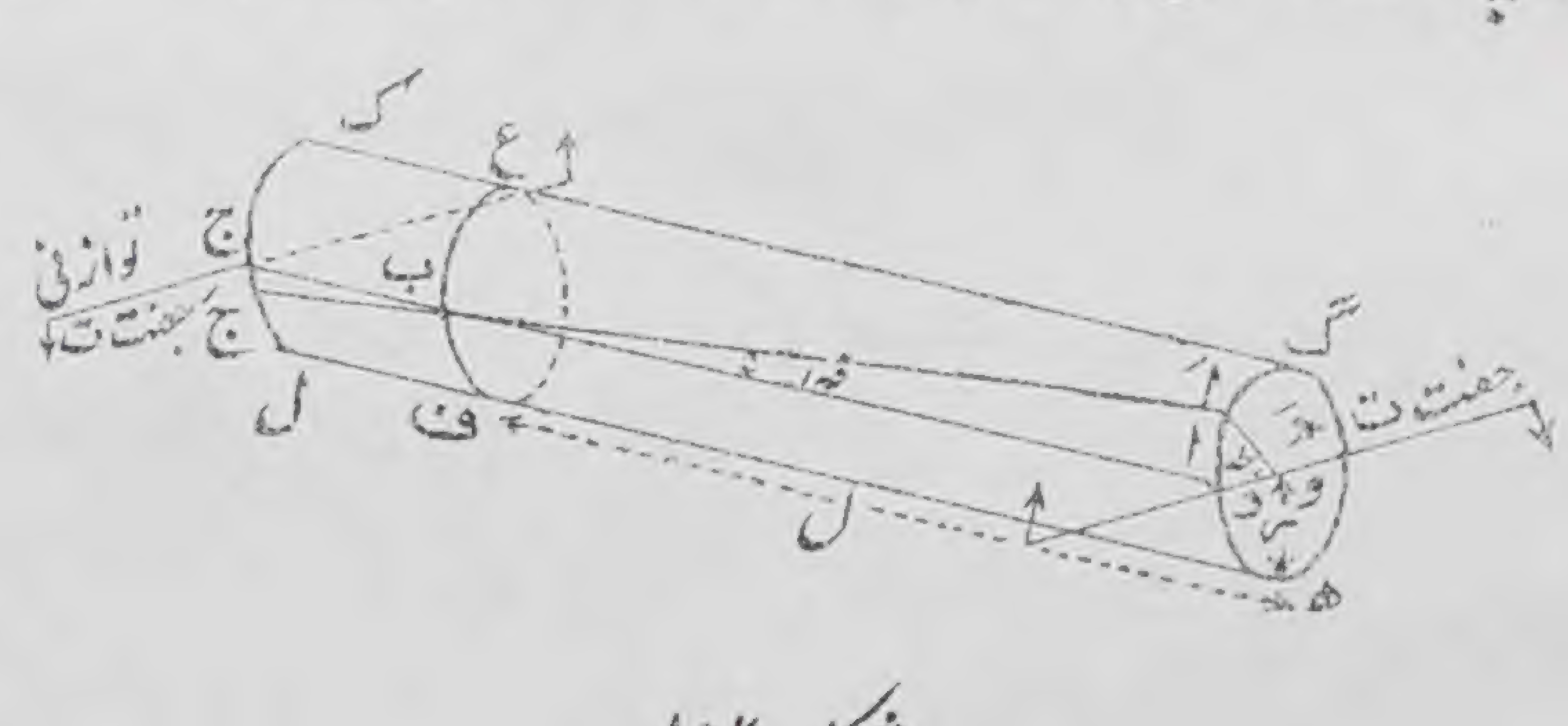
صفحہ ۳۰۵

دسواں باب

مروڑ

۱۰۸ — خالص مروڑ میں زور اور فساد — مدور تراش

اگر ایک استوانی سلاخ کو ایک ایسے جفت سے مروڑا جائے جس کا محور سلاخ کے محور پر منطبق ہو تو سلاخ خالص مروڑ کے تحت ہوگی۔ کسی تراش کے کسی نقطے پر زور خالص جز کا ہوگا اور وہ دو مستوی جن پر زور بالکل مماسی



شکل ۱۵۲

ہوگا (دیکھو دفعہ ۸) حسبِ ذیل ہونگے (۱) وہ مستوی جو زیرِ غور نقطے میں سے گزرتا ہے اور محور کے علی القوائم ہے (۲) وہ مستوی جو اس نقطے میں سے اور محور میں سے گزرتا ہے۔ ان میں سے پہلے مستوی پر زور کی سمت ہر جگہ محور سے نکلے ہوئے نیم قطری خطوط کے علی القوائم ہوگی۔ خاص مستوی

مماسی یا جزی زور کے مستویوں سے ۴۵° کا زاویہ بنائینگے (دیکھو دفعات ۸ اور ۱۵) اور دونوں خاص زوروں کی حدتیں جو مخالف علامت کی ہونگی مقدار میں جزی زور کی حدت کے مساوی ہونگی -

فساد اس طرح کا ہوگا کہ سلاخ کے محور کے علی القوائم کوئی تراش محور کے گرد دوسری مشابہ تراشوں کی اضافت سے خفیف سی گردش کریگی لچک کی حدود کے اندر فساد کی نوعیت شکل ۱۵۲ میں دکھائی گئی ہے - یہ ایک ٹھوس اُستوانی سلاخ کو تعبیر کرتی ہے جو اس کے سروں پر عمل کرتے ہوئے دو مساوی اور مخالف جفتوں کے تحت تعادل میں ہے - منحنی سطح پر کا ایک خط اب ج جو ابتدا میں مستقیم اور محور کے متوازی تھا فساد کے بعد ایک مرغولہ اَب جَ کا ایک حصہ بن جائیگا جو محور کے متوازی خطوط مثلاً اب ج سے ہر جگہ زاویہ فہ بناتا ہے - اس زاویے کا مستقل ہونا صاف ظاہر ہوجائیگا اگر منحنی سطح کو کھول کر مستوی سطح کی شکل میں بچھایا جائے - اس صورت میں اَب جَ ایک خطِ مستقیم ہوگا - منحنی سطح کے تمام مادے کے لیے یہ زاویہ فہ جزی فساد ہے (دفعہ ۱۰)، اور چونکہ لچکدار فساد خفیف ہے اس لیے صفحہ ۳۰۶

$$فہ = \frac{اا َ}{اب} = \frac{جَ}{س} \quad (نیم قطری) \quad ....(۱)$$

جہاں جَ سطح پر جزی زور کی حدت ہے اور س اُستواری کا مقیاس ہے (دیکھو دفعہ ۱۰)

کسی نقطہ د کے لیے جو تراش کے مرکز سے فاصلہ ر پر ہے جزی فساد فہ اور جزی زور کی حدت ج اسی طرح کی مساوات سے مربوط ہونگے :-

$$فہ = \frac{دد َ}{اب} = \frac{ج}{س} \quad (نیم قطری) \quad ....(۲)$$

وہ نیم قطری خط جو ابتدا میں و ا پر تھا فساد کے بعد محل و اَ

اختیار کریگا اور طول اب یال میں مروڑ کا زاویہ اوا = طہ ہوگا۔
اگر سلاخ کا نصف قطر سا ہو تو (۱) سے

$$ط = \frac{اا'}{او} = \frac{ل فہ}{سا} \text{ (نیم قطری) } ....(۳)$$

اور اسی طرح (۲) سے

$$ط = \frac{دد'}{ود} = \frac{ل فہ}{ر} \text{ (نیم قطری) } ....(۴)$$

(۱) اور (۳) سے

$$زج = فہ س = \frac{سا ط}{ل} س ....(۵)$$

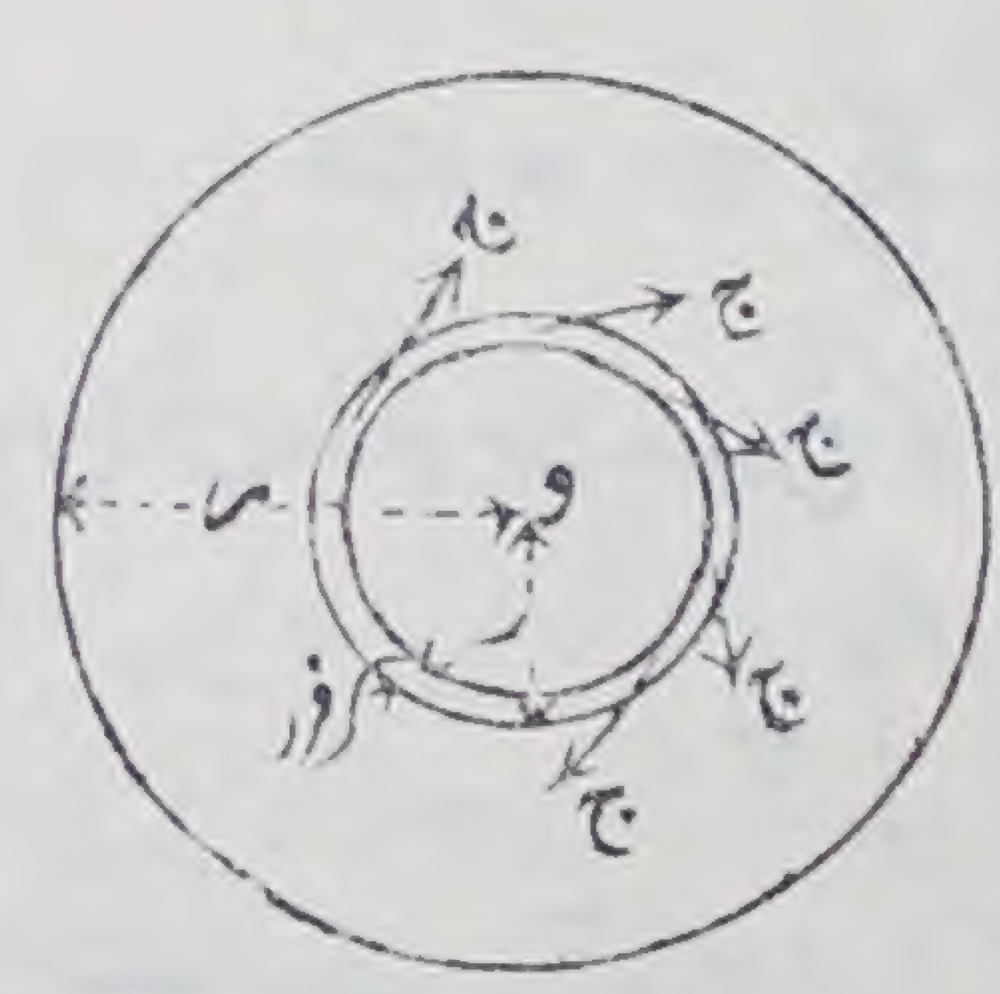
اور (۲) اور (۴) سے

$$ج = فہ س = \frac{ر ط}{ل} س ....(۶)$$

یعنی تراش میں جزی زور کی حدت ہر نقطے پر محور سے فاصلے کے متناسب ہوگی اور محور پر صفر ہوگی اور بڑھتے ہوئے محیط پر انتہائی قیمت زج اختیار کریگی۔

۱۰۹۔ مروڑ کی سعی، فساد اور زور کے درمیان ربط

ایک دیے ہوئے ابعاد کی استوانی سلاخ پر لچک کی حدود کے اندر ایک دیے ہوئے مروڑ کے فسادی عمل اور اس کے اثرات کے درمیان ربط تعادل کے اصولوں اور دفعہ گزشتہ کے ضابطوں سے محسوب ہوسکتا ہے۔ مدور سلاخ کے ٹکڑے ع گ ھ ف کے تعادل پر غور کرو



شکل ۱۵۳

(شکل ۱۵۲) - اس پر خارجی قوتیں صرف سرے ا گ ھ پر کا جفت ت ہے اور وہ قوتیں ہیں جو ٹکڑا ا ک ع ف ل مستوی ع ب ف کے جزی زور کے ذریعے لگاتا ہے - اس لیے موخرالذکر قوتیں تحویل ہوکر ایک جفت بنی چاہییں جس کی مقدار ت ہو اور جو سرے ا گ ھ کے جفت کی مخالف سمت میں ہونا چاہیے - اگر شکل ۱۵۳ تراش کو تعبیر کرے تو نصف قطر ر کے اور عرض مف ر کے ایک پتلے حلقے پر مجموعی جزی قوت

$$= \text{ج} \times 2\pi\, \text{ر مف ر}$$

اور (۵) اور (۶)، دفعہ ۱۰۸ سے صفحہ ۳۰۷

$$\text{ج} = \text{زج} \times \frac{\text{ر}}{\text{س}}$$

اس لیے $\text{ج} \times 2\pi\, \text{ر مف ر} = \text{زج} \times \frac{2\pi}{\text{س}}\, \text{ر}^2\, \text{مف ر}$

اور محور کے گرد اس کا معیار

$$\text{مف ت} = 2\pi \frac{\text{زج}}{\text{س}}\, \text{ر}^3\, \text{مف ر}$$

ساری تراش کو پتلے ہم مرکز حلقوں میں تقسیم کرکے معیاروں کا مجموعہ لینے سے تراش پر عمل کرنے والا مجموعی جفت

$$\text{ت} = 2\pi \frac{\text{زج}}{\text{س}} \int_0^{\text{س}} \text{ر}^3\, \text{فر} = \frac{\pi}{2}\, \text{زج}\, \text{س}^3 \;\text{یا}\; \frac{\pi}{16}\, \text{زج}\, \text{ق}^3 \quad \ldots\ldots\ldots(۱)$$

جہاں ق یا ۲ س سلاخ کا قطر ہے - مقدار

$$2\pi \int_0^{\text{س}} \text{ر}^3\, \text{فر} = \frac{\pi\, \text{س}^4}{2} \;\text{یا}\; \frac{\pi\, \text{ق}^4}{32} = \text{جا}$$

تراش کے رقبے کا محور کے گرد قطبی معیارِ جمود ہے اور (۱) کو لکھا جاسکتا ہے :-

$$\text{ت} = \frac{\text{ز}_{\text{ج}}\,\text{جا}}{\text{ر}} = \frac{\text{ج}\,\text{جا}}{\text{ر}}$$

یا $$\text{ز}_{\text{ج}} = \frac{\text{ت ر}}{\text{جا}} \quad \text{اور} \quad \text{ج} = \frac{\text{ت ر}}{\text{جا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

یہ یاد رکھنا چاہیے کہ ابعاد اور زج کے لیے طول کی جو اکائی استعمال کی جائے وہی ت کے لیے استعمال ہو مثلاً اگر زج اور ابعاد انچوں میں ہو تو ت کو پونڈ انچوں یا ٹن انچوں میں رکھنا چاہیے۔

اس شکل (۲) سے مروڑ کے جفت، زور، اور ابعاد کے ربطوں اور خماؤ کے معیار، زور اور ابعاد کے ربطوں (دفعہ ۶۳) کی مماثلت ظاہر ہوتی ہے اور مقدار $\frac{\text{جا}}{\text{ر}}$ کو ایک ٹھوس مدور تراش کا قطبی مقیاس کہا جا سکتا ہے۔

مساوات (۵) دفعہ ۱۰۸ سے:—

$$\text{ط} = \frac{\text{ز}_{\text{ج}} \times \text{ل}}{\text{ر} \times \text{س}} = \frac{\text{ت} \times \text{ل}}{\text{س} \times \text{جا}} \quad \text{یا} \quad \frac{۳۲\,\text{ت ل}}{\pi\,\text{ق}^{۴}\,\text{س}} \;(\text{نیم قطری}) \ldots (۳)$$

یا $\frac{\text{ت}}{\text{س جا}}$ نیم قطری فی اکائی طول - نیز درجوں میں

$$\text{ط} = \frac{۵۸۳\,\text{ت ل}}{\text{س ق}^{۴}} \;\text{درجے} \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

مروڑ کی مقدار طول کے متناسب ہوگی اور محور کے گرد تراش کے (قطبی) معیارِ جمود (جا) کے اور اس طرح ٹھوس مدور تراش کے ڈھرے میں قطر کی چوتھی قوت کے بالعکس متناسب ہوگی۔ حاصل ضرب س جا کو جس کے مروڑ کی مقدار بالعکس متناسب ہے ڈھرے کی مروڑ کی استواری کہا جا سکتا ہے۔ مدور تراش کے سوا دیگر تراشوں کے لیے جا سے کسی قدر

صفحہ ۳۰۸

چھوٹی مقداریں استعمال کرنی چاہییں (دیکھو دفعہ ۱۱۲) - ٹھوس مدور تراشوں کے لیے زور کی حدت (ا) کی رُو سے قطر کے مکعب کے بالعکس تناسب ہوگی -

۱۱۰- طاقت کے انتقال کے لیے دُھروں کے قطر

دُھرے کے ذریعے طاقت کی منتقلی میں اوسط مروڑ کے معیار یا پیچندگی (torque) کو (نیم قطریوں میں) طے کیے ہوئے زاویے سے ضرب دینے سے منتقل شدہ کام حاصل ہوگا - اس لیے اگر اوسط مروڑ کا معیار پونڈ انچوں میں ت ہو جو ایسی طاقت (ا-ط) کو ن چکر فی منٹ کی رفتار پر منتقل کرنے سے پیدا ہو تو

$$\text{ت} = \frac{\text{ا-ط} \times ۳۳۰۰۰ \times ۱۲}{۲ \pi \text{ن}} \quad ....(۱)$$

اعظم مروڑ کا معیار عموماً اس سے خاصا زیادہ ہوگا کیونکہ مروڑ کا معیار ہر قسم کی چلائی میں بہت کچھ متغیر ہوتا ہے - اگر اعظم اور اوسط پیچندگی کی نسبت کو تعبیر کرنے کے لیے ایک عددی سر اختیار کیا جائے تو اعظم مروڑ کا معیار

$$\text{ت} = \frac{\text{ا، ط}}{\text{ن}} \times \text{مستقل} \quad ....(۲)$$

اور ایک خالص مروڑ کو منتقل کرنے والے دُھرے میں (یعنی جس میں کھاؤ کا زور نہ ہو) اگر بے خطر اعظم جزی زور کی حدت زج ہو تو مساوات (۱) دفعہ ۱۰۹ سے

$$\text{ق}^۳ = \frac{۱۶\,\text{ت}}{\pi\,\text{زج}} = \frac{\text{ا، ط}}{\text{ن}} \times \text{مستقل} \quad ....(۳)$$

فولادی دُھروں کے لیے اس مستقل کی ایک عام قیمت تقریباً ۳٫۳ ہے - جب اعظم مروڑ کے معیار کا تخمینہ ہو جائے تو زج کی عام کامی قیمتیں ۸۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہیں - زج یا مساوات (۳) کے مستقل کی

موزوں قیمتیں مشینوں کی تجویز کی کتابوں میں ملینگی - لمبے دُھروں میں اس شرط کی وجہ سے کہ ایک دیے ہوئے طول میں مروڑ ایک محقق حد کے اندر رہے یہ ممکن ہے کہ اس قطر سے بڑا قطر درکار ہو جو جزی زور کی اعظم حدت پر غور کرنے سے حاصل ہوتا ہو - اس مروڑ کی صلابت (یعنی زور کی بجائے فساد پر حد عائد کرنے) کی ضرورت دفعہ ۱۶۷ سے سمجھ میں آئیگی -

۱۱۱ - کھوکھلے مدور دُھرے — چونکہ مدور دُھرے میں کسی تراش کے تمام نقاط پر زور کی حدت محور سے فاصلے کے تناسب ہوتی ہے اس لیے جب ٹھوس دُھرے میں سطح کے قریب کا مادہ زور کی اعظم بے خطر حد کو پہنچیگا تو محور کے قریب کا مادہ بہت خفیف زور برداشت کر رہا ہوگا - کھوکھلے دُھرے کی صورت میں زور کی حدت حسبِ سابق ہر جگہ محور سے فاصلے کے تناسب ہوگی لیکن اعظم سے لے کر ایک چھوٹی قیمت تک بدلیگی لیکن صفر نہیں ہوگی - اگر دونوں صورتوں میں اعظم زور ایک ہی ہو تو کھوکھلے دُھرے میں زور کی اوسط حدت زیادہ ہوگی اور اس طرح ایک دیا ہوا تراشی رقبہ بڑی پیچیدگی کی مزاحمت کر سکیگا -

فرض کرو کہ ایک کھوکھلے دُھرے کے بیرونی اور اندرونی نصف قطر $س_۲$ یا $\frac{ق_۲}{۲}$ اور $س_۱$ یا $\frac{ق_۱}{۲}$ ہیں - تب مساوات (۱) دفعہ ۱۰۹ کو حدود کے درمیان تکمل کرنے سے صفحہ ۳۰۹

$$ت = ۲\pi \frac{ز_ج}{س_۲} \int_{س_۱}^{س_۲} س^۳ \, فر = \frac{\pi}{۲} ز_ج \frac{س_۲^۴ - س_۱^۴}{س_۲}$$

$$= \frac{\pi}{۱۶} ز_ج \frac{ق_۲^۴ - ق_۱^۴}{ق_۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

جا کی قیمت (۲) اور (۳) دفعہ ۱۰۹ میں کھوکھلے دُھرے کے لیے

$$جا = \pi \frac{(ر_1^4 - ر_2^4)}{2}$$

ہے۔ مروڑ کا زاویہ

$$طہ = \frac{32 \; ت \; ل}{\pi (ق_1^4 - ق_2^4) \; س} \text{ نیم قطری}$$

$$= \frac{583 \; ت \; ل}{س (ق_1^4 - ق_2^4)} \text{ درجہ } \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

مضبوطی (یعنی ایک دی ہوئی انتہائی حدت کے زور کے لیے مروڑ کی مزاحمت) فی اکائی تراشی رقبہ یا فی اکائی وزن کے لیے کھوکھلے اور ٹھوس دُھرے کا ایک ہی بیرونی قطر کے لیے مقابلہ کرنے سے :-

$$\frac{کھوکھلا}{ٹھوس} = \frac{ر_1^4 - ر_2^4}{ر_1 (ر_1^2 - ر_2^2)} \div \frac{ر_1^3}{ر_1^2} = 1 + \left(\frac{ر_2}{ر_1}\right)^2$$

جو $ر_2$ کے $ر_1$ کے قریب آنے کی صورت میں یعنی ایک پتلی نلی کی صورت میں انتہائی نسبت ۲ کو پہنچتا ہے۔ دونوں دُھروں کی مروڑ کی استواریوں میں بھی وہی نسبت ہوگی جو ان کی مضبوطیوں میں ہے۔

۱۱۲ - غیر مدور تراش کے دُھروں کی مروڑ

ایسے دُھروں کی مروڑ جو متشاکل ہیں لیکن مدور نہیں بہت پیچیدہ ہے۔ تراشیں جو ابتدائً مستوی ہوں مُڑ جاتی ہیں اور جزی زور کی اعظم حدت عموماً تراش کے محیط کے اُس نقطے پر واقع ہوتی ہے جو مروڑ کے محور یا تراش کے مرکزِ ہندسی کے قریب ترین ہوتا ہے۔ اس مسئلے پر سان وینان[1] نے تحقیق کی ہے اور ایسی صورتوں کے لیے سادہ آزمائشی ضابطے وضع کیے ہیں جن میں زیادہ صحیح نتائج بہت پیچیدہ ہوتے ہیں۔ سان وینان کے کام کا بیان

[1] St. Venant

ٹاڈھنٹر[1] اور پیؤسن[2] کی کتاب "لچک کے نظریے کی تاریخ" جلد دوم حصہ اول میں ملیگا جس سے ذیل کی قیمتیں اخذ کی گئی ہیں - ترقیم گزشتہ چار دفعات کی استعمال کی گئی ہے -

مربع تراش —— ضلع کا طول ض - زور کی اعظم حدت ز ضلعوں کے وسط میں واقع ہوگی -

$$\text{ت} = ۲۰۸\text{،}\,\text{ض}^{۳}\,\text{ز}_{\text{ج}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

جو اندرونی دائرے کے تناظر قیمت $\frac{\pi}{۱۶}\,\text{ز}_{\text{ج}}\,\text{ض}^{۳}$ سے صرف تقریباً ۶ فی صدی زیادہ ہے - اور

$$\text{ط} = ۷\text{،}۱۱\,\frac{\text{ت} \times \text{ل}}{\text{س} \times \text{ض}^{۴}} = \frac{\text{ت ل}}{۴۴\text{،}۸\,\text{س جا}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اس میں $\text{جا} = \frac{\text{ض}^{۴}}{۶}$

ناقصی تراش —— بڑا محور ا، چھوٹا محور ب - زور کی اعظم حدت ز ج چھوٹے محور کے سروں پر واقع ہوگی -

$$\text{ت} = \frac{\pi}{۱۶}\,\text{ا ب}^{۲}\,\text{ز}_{\text{ج}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

$$\text{ط} = \frac{۱۶}{\pi}\,\frac{(\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲})}{\text{ا}^{۳}\text{ب}^{۳}}\,\frac{\text{ت ل}}{\text{س}} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

صفحہ ۳۱۰ مستطیلی تراش —— بڑا ضلع ا، چھوٹا ضلع ب - زور کی اعظم حدت ز ج بڑے ضلعوں کے وسطی نقاط پر واقع ہوگی -

$$\text{ت} = \frac{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲}}{۳\text{ا} + ۱\text{،}۸\,\text{ب}} \times \text{ز}_{\text{ج}} \;\text{یا}\; \frac{\text{ا ب}^{۲}}{۳ + ۱\text{،}۸\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}}}\,\text{ز}_{\text{ج}} \quad \ldots (۵)$$

اختیاری عددی سر

[1] Todhunter [2] Pearson

$$\frac{۱}{۳ + ۱٫۸\frac{ب}{ا}}$$

کی زیادہ صحیح قیمتوں کے لیے وہ جدول دیکھو جو ٹاڈہنٹر[1] اور پیرسن[2] کی کتاب "لچک کی تاریخ[3]"، جلد دوم حصہ اول، صفحہ ۳۹ میں دی گئی ہے۔

کسی متشاکل تراش کے لیے جس میں مستطیل بھی شامل ہیں تقریباً۔

$$ط = \frac{ت\,ل}{س} \times \frac{۴۰\,جا}{مر^۴} \qquad (۶)$$

جہاں مر تراش کا رقبہ ہے اور جا قطبی معیارِ جمود ہے۔ ۴۰ کی بجائے، مدور یا ناقصی تراش کے لیے صحیح عددی سر $۴\pi^۲$ ہے، اور اُن مستطیلوں کے لیے، جن میں $\frac{ا}{ب}$ < ۳، عددی سر تقریباً ۴۲ ہے۔

چابی راہ والے گول دُھرے۔ —— اگر ایک گول دُھرے میں ایک چابی راہ ہو جس کا عرض دُھرے کے قطر کا ع گنا ہو اور گہرائی گ گنی ہو تو لچکدار زور کی ایک دی ہوئی حد زج کے لیے اس دُھرے کی پیچیدگی سالم دُھرے کی حسبِ ذیل کسر لی جاسکتی ہے:—

$$۱ - ۰٫۲\,ع - ۱٫۱\,گ$$

لچکدار انصراف حسبِ ذیل نسبت میں بڑھ جائیگا:—

$$۱ + ۰٫۴\,ع + ۰٫۷\,گ$$

مثال ۱ - ایک دُھرے میں مروڑ کے جزی زور کی اعظم حدت معلوم کرو جس کا قطر ۳ انچ ہے اور جو ۵۰ ا - طؔ کو ۸۰ چکر فی منٹ کی رفتار پر منتقل کر رہا ہے۔ اعظم مروڑ کا معیار اوسط سے ۴۰ فی صدی زیادہ ہے۔ اگر س = ۱۲×۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ تو اعظم مروڑ درجہ

[1] Todhunter [2] Pearson [3] History of Elasticity

فی فٹ طول میں معلوم کرو۔

مروڑ کا معیار پونڈ انچوں میں

$$ت = \frac{1.44 \times 50 \times 12 \times 33000}{\pi 2 \times 80} = 55125 \text{ پونڈ انچ}$$

$$ز_ج = \frac{ت}{ق^3} \times \frac{16}{\pi} = \frac{55125 \times 16}{\pi\, 27} = 10400 \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

مروڑ فی فٹ طول درجوں میں

$$ط^\circ = \frac{12 \times 55125}{12 \times 10^6 \times 81 \times \frac{\pi}{32}} \times \frac{180}{\pi} = 0.398^\circ$$

مثال ۲ — ایک ٹھوس گول دُھرے کی بجائے ایک کھوکھلا دُھرا استعمال کیا جا رہا ہے جس کا بیرونی قطر، اندرونی قطر کا $1\frac{1}{4}$ گنا ہے۔ دونوں میں مروڑ کے زور کی ایک ہی حدت جائز رکھی جائے تو ٹھوس اور کھوکھلے دُھروں کے وزن اور صلابت کا مقابلہ کرو۔

فرض کرو کہ ٹھوس دُھرے کا قطر قَ ہے اور کھوکھلے کا بیرونی قطر ق ہے۔ صفحہ ۳۱۱

مساوی مضبوطی کے لیے

$$قَ^3 = \frac{ق^4 - (0.8\, ق)^4}{ق} = (1 - 0.4096)\, ق^3$$

$$\frac{ق}{قَ} = \sqrt[3]{\frac{1}{0.5904}} = \sqrt[3]{1.696} = 1.192$$

وزنوں کی نسبت

$$\frac{\text{ٹھوس}}{\text{کھوکھلا}} = \frac{1}{(1.192)^2 (1 - 0.8^2)} = 1.96$$

صلابت کی نسبت

$$\frac{\text{کھوکھلا}}{\text{ٹھوس}} = \frac{(1.192)^4 (1 - .8^4)}{1} = 1.19$$

۱۱۳ - **کھچاؤ اور مروڑ دونوں** ——— گزشتہ دفعات میں یہ مانا گیا ہے کہ ڈھروں پر ایک محوری جفت عمل کر رہا ہے جس سے صرف مروڑ کا جزی زور پیدا ہو رہا ہے - لیکن عملاً تقریباً تمام ڈھروں پر ان کے ذاتی وزن یا چرخیوں کے وزن یا کرینکوں اور تسموں کے ڈھکیل یا کھنچاؤ کی وجہ سے کھچاؤ کا عمل بھی واقع ہوتا ہے - اس طرح ڈھرے میں زور کے اجزائے ترکیبی یہ ہونگے (۱) مروڑ کا جزی زور محور کے علی القوائم مستویوں اور محور میں سے گزرنے والے مستویوں پر (۲) تننشی اور فشاری کھچاؤ کے زور محور کے متوازی (۳) کھچاؤ کی قوتوں سے پیدا ہونے والے جزی زور محور کے متوازی مستویوں اور علی القوائم مستویوں پر - ڈھرا بہت چھوٹا نہ ہو تو اعظم صدر زور عموماً ڈھرے کے محیط پر واقع ہونگے جہاں متقابل پہلوؤں پر تننشی اور فشاری زور مساوی اور مخالف اعظم قیمت کو پہنچتے ہیں - اس صورت میں کھچاؤ کی قوتوں سے پیدا ہونے والے جزی زور کا لحاظ غیر ضروری ہے کیونکہ یہ محیط پر صفر ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۷۱) - بہت چھوٹے ڈھروں میں یہ ہوسکتا ہے کہ کھچاؤ کی قوتوں سے پیدا ہونے والا جزی زور محور کے متوازی راست زور سے زیادہ اہم ہو - اس صورت میں سب میں بڑا خاص زور تراش کے اندر واقع ہوسکتا ہے - لیکن بالعموم اعظم صدر زور محیط پر ہوتا ہے - فرض کرو کہ کھچاؤ کے طولی زور کی مساوی اور مخالف انتہائی حدت جو کسی تراش کے قطر کے سروں پر واقع ہوتی ہے ز ہے - تب

$$\text{ز} = \frac{\text{ھ}}{\text{مق}} = \frac{32\,\text{ھ}}{\pi\,\text{ق}^3} \quad \text{(دفعات ۶۳ اور ۶۶)} \quad \ldots\ldots(1)$$

جہاں $\text{مق} = \frac{\pi}{32}\,\text{ق}^3$ قطر ق کے ایک گول ڈھرے کی تراش کا مقیاس ہے

اور ھ خماؤ کا معیار ہے۔ فرض کرو کہ مروڑ کے جزی زور ج کی انتہائی قیمت جو محیط پر واقع ہوتی ہے ز ج ہے۔ تب

$$\text{ز}_{\text{ج}} = \frac{\text{۱۶ ت}}{\pi\,\text{ق}^{۳}} \quad (\text{دفعہ ۱۰۹ (۱)}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

صفحہ ۳۱۲ صدر زوروں کی حدتیں دفعہ ۱۸ کی طرح معلوم کی جا سکتی ہیں۔ اعظم صدر زور کی قیمت یہ ہوگی :-

$$\text{ز}_{\text{ا}} = \tfrac{1}{2}\,\text{ز} + \sqrt{\tfrac{1}{4}\,\text{ز}^{2} + \text{ز}_{\text{ج}}^{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

یہ کھال کے اُس پہلو پر تنشی ہوگا جس پر خماؤ کا اعظم تنشی زور واقع ہوتا ہے اور اس کے عین مقابل فشاری ہوگا۔ ز اور ز ج کی اوپر کی قیمتیں درج کرنے سے

$$\text{ز}_{\text{ا}} = \frac{۱۶}{\pi\,\text{ق}^{۳}}\left(\text{ھ} + \sqrt{\text{ھ}^{2} + \text{ت}^{2}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

یا

$$\text{ز}_{\text{ا}} = \frac{۳۲}{\pi\,\text{ق}^{۳}}\left\{\tfrac{1}{2}\left(\text{ھ} + \sqrt{\text{ھ}^{2} + \text{ت}^{2}}\right)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

(۵) سے ظاہر ہے کہ اگر خماؤ کا معیار

$$\text{ھ}_{\text{ع}} = \tfrac{1}{2}\left(\text{ھ} + \sqrt{\text{ھ}^{2} + \text{ت}^{2}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

اکیلا عمل کرے تو اس سے تنشی اور فشاری زور کی وہی اعظم حدت (ز ا) پیدا ہوگی جو ھ اور ت کے مل کر عمل کرنے سے پیدا ہوتی ہے۔ اس وجہ سے اس کو معادل خماؤ کا معیار کہا جاتا ہے اور یہ صریحاً کھوکھلے دھرے کے لیے بھی درست ہے۔

چونکہ خماؤ اور مروڑ کا اجتماع مرکب زور کی ایک اہم صورت ہے اس لیے یہ دیکھنا فائدے سے خالی نہ ہوگا کہ دفعہ ۲۵ میں جو چار مفروضے بیان کیے گئے ہیں اُن سے مجوزہ کے "معادل" کیا پیدا ہوتے ہیں۔

اگر لچکدار ناکارگی کے لیے خاص راست فساد پر غور کیا جائے اور پوائی سن کی نسبت $\frac{۱}{۴}$ لی جائے تو دفعہ (۲۵) کی مساوات (۲) سے معادل خماؤ کا معیار حسبِ ذیل ہوگا:۔

$$\frac{۳}{۸}\,ھ + \frac{۵}{۸}\sqrt{ھ^{۲} + ت^{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

جو (۶) کے $ھ_{ع}$ سے زیادہ ہے۔ اگر (۶) کی قیمت استعمال کی جائے تو زور کی حدت کی کافی قیمت (۷) کے مقابلے میں ذرا پست تر اختیار کرنی چاہیے (دیکھو دفعہ ۲۵)۔ اور اگر اعظم جزی زور پر غور کیا جائے جو حسبِ ذیل ہے:۔

$$\sqrt{\frac{۱}{۴}\,ز^{۲} + ز_{ج}^{۲}} \quad یا \quad \frac{۱۶}{\pi\, ق^{۳}}\sqrt{ھ^{۲} + ت^{۲}}$$

تو معلوم ہوا کہ اگر مروڑ کا معیار

$$ت_{ع} = \sqrt{ھ^{۲} + ت^{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$

اکیلا عمل کرے تو جزی زور کی وہی اعظم حدت پیدا کریگا جو ھ اور ت مل کر پیدا کرتے ہیں اور اس طرح اس کو معادل مروڑ کا معیار کہنا نامناسب نہ ہوگا۔ اگر وہ زاویہ جو خاص زور کا محور دُھرے کے محور سے بناتا ہے یا جو خاص مستوی تراش سے بناتا ہو ط ہو تو (۳) دفعہ ۱۷ سے

$$مس\ ۲ط = \frac{۲\,ز_{ج}}{ز} = \frac{ت}{ھ}$$

صفحہ ۲۱۲ اگر ناکارگی کے لیے اعظم لچکدار فسادی توانائی پر غور کیا جائے تو (۵) دفعہ ۲۴ ل سے تو وہ سادہ زور جس سے یہی فسادی توانائی پیدا ہوگی

$$\sqrt{ز^{۲} + ز_{ج}^{۲}\,\frac{ے}{ص}} \quad یا \quad \sqrt{ز^{۲} + ۲\,ز_{ج}^{۲}\left(۱ + \frac{۱}{م}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots (۹)$$

ہوگا اور وہ خماؤ کا معیار جس سے یہ زور اور یہ فسادی توانائی پیدا ہوں

$$\sqrt{م^2 + \frac{ت^2 ے}{۳ س}} \quad یا \quad \sqrt{م^2 + \frac{۱}{۴} ت^2 \left(۱ + \frac{۱}{م}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

ہوگا۔ اور یہ اس مفروضے کے نقطۂ نظر سے معادل خماؤ کا معیار ہوگا اور متعدد اشیا میں تجرباتی واقعات سے سب میں قریب یہی ہے۔

۱۴- سروں کے دھکیل کا اثر ــــ اگر خماؤ اور مروڑ کی قوتوں کے علاوہ ایک محوری دھکیل یا کھنچاؤ بھی ہو تو صدر زور معلوم کرنے سے پہلے محوری قوت سے پیدا ہونے والے زور کی حدت کو خماؤ کے طولی راست زور میں جبری طور پر جمع کرنا چاہیے۔ محوری دھکیل ف ہو تو طولی فشاری زور کی انتہائی حدت

$$ز = \frac{م}{ص ق} + \frac{ف}{ر}$$

ہوگی جہاں ر تراش کا رقبہ ہے اور م اس پر خماؤ کا معیار۔ فشاری زور کی اعظم حدت معلوم کرنے کے لیے مساوات (۳) میں ز کی بجائے یہ ز استعمال کرنا چاہیے۔

طولی تنشی زور کی انتہائی حدت

$$ز_ت = \frac{م}{ص ق} - \frac{ف}{ر}$$

ہوگی۔ اگر یہ مثبت ہو تو مساوات (۳) میں ز کی بجائے اس کو درج کرنے سے تنشی خاص زور کی اعظم حدت معلوم ہوگی۔

مثال ۱ ــــ ۳ انچ قطر کے ایک دھرے پر ایک ۴۰۰۰۰ پونڈ انچ کا ایک مروڑ کا معیار اور ایک ۱۰۰۰۰ پونڈ انچ کا خماؤ کا معیار عمل کرتا ہے۔ اعظم خاص زور معلوم کرو۔ اگر پوائسن کی نسبت $\frac{۱}{۴}$ ہو تو وہ راست زور معلوم کرو جو اکیلا عمل کرکے یہی اعظم فساد پیدا کریگا۔

مروڑ کے جزی زور کی حدت

$$ز_ج = \frac{۱۶ \times ۲۰۰۰۰۰۰}{۲۷ \times \pi} = ۴۴۵۷ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

خماؤ کے زور کی حدت

$$ز = \frac{۳۲ \times ۱۰۰۰۰}{۲۷ \times \pi} = ۳۷۷۲ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

اعظم صدری زور کی حدت

$$= \tfrac{1}{۲} ز + \sqrt{\tfrac{1}{۴} ز^۲ + ز_ج^۲} = ۱۸۸۶ + ۱۰۰ \sqrt{۵۶۹۴ + ۳۵۶}$$

$$= ۹۶۶۴ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

اقل صدری زور کی حدت

$$= ۱۸۸۶ - ۱۰۰\sqrt{۵۶۹۴ + ۳۵۶} = -۵۸۹۲ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

اعظم فساد اعظم صدری زور کی سمت میں (دیکھو دفعہ ۱۹) صفحہ ۳۱۴

$$= \frac{1}{م}\left(۹۶۶۴ + \frac{۵۸۹۲}{۴}\right) = \frac{۱۱۱۳۷}{م}$$

اس فساد کو پیدا کرنے کے لیے مطلوبہ راست زور = ۱۱۱۳۷ پونڈ فی مربع انچ

مثال ۲ — ایک دانسر کے دھرے پر ایک ۱۸۰ ٹن فٹ کا مروڑ کا معیار، ۴۰ ٹن فٹ کا خماؤ کا معیار، اور ۳۰ ٹن کا ایک راست دھکیلی عمل کرتا ہے۔ اگر اس کا بیرونی قطر ۱۶ انچ اور اندرونی قطر ۸ انچ ہو تو نتاری زور کی اعظم حدت معلوم کرو۔

تراش کا قطبی مقیاس

$$\frac{\pi}{۱۶} \cdot \frac{۱۶^۴ - ۸^۴}{۱۶} = ۷۵۵ = ۲۲۴۰ \text{ (انچ)}^۳$$

اور "خماؤ کا مقیاس" اس کا نصف ہوگا۔

کسی تراش میں مروڑ کا اعظم جزی زور

$$ز_ج = \frac{۱۲ \times ۱۸۰}{٫۷۵۵} = ۲٫۸۶ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

خاؤ کا اعظم زور

$$= \frac{۲ \times ۱۲ \times ۴۰}{٫۷۵۵} = ۱٫۲۷ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

اور دھکیل کی وجہ سے فشار

$$= \frac{۳۰}{۱۹۲ \times ٫۷۸۵۴} = ٫۲۰ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

محور کے متوازی راست فشار

$$= ۱٫۲۷ + ٫۲۰ = ۱٫۴۷ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

اس لیے اعظم فشاری (خاص) زور

$$= ٫۷۳۵ + \sqrt{(٫۷۳۵)^۲ + (۲٫۸۶)^۲} = ۳٫۶۸۸ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

۱۱۵۔ لچک کی حد کے باہر مروڑ —— اگر مروڑ کا جفت بتدریج بڑھتا جائے یہاں تک کہ شکستگی واقع ہو تو دھاتیں، خواہ متمدد ہوں یا پھٹوٹک، جن خواص کا اظہار کرتی ہیں وہ تنشی امتحان کے بہت مشابہ ہوتے ہیں۔ اگر مروڑ کے معیاروں کو کسی مقررہ طول کے زاویئے انصراف کی اساس پر ترسیم کیا جائے تو جو نقشہ حاصل ہوگا وہ تناؤ اور تطول کے نقشے کے بہت مشابہ ہوگا (دیکھو شکل ۳۱)۔ متمدد دھاتوں کی صورت میں مروڑ کے امتحان کا نقطۂ مغلوبیت، اور زاویئے فساد کی مروڑ کے معیار کے ساتھ تناسبیت خاص کر ٹھوس سلاخ میں تنشی امتحان کے مقابلے میں کم نمایاں ہوتے ہیں اور اس کی وجہ یہ ہے کہ ساری شئے زور کی اس

حدت پر ایک وقت میں نہیں پہنچتی، بیرونی پرت پہلے پہنچتے ہیں اور فسادی عمل جیسے جیسے بڑھتا ہے پیکر پذیر حالت محور کی طرف پھیلتی ہے۔ نقطۂ مغلوبیت ایک پتلی کھوکھلی نلی کی صورت میں زیادہ صفائی سے مشاہدے میں آئیگا۔ چونکہ تراش میں کوئی قابلِ لحاظ گھٹاؤ واقع نہیں ہوتا اس لیے صفحہ ۲۱۵
منحنی میں ویسا کوئی "جھوک" نہیں ہوتا جیسا کہ تنشی امتحان میں مقامی سکڑاؤ کی وجہ سے ہوتا ہے۔ لیکن منحنی فساد کے محور یعنی اساس کے تقریباً متوازی ہو جاتا ہے جس سے معلوم ہوتا ہے کہ شے تقریباً کامل پیکر پذیر ہوگئی ہے۔ ایسی صورت میں جزی زور کی حدت سلاخ کے محور سے فاصلے کے متناسب ہونے کی بجائے تراش پر تقریباً یکساں ہوتی ہے اور مروڑ کے معیارت اور جزی زور کی انتہائی حدت زج اور نصف قطر ر یا $\frac{ق}{۲}$ میں ربط (۱) دفعہ ۱۰۹ کی بجائے حسبِ ذیل ہوتا ہے:—

$$\text{ت} = ۲\pi\, \text{ز}_\text{ج} \int_0^{\text{ر}} \text{ر}^۲\, \text{فر} = \frac{۲}{۳}\pi\, \text{ز}_\text{ج}\, \text{ر}^۳ \ \text{یا}\ \frac{\pi}{۱۲}\, \text{ز}_\text{ج}\, \text{ق}^۳$$

شکستگیاں — متمدد اشیا میں شکستگی عموماً تقریباً مستوی اور مروڑ کے محور کے علی القوائم ہوتی ہے۔ پھوٹک اشیا میں، جیسا کہ ڈھلا لوہا ہے، جن میں مروڑ کے تحت شکستگی تناؤ کی وجہ سے واقع ہوتی ہے، شکستگی کی سطح استوانی سطح کو ایک منتظم مرغولے میں ملتی ہے جو نمونے کے محور سے ۴۵° کا میلان رکھتا ہے کیونکہ یہ سمت تنشی خاص زور کی سمت کے علی القوائم ہوتی ہے (دیکھو دفعات ۸ اور ۱۰۸ اور شکل ۲۱۹)۔

دیگر مظاہر — زور کی وجہ سے نقطۂ مغلوبیت کا بڑھ جانا، مدت کے ساتھ لچک کی بازیابی، اور اسی طرح کے دیگر اثرات جو ابتدائی نقطۂ مغلوبیت سے زیادہ فساد کے تحت آئی ہوئی اشیا میں ظاہر ہوتے ہیں وہ جس طرح تناؤ کے تجربات میں ظاہر ہوتے ہیں مروڑ کے فساد میں بھی تقریباً اسی طرح مشاہدے میں آتے ہیں۔ اس قسم کے متفرق تجربات کا ایک بیان ڈاکٹر کوکر[1] کا لکھا ہوا

[1] Dr. E. G. Coker

Phil. Trans. Roy. Soc. of Edinburgh, Vol. XI. Part ii. No. 14.
میں ملیگا۔

۱۱۶ - **مروڑ کی بازگشتگی** — اگر کسی شے میں جزی زور کی ایک یکساں حدت ج ہو تو اس کی لچکدار فسادی توانائی

$$\frac{1}{2}\frac{ج^2}{س}$$

فی اکائی حجم ہوتی ہے (دفعہ ۹۵) - اب اگر ایک ٹھوس دھرے پر غور کیا جائے جس میں لچک کی حد کے اندر مروڑ کا فساد واقع ہو تو نصف قطر ر، موٹائی فر ر، اور طول ل کے ایک پتلے نلوانی حصے کی جزی بازگشتگی

$$= \frac{1}{2}\frac{ج^2}{س} \times 2\pi ل ر . فر ر$$

جہاں $ج = \frac{ر}{ما} . زج$

اور زج بیرونی نصف قطر ما پر جزی زور کی حدت ہے - اس طرح دھرے کی مجموعی مروڑ کی بازگشتگی

$$= \frac{\pi ل}{س} \int_0^{ما} ج^2 ر فر ر = \frac{\pi ل}{س} \times \frac{زج^2}{ما^2} \int_0^{ما} ر^3 فر ر$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi ما^2 ل زج^2}{س} = \frac{1}{4}\frac{زج^2}{س} \times حجم \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

اسی طرح ایک کھوکھلے اُستوانی دھرے کی مروڑ کی بازگشتگی جس کے بیرونی اور اندرونی نصف قطر علی الترتیب ما۱ اور ما۲ ہوں حسب ذیل ہوگی :— صفحہ ۳۱۶

$$\frac{\pi ل}{س} . \frac{زج^2}{ما_1^2} \int_{ما_2}^{ما_1} ر^3 فر ر = \frac{\pi ل}{4 س} . \frac{زج^2}{ما_1^2} (ما_1^4 - ما_2^4)$$

tubular ه—

$$= \frac{ہا_1^2 + ہا_2^2}{ہا_1^2} \times \frac{1}{4} \frac{ز_ج^2}{س} \times \text{حجم} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اگر $ہا_2$، $ہا_1$ کے قریب پہنچے یعنی اس صورت میں کہ نلی بہت پتلی ہو اور اس طرح جزی زور کی حدت تقریباً یکساں ہو بازگشتگی کی قیمت $\frac{1}{2} \frac{ز_ج^2}{س}$ فی اکائی حجم کے قریب آئیگی۔

اگر (۱) اور (۲) میں $ز_ج$ جزی زور کی لچک کی حد کو تعبیر کرے تو اوپر کے جملوں کو دفعہ ۲۴ کے طریقِ تسمیہ کے مطابق مروڑ کی برداشتنی بازگشتگی کہا جاسکتا ہے۔

اوپر کے نتائج حاصل کرنے کا ایک متبادل طریقہ یہ ہوگا کہ مروڑ میں کیے ہوئے کام کے یعنی مروڑ کے معیار اور مروڑ کے زاویے کے حاصل ضرب کے نصف کے جملے

$$\frac{1}{2} ت\, ط$$

میں ت اور ط کی قیمتیں ٹھوس اُستوانی دُھرے کے لیے دفعہ ۱۰۹ کی مساواتوں (۱) اور (۳) سے اور کھوکھلے دُھرے کے لیے تناظر قیمتیں دفعہ ۱۱۱ سے مندرج کریں۔

یہ طریقہ دیگر تراشوں کے لیے بھی موزوں ہے جن میں زور کی تقسیم اتنی سادہ نہیں مثلاً مربع دُھرا۔ دفعہ ۱۱۲ کے ضابطوں (۱) اور (۲) کو استعمال کرنے سے بازگشتگی

$$\frac{1}{2} ت\, ط = \frac{1}{2} \times ۱۱،۷ \times \frac{ت^2 ل}{س\, ض^4} = \frac{۱۱،۷}{2} \times \frac{(۲۰۸،)^2 ض^2 ز_ج^2 ل}{س}$$

$$= ۱۵۴، \frac{ز_ج^2}{س} \times ض^2 ل = ۱۵۴، \frac{ز_ج^2}{س} \times \text{حجم} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

یہی طریقہ دفعہ ۱۱۲ میں دی ہوئی دوسری تراشوں کے لیے بھی اختیار کیا جا سکتا ہے۔

۱۱۷ — مرغولی کمانیاں، تنگ لچھے دار —

(۱) محوری بوجھ — اگر ایک مرغولی کمانی ایسی تنگ لپیٹی ہوئی ہو کہ ہر ایک لچھا تقریباً ایک مستوی میں ہو جو مرغولے کے محور کے علی القوائم ہو تو جب کمانی پر ایک محوری کھینچ یا دھکیل عمل کرے تو سمجھا جا سکتا ہے کہ کمانی کے مادے میں صرف مروڑ کا عمل ہو رہا ہے۔ مرغولے کے تار پر مروڑ کا معیار محوری قوت اور اس استوانی سطح کے نصف قطر کا جس میں مرغولہ یعنی تار کا مرکزی خط واقع ہے (یعنی لچھوں کے اوسط نصف قطر کا) حاصل ضرب ہوگا۔ اگر مرغولہ "تنگ لچھے دار" نہ ہو تو محوری قوت سے تار کے مروڑ کے علاوہ لچھوں کا خماؤ بھی واقع ہوتا ہے اور بہر صورت تار کی ہر تراش پر مروڑ سے پیدا ہونے والے جز کے علاوہ ایک اور جذی قوت محوری بوجھ کی وجہ سے ہوگی۔ لیکن اکثر صورتوں میں مروڑ کا فساد خماؤ یا جز کے اثرات سے اتنا زیادہ ہوتا ہے کہ مروڑ کے سوا دوسرے فسادات کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

ایک تنگ لچھے دار مرغولے پر غور کرو جس کے لچھوں کا اوسط نصف قطر ر ہے اور جو قطر ق کے مدور تار سے بنا ہے اور فرض کرو کہ اس پر ایک محوری بوجھ و ہے جو فرض کرو کہ تننشی ہے (دیکھو شکل ۱۵۴)۔ فرض کرو کہ تکمل لچھوں کی تعداد ن ہے اور تار کا مجموعی طول ل ہے یعنی لچھوں کے تنگ ہونے کی وجہ سے صفحہ ۳۱۷

$$ل = ۲\pi ر ن \quad (\text{تقریباً})$$

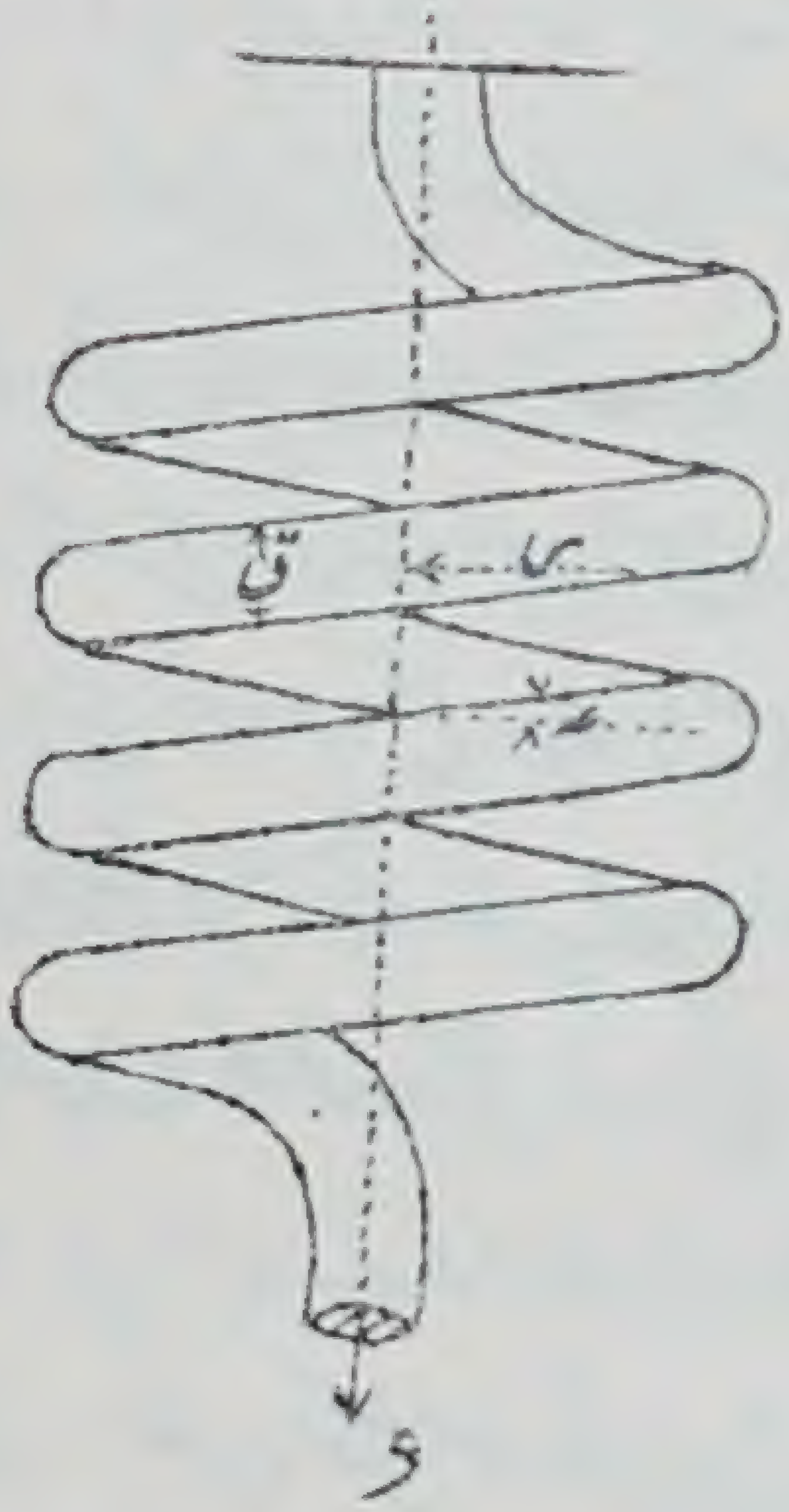
اور فرض کرو کہ استواری کا مقیاس یا جذی مقیاس پونڈ فی مربع انچ میں س ہے۔ پورے تار پر ایک مروڑ کا معیار

$$ت = و ر$$

عمل کر رہا ہے اور اگر ایک سرا مضبوط ثابت ہو تو دوسرا ایک زاویہ طہ میں گھومیگا (دفعہ ۱۰۹ مساوات (۳))۔

$$\text{طہ} = \frac{\text{ت ل}}{\text{س جا}} = \frac{\text{۳۲ ت ل}}{\pi\ \text{ق}^{4}\ \text{س}} = \frac{\text{۳۲ و ر ل}}{\pi\ \text{ق}^{4}\ \text{س}}\ \text{نیم قطری}\ \ldots\ldots(۱)$$

یا $\frac{\text{ت}}{\text{س جا}}$ نیم قطری فی اکائی طول۔



شکل ۱۵۴

اس طرح آزاد سرے پر ایک محوری حرکت ر۔ طہ ہوگی جو آسانی سے اِس طرح سمجھ میں آسکتی ہے کہ مجموعی طول کے کسی چھوٹے حصے کے دونوں سروں پر کی مروڑ کے فرق کی وجہ سے آزاد سرے کی جو محوری حرکت ہوتی ہے اس پر غور کریں اور پھر چونکہ ایک سرا ثابت ہے اس لیے ساری محوری حرکت آزاد سرے پر واقع ہونی چاہیے۔ اگر آزاد سرے کی محوری حرکت یا انصراف صہ ہو تو

$$\text{صہ} = \text{ر} \times \text{طہ} = \frac{\text{۳۲ و ر}^{2}\text{ل}}{\pi\ \text{ق}^{4}\ \text{س}}\ \text{یا}\ \frac{\text{۶۴ و ر}^{3}\text{ن}}{\text{ق}^{4}\ \text{س}}\ \text{انچ}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(۲)$$

اس کو نہایت آسانی سے اس طرح بھی حاصل کر سکتے ہیں کہ مروڑ کی بازگشتگی یعنی مروڑ کے معیار کے کیے ہوئے کام کو بیرونی کام کے مساوی رکھیں جو محوری قوت اور انصراف کی رقوم میں بیان کرنا چاہیے۔ اس طرح

$$\tfrac{1}{2}\ \text{و} \times \text{صہ} = \tfrac{1}{2}\ \text{ت طہ} = \tfrac{1}{2}(\text{و ر})\ \frac{\text{۳۲ و ر ل}}{\pi\ \text{ق}^{4}\ \text{س}}\ \ldots\ldots\ldots(۳)$$

اور $\text{صہ} = \frac{\text{۳۲ و ر}^{2}\text{ل}}{\pi\ \text{ق}^{4}\ \text{س}}\ \text{یا}\ \frac{\text{۶۴ و ر}^{3}\text{ن}}{\text{ق}^{4}\ \text{س}}$ (حسب سابق)

بازگشتگی انچ پونڈوں میں حسب ذیل ہے :-

$$\frac{۱۶ \; و^{۲} ر^{۲} ل}{\pi \; ق^{۴} س} \quad یا \quad \frac{۱}{۴} \frac{ز_{ج}^{۲}}{س} \times حجم \quad (دفعہ ۱۰۶ کی طرح)$$

کیونکہ $ز_{ج} = \frac{۱۶}{\pi \; ق^{۳}} و ر$ دفعہ ۱۰۹ مساوات (۱) کی طرح -

کھوکھلی مدور تراش کی یعنی نلی کی بنی ہوئی کمانی کے انصراف اسی طرح دفعہ ۱۱۱ کی مساواتوں (۱) اور (۲) کی مدد سے حاصل ہو سکتے ہیں -

کمانی کی صلابت کی (پونڈوں میں) یہ تعریف کی جاسکتی ہے کہ یہ قوت فی اکائی انصراف ہے اور و ایک پونڈ ہو تو $\frac{۱}{صہ}$ کے مساوی ہے -

صفحہ ۳۱۸ اگر اوپر کے ضابطوں میں طولی اکائی انچ ہو (جیسا کہ عام طور پر ہوتا ہے) تو قوت فی فٹ انصراف کو ص لیا جاسکتا ہے جہاں

$$ص = \frac{۱۲ \; \pi \; ق^{۴} س}{۳۲ \; ر^{۲} ل} = \frac{۳ \; \pi \; ق^{۴} س}{۸ \; ر^{۲} ل}$$

جس کی اکائیاں وہی ہیں جو ارتعاشوں کی حرکیات کی بحث میں عام طور پر مستعمل ہیں -

مربع تراش کی صورت میں

$$صہ = ر ط = ۷ء۱۱ \frac{و ر^{۲} ل}{س ض^{۴}}$$

اور بازگشتگی دفعہ گزشتہ کی طرح ۱۵۴ء $\frac{ز_{ج}^{۲}}{س}$ فی اکائی حجم ہوگی -

یہ دیکھنا دلچسپی سے خالی نہیں کہ اوپر کی تمام صورتوں میں جزی زور کی ایک دی ہوئی حدت کے لیے بازگشتگی فی اکائی حجم اُس سے بہت زیادہ ہوتی ہے جو یکساں تناؤ کے لیے یا خمیدہ شہتیر میں راست زور کی اسی عددی حدت کے لیے (دفعہ ۹۳) حاصل ہوتی ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ فولاد کے لیے س کی قیمت ے کی تقریباً صرف $\frac{۲}{۵}$ ہوتی ہے اور عددی طور

بھی مروڑ میں خماؤ سے زیادہ ہے کیونکہ اکثر صورتوں میں جو عام طور پر واقع ہوتی ہیں اشیا میں مروڑ میں زور زیادہ یکساں ہوتا ہے۔ جس فولاد سے بالعموم کمانیاں بنائی جاتی ہیں اُس کی لچک کی حد اعلیٰ ہوتی ہے اور اس کے تناسب سے فسادی توانائی جمع کرنے کی قابلیت بھی زیادہ ہوتی ہے۔ چھوٹے تار کمانیوں کے لیے مناسب طور پر آب دادہ ہوں تو ان کے لیے جزی زور کی بے خطر کامی قیمت ۳۰ ٹن فی مربع انچ سے اونچی ہوتی ہے۔

(ب) محوری مروڑ۔ اگر ایک تنگ لچھے دار کمانی کو ایک سرے پر ثابت کیا جائے اور مرغولے کے محور کے گرد ایک مروڑ کا جفت مر لگایا جائے تو آزاد سرا جس پر یہ جفت لگایا جاتا ہے ایک مقدار کے بقدر مروڑا جاتا ہے جو اس جفت کے متناسب ہوتی ہے۔ لچھوں کے خفیف ترچھے پن کو نظر انداز کریں تو ایک یا متعدد لچھوں پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ مرغولے کے تار کو ہر عمادی تراش پر ایک خماؤ کے معیار مر کی مزاحمت کرنی ہوتی ہے جو مرغولے کے لچھوں کو اَور زیادہ موڑنا یا کھولنا چاہتا ہے یعنی اِن کے انحنا کو بڑھانا یا گھٹانا چاہتا ہے بلحاظ اس کے جفت کس سمت میں لگایا گیا ہے۔ اگر ہم بطور ایک تقرب کے یہ فرض کریں کہ لچھے جن کا ابتدائی انحنا خاصا ہے ایک شہتیر کا عمل کرتے ہیں جس کا ابتدائی انحنا صفر ہو اور یہ کہ دفعات ۶۱ اور ۶۳ کے ربط درست رہتے ہیں تو

خماؤ کا معیار مر = آ سے × (انحنا کی تبدیلی) .... (۴)

جہاں آ تراشش کا معیارِ جمود تراش کے تعدیلی محور کے گرد ہے جو تراش کے مرکزِ ہندسی میں سے گزرتا ہے اور مرغولے کے محور کے متوازی ہے۔ اگر لچھے کا نصف قطر، تار کے تراشی ابعاد سے بہت بڑا ہو تو اوپر کا مفروضہ بہت قریباً صحیح ہے (دیکھو دفعہ ۱۲۹)۔ اگر خماؤ کا معیار انحنا کو بڑھائے اور لچھوں کا اوسط نصف قطر ر سے گھٹ کر رَ ہو جائے اور ان کی تعداد ن سے بڑھ کر نَ ہو جائے تو ۲π ن ر = ۲π نَ رَ = ل اور

مر = آے (۱/ر̄ − ۱/ر) = ۲π آے (ن̄ − ن) / ل .... (۵)

اور آزاد سرے کا مجموعی مروڑ فہ نیم قطریوں میں

فہ = ۲π (ن̄ − ن) = مر ل / آے (نیم قطری) .... (۶)

صفحہ ۳۱۹ یہ نتیجہ بازگشتگی سے آسانی سے نکالا جاسکتا ہے کیونکہ مساوات (۷) دفعہ ۹۳ سے

½ مر فہ = ½ مر² ل / آے .... (۷)

اس لیے فہ = مر ل / آے

انحنا کی تبدیلی یعنی مزید موڑ فی اکائی طول

۱/ر̄ − ۱/ر یا فرفہ / فرل

سارے طول میں یکساں ہے اور (۵) یا (۶) سے اس کی مقدار مر / آے ہوگی۔

ٹھوس مدور تراش اور قطر ق کے تار کے لیے (۶) حسب ذیل ہو جاتی ہے :—

فہ = ۶۴ مر ل / π ے ق⁴ یا ۱۲۸ مر ر ن / ے ق⁴ نیم قطری .... (۸)

اور خمائو کے راست زور کی حدت کی انتہائی قیمت

ز = ۳۲ مر / π ق³ .... (۹)

ضلع ض کی مربع تراش کے لیے (۶) حسبِ ذیل ہوگی :-

$$ف_ہ = \frac{۱۲ ہ ر ل}{ے ض^۴} \text{ یا } \frac{۳۲۴ ہ ر ر ن}{ے ض^۴} \quad ......(۱۰)$$

اور

$$ز = \frac{۶ ہ}{ض^۳} \quad ......(۱۱)$$

بازگشتگی — مدور تراش کے لیے بازگشتگی یہ ہے :-

$$\frac{۱}{۸} \frac{ز^۲}{ے} \text{، فی اکائی حجم}$$

اور مستطیلی تراش کے لیے

$$\frac{۱}{۶} \frac{ز^۲}{ے} \text{ فی اکائی حجم}$$ (دیکھو دفعہ ۹۳)

۱۱۸۔ کشادہ لچھوں کی مرغولی کمانی —

(ا) محوری بوجھ و —— دفعہ گزشتہ کی ترمیم کے ساتھ فرض کرو کہ لچھے مرغولے کے محور کے علی القوائم مستویوں سے ہر جگہ زاویہ عہ بناتے ہیں (دیکھو شکل ۱۵۵ جس کا مستوی اُس اُسطوانی سطح کا جس میں تار کا مرغولی مرکزی خط واقع ہے ایک مماسی مستوی ہے)۔ تب ن لچھوں کا طول

$$ل = ۲\pi ر ن \text{ قط } عہ$$

اب محوری قوت و کا ہ لا کے گرد ہ پر کی عمادی تراش پر جو معیار و ر ہے اس کو دو معیاروں میں تحلیل کیا جاسکتا ہے :

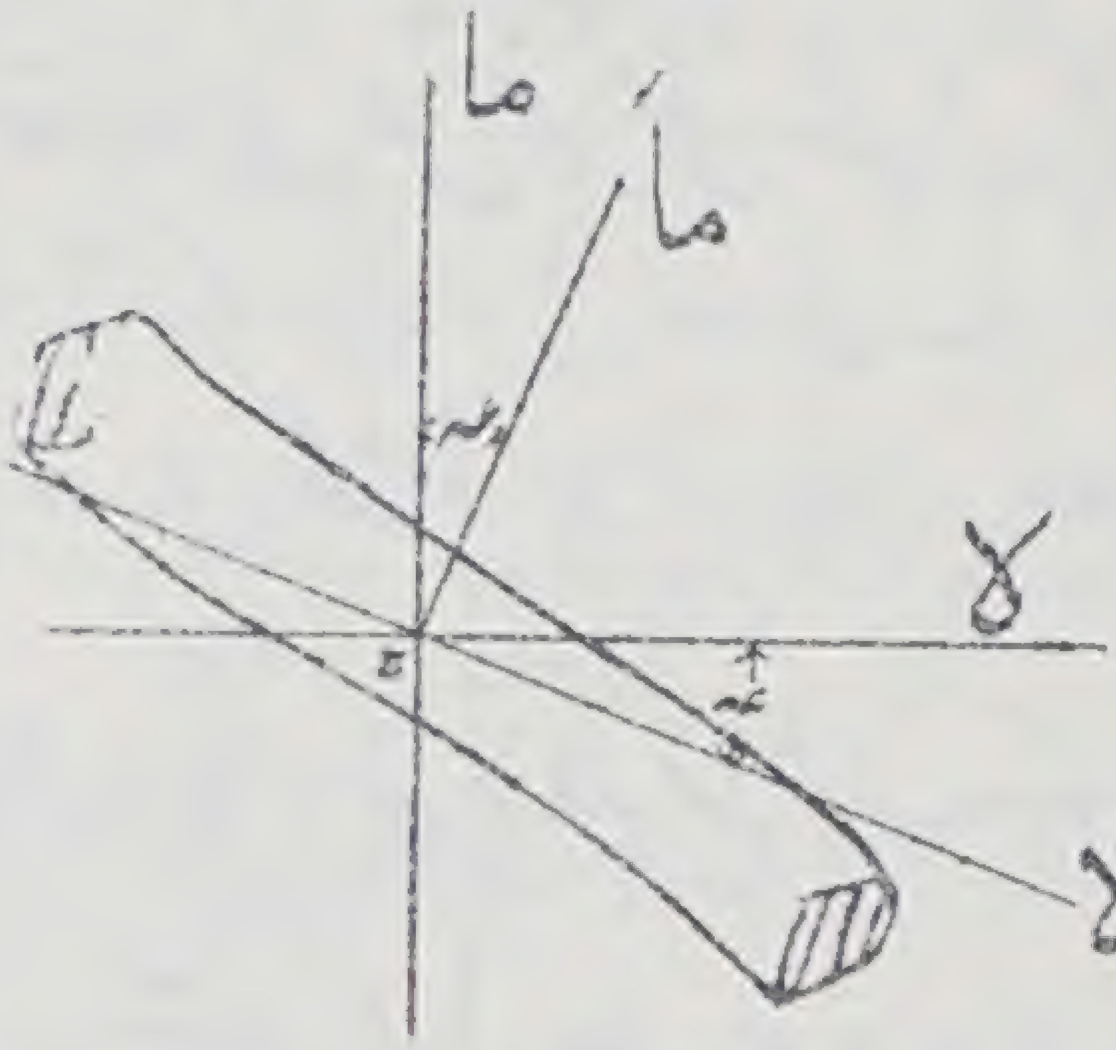
$$\bar{ت} = و ر \text{ جم } عہ$$

اور

$$\bar{م} = و ر \text{ جیب } عہ$$

پہلے جزوِ تحلیلی سے ہ لا کے گرد ایک مروڑ کا معیار تار کے مرکزی خط پر

جاساً حاصل ہوگا اور دوسرے سے ۵ ماَ کے گرد ایک خماؤ کا معیار حاصل ہوگا جو تار کے محور کے علی القوائم اور شکل ۱۵۵ کے مستوی میں ہوگا۔



شکل ۱۵۵

اگر صرف محوری تطول مطلوب ہو تو اسے نہایت آسانی سے فسادی توانائی کے ذریعے دفعہ گزشتہ کے (۳) اور (۷) کی مدد سے نکالا جاسکتا ہے۔ قطر ق کے ایک مدور تار کے لیے

$$\frac{1}{2}\,\text{و صہ} = \frac{1}{2}\,\text{تَ طہ} + \frac{1}{2}\,\text{مَ فہ}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\text{تَ}^{2}\,\text{ل}}{\text{س جا}} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{مَ}^{2}\,\text{ل}}{\text{آ ے}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

جہاں طہ اور فہ آزاد سرے کے زاویئی ہٹاؤ ایسے محوروں کے گرد ہیں جیسے کہ علی الترتیب ۵ لاَ اور ۵ ماَ ہیں۔ اس طرح

$$\text{و صہ} = \frac{\text{ل و}^{2}\,\text{ر}^{2}\,\text{جم}^{2}\text{عہ}}{\text{س جا}} + \frac{\text{ل و}^{2}\,\text{ر}^{2}\,\text{جب}^{2}\text{عہ}}{\text{آ ے}}$$

اور ــــ

$$\text{صہ} = \text{و ل ر}^{2}\left(\frac{\text{جم}^{2}\text{عہ}}{\text{س جا}} + \frac{\text{جب}^{2}\text{عہ}}{\text{آ ے}}\right) \text{ یا } ۲\,\text{و}\,\pi\,\text{ر}^{3}\,\text{ن قطعہ}$$

$$\left(\frac{\text{جم}^{2}\text{عہ}}{\text{س جا}} + \frac{\text{جب}^{2}\text{عہ}}{\text{آ ے}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

$$\text{صہ} = \frac{۳۲\,\text{و ل ر}^{2}}{\pi\,\text{ق}^{4}}\left(\frac{\text{جم}^{2}\text{عہ}}{\text{س}} + \frac{۲\,\text{جب}^{2}\text{عہ}}{\text{ے}}\right) = \frac{۶۴\,\text{و ر}^{3}\,\text{ن قطعہ}}{\text{ق}^{4}}$$

$$\left(\frac{\text{جم}^{2}\text{عہ}}{\text{س}} + \frac{۲\,\text{جب}^{2}\text{عہ}}{\text{ے}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

جو عہ = ۰ کے لیے نتیجہ (۲) دفعہ ۱۱۷ کی شکل اختیار کر لیتا ہے، ـــ = ۲/۵
لیا جائے تو ترچھے پن کے اثر سے انصراف تنگ لپیٹے ہوئے مرغولے (عہ = ۰)
کے مقابلے میں جس کا یہی طول ل ہو ٹھوس مدور تراش کے تار کی صورت میں
عہ = ۱۰° کے لیے ۱ فی صدی سے کم گھٹاؤ اور عہ = ۴۵° کے لیے تقریباً
۱۰ فی صدی گھٹاؤ ہوتا ہے - بعض دوسری تراشوں میں اس سے بہت زیادہ
اثر ہوتا ہے - غیر مدور تراشوں کے لیے (۱) میں ت ل / س جبا کی بجائے طہ کی وہ
قیمت استعمال کرنی چاہیے جو دفعہ ۱۱۲ میں دی ہوئی ہے -
محور ہ مَا کے گرد جو خماؤ کا عمل ہے وہ اور ہ لاَ کے گرد کی مروڑ،
یہ دونوں کمانی کے آزاد سرے کو مرغولے کے محور کے گرد گردش دیتے ہیں -
اگر یہ گردش فہ مطلوب ہو تو اس کو اس طرح اخذ کر سکتے ہیں کہ ہ پر کے ایک
چھوٹے طول فرل کی ہ لاَ اور ہ مَا کے گرد گردشوں کے اجزائے تحلیلی
ہ لاَ اور ہ ما کے گرد حاصل کیے جائیں - اگر فہ کو اس صورت کے لیے مثبت
لیا جائے کہ پیچوں کی تعداد بڑھے یعنی انحنا بڑھے تو ہ لاَ کے گرد مروڑ کی
وجہ سے گردش

فرطَہ = (و ہا جم عہ / س جبا) × فرل .... (۴)

اور ہ ما کے گرد اس کا جزوِ تحلیلی مثبت ہے اور حسبِ ذیل ہے :-

(و ہا × فرل × جم عہ / س جبا) × جیب عہ .... (۵)

ہ مَا کے گرد خماؤ منفی ہے (یعنی پیچوں کو کھولتا ہے) اور حسبِ ذیل ہے :- صفحہ ۳۲۱

فرفہَ = - (و ہا جیب عہ / ے) × فرل .... (۶)

اور ہ ما کے گرد اس کا جزوِ تحلیلی

$$= \frac{و \times م \times فرل \times جب\ عہ}{آ\ ے} \times جم\ عہ \quad \cdots\cdots\cdots (۷)$$

ہے۔ اس طرح ہ ما کے گرد مجموعی گردش

$$فرفہ = و \times م \times فرل \times جب\ عہ\ جم\ عہ \left(\frac{۱}{س\ جا} - \frac{۱}{آ\ ے}\right) \cdots\cdots (۸)$$

اور تمام مساوی طولوں فرل کے لیے یہ گردش فرفہ مساوی ہوگی یعنی $\frac{فرفہ}{فرل}$ = مستقل

اور اس طرح

$$فہ = و\ م\ ل\ جب\ عہ\ جم\ عہ \left(\frac{۱}{س\ جا} - \frac{۱}{آ\ ے}\right)\ یا\ ۳۲\ و\ م^۲\ ن\ جب\ عہ$$

$$\left(\frac{۱}{س\ جا} - \frac{۱}{آ\ ے}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (۹)$$

جو کسی دیے ہوئے طول ل اور عمودی تراش کے لیے صریحاً اس وقت اعظم ہوگا جب کہ عہ = ۴۵°

اسی طرح اجزائے ترکیبی لینے سے ٹکڑے فرل سے ک لا کے گرد جو گردش حاصل ہوگی اُس کی مدد سے مجموعی گردش طہ = $\frac{صہ}{م}$ حاصل ہوگی اور انصراف

$$صہ = م\ طہ = و\ ل\ م^۲ \left(\frac{جم^۲\ عہ}{س\ جا} + \frac{جب^۲\ عہ}{آ\ ے}\right)$$ جو (۲) کے مطابق ہے

قطر ق کی ٹھوس مدور تراش کے لیے

$$فہ = \frac{۳۲\ و\ م\ ل}{۲۳\ ق^۴}\ جب\ عہ\ جم\ عہ \left(\frac{۱}{س} - \frac{۲}{ے}\right)\ یا\ \frac{۶۴\ و\ م^۲\ ن}{ق^۴}\ جب\ عہ$$

$$\left(\frac{۱}{س} - \frac{۲}{ے}\right)\ نیم\ قطری \cdots\cdots\cdots\cdots (۱۰)$$

جو $\frac{س}{ے} = \frac{۲}{۵}$ کے لیے صریحاً مثبت ہے۔

غیر مدور تراشوں کے لیے اوپر کے جملوں میں $\frac{۱}{جا}$ کی بجائے $\frac{ت ل}{س}$ کے وہ عددی سر استعمال کرنے چاہییں جو دفعہ ۱۱۲ کی مساواتوں (۲)، (۴)، اور (۶) میں دیے گئے ہیں۔ ایسی تراشوں میں، جیسے کہ ناقص اور مستطیل ہیں جن کے خاص عمودی ابعاد بہت نامساوی ہوں، مروڑ اور خمیدگی کی صلابتوں میں بہت فرق ہوسکتا ہے لیکن مدور تراشش میں اگر $\frac{س}{ے} = \frac{۲}{۵}$ لیا جائے تو

$$\frac{س\, جا}{آ\, ے} = \frac{۴}{۵}$$

ایسی پچکی ہوئی تراشوں میں گردش فہ مدور تراش سے بہت زیادہ ہوسکتی ہے اور مثبت یا منفی ہوسکتی ہے۔

اعظم خاص زور کی حدت مساوات (۳) دفعہ ۱۱۳ سے معلوم ہوسکتی صفحہ ۳۲۲
ہے۔ زور کا جزوِ ترکیبی ز ایک خماؤ کے معیار و سا جب عہ سے اور جزوِ ترکیبی ز ج ایک مروڑ کے معیار و ر جم عہ سے پیدا ہوتا ہے۔ (غیر مدور تراشوں کے لیے ز ج دفعہ ۱۱۲ کے مطابق محسوب ہوگا)۔ مدور تراشوں کے لیے خاص زور مساوات (۴)، دفعہ ۱۱۳ کی رو سے حسبِ ذیل ہو جاتا ہے:-

$$ز = \frac{۱۶}{\pi ق^{۳}} و سا (۱ + جب عہ) \qquad \cdots\cdots (۱۱)$$

جذی زور کی اعظم حدت حسبِ ذیل ہے:

$$\frac{۱۶}{\pi ق^{۳}} \sqrt{و^{۲} سا^{۲} جب^{۲} عہ + و^{۲} ر^{۲} جم^{۲} عہ} = \frac{۱۶ و سا}{\pi ق^{۳}}$$

جو بالکل تنگ لچکے دار کمانی کی طرح ہے۔

(۲) محوری پیچیدگی مر - ہ ما کے گرد جو معیار ہے (جس کو ثبت سمجھا جائیگا اگر وہ فہ کو بڑھائے یعنی لچھوں کے انحنا کو بڑھائے) اس کو حسبِ سابق دو اجزا میں تحلیل کیا جاسکتا ہے ایک ہ ما کے گرد مر جم عہ اور ایک ہ کا کے گرد مر جب عہ اور اس طرح بازگشتگی کی مساوات حسبِ ذیل ہوگی :-

$$\frac{1}{2}\,\text{مر فہ} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{ل مر}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}{\text{آ ے}} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{ل مر}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ}}{\text{س جا}} \quad \ldots\ldots (12)$$

$$\text{فہ} = \text{ل مر}\left(\frac{\text{جم}^2\,\text{عہ}}{\text{آ ے}} + \frac{\text{جب}^2\,\text{عہ}}{\text{س جا}}\right) = 2\pi\,\text{ر ان مر قط عہ}$$

$$\left(\frac{\text{جم}^2\,\text{عہ}}{\text{آ ے}} + \frac{\text{جب}^2\,\text{عہ}}{\text{س جا}}\right) \quad \ldots\ldots (13)$$

اس میں غیر مدور تراشوں کے لیے جا میں حسبِ سابق دفعہ ۱۱۲ کے مطابق ترمیم کرنی ہوگی۔ فطرق کے مدور تار کے لیے

$$\text{فہ} = \frac{32\,\text{ل مر}}{\pi\,\text{ق}^4}\left(\frac{2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}{\text{ے}} + \frac{\text{جب}^2\,\text{عہ}}{\text{س}}\right) = \frac{64\,\text{مر ر}}{\text{ق}^4}\,\text{ن قط عہ}$$

$$\left(\frac{2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}{\text{ے}} + \frac{\text{جب}^2\,\text{عہ}}{\text{س}}\right) \quad \ldots\ldots (14)$$

جو $\text{عہ} = 0$ کے لیے نتیجہ (۸) دفعہ ۱۱۷ کی شکل اختیار کرلیتا ہے۔

$\frac{\text{س}}{\text{ے}} = \frac{2}{5}$ لیا جائے تو تار کے ایک ہی طول کے لیے فہ کی قیمت $\text{عہ} = 0$ کے مقابلے میں $\text{عہ} = 10^\circ$ کے لیے ۱ فی صدی زیادہ اور $\text{عہ} = 45^\circ$ کے لیے $12\frac{1}{2}$ فی صدی زیادہ ہوتی ہے۔

جفت مر سے پیدا ہونے والا محوری تطول گردشوں کو حسبِ سابق تحلیل کرنے سے حاصل ہوگا۔ مدور تراشوں کے لیے نتیجہ حسبِ ذیل ہے :-

$$\text{صہ} = \text{مر ل ر جب عہ جم عہ}\left(\frac{1}{\text{س جا}} - \frac{1}{\text{آ ے}}\right) \quad \ldots\ldots (15)$$

اس طرح قطرق کے ٹھوس مدور تار کے لیے

$$\text{صہ} = \frac{\text{۳۲ ل ھ سا}^{2}}{\pi\ \text{ق}^{4}}\ \text{جب عہ جم عہ}\left(\frac{1}{\text{س}} - \frac{2}{\text{ے}}\right)\ \text{یا}\ \frac{\text{۶۴ ھ سا}^{2}}{\text{ق}^{4}}\ \text{ن جب عہ}\left(\frac{1}{\text{س}} - \frac{2}{\text{ے}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

مساوات (۱۵) میں غیر مدور تراشوں کے لیے ترمیم حسبِ سابق ہوگی۔

دفعہ ہذا میں جو مختلف ضابطے حاصل کیے گئے ہیں اُن کو صرف تقربات سمجھا جائے کیونکہ سا اور عہ کو مستقل سمجھا گیا ہے۔ دراصل یہ متغیر ہوتے ہیں اور محوری طول کی تبدیلی سے اور مروڑ سے بدلتے ہیں جیساکہ صریحی ربط

لچھے کا محوری طول = ل جب عہ صفحہ ۳۲۲

اور ۲ π ن سا = ل جم عہ

سے ظاہر ہے۔

انصراف صہ محوری طول کی تبدیلی ہے اور مروڑ قہ، ۲ π ن کی تبدیلی ہے۔ خفیف انصرافوں اور مروڑوں کے لیے عہ اور سا کی تبدیلیوں کو نظرانداز کیا جاسکتا ہے، اور دیے ہوئے ضابطے تقریباً ٹھیک ٹھیک ہوتے ہیں۔

مثال ۱ — ایک تنگ لچھے دار مرغولی کمانی $\frac{1}{2}$ انچ کے گول فولادی تار کی بنی ہوئی ہے اور اس کے ۱۰ لچھے ہیں جن کا اوسط قطر ۱۰ انچ ہے۔ اگر کمانی ۴۰ پونڈ کا محوری بوجھ اُٹھائے تو تطول، مروڑ کے زور کی حدت، اور بازگشتگی فی مکعب انچ معلوم کرو۔ س = ۱۲ × ۱۰^{6} پونڈ فی مربع انچ۔

تار کے محور کے گرد مروڑ کا معیار

۴۰ × ۵ = ۲۰۰ پونڈ انچ

اس طرح مروڑ کا زاویہ

= (۱۰ × π ۱۰ × ۲۰۰) / (π/۳۲ × ۱/۱۶ × ۱۰^۶ × ۱۲) = ۶۴/۷۵ نیم قطری

اور انصراف

= ۶۴/۷۵ × ۵ = ۴ ۴/۱۵ انچ

جزی زور کی حدت

ز_ج = (۸ × ۱۶ × ۲۰۰) / π = ۸۱۵۰ پونڈ فی مربع انچ

بازگشتگی فی مکعب انچ

= ۱/۴ × ز_ج^۲ / س = ۱/۴ × (۸۱۵۰ × ۸۱۵۰) / (۱۰^۶ × ۱۲) = ۱،۳۸ انچ پونڈ

مثال ۲ - اگر مثال ا کی کمانی پر ۱۲۵ پونڈ انچ کی ایک محوری پیچیدگی لگائی جائے تو محوری مروڑ، خماؤ کے زور کی حدت، اور جمع شدہ کام فی مکعب انچ معلوم کرو۔

ے = ۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ

مروڑ کا زاویہ

ف = م ل / ۲ ے = (۱۶ × ۶۴ × ۱۰ × π ۱۰ × ۱۲۵) / (π × ۱۰^۶ × ۳۰) = ۶۴/۱۵۰ نیم قطری

= ۲۴،۴۵ درجے

خماؤ کے زور کی حدت

ز = ۳۲ م / π ق^۳ = (۸ × ۱۲۵ × ۳۲) / π = ۱۰۱۸۰ پونڈ فی مربع انچ

اور بازگشتگی فی مکعب انچ

= ۱/۸ ز^۲/ے = (۱۰،۱۸)^۲ × ۱۰^۶ / (۱۰^۶ × ۳۰ × ۸) = ۰،۴۳۲ انچ پونڈ

مثال ۳۔۔ ایک مرغولہ دار کمانی میں دس لچھے ہیں جن کا قطر ۱۰ انچ ہے اور جو $\frac{1}{2}$ انچ کے گول فولادی تار کے بنے ہیں۔ اگر مرغولہ محور سے ۶۰° کا زاویہ بناتے (یعنی ص = ۳۰°) تو ۴۰ پونڈ کے محوری بوجھ کے تحت محوری انصراف اور آزاد سرے کا مروڑ معلوم کرو۔ نیز فولاد کے اندر زور کی اعظم حدت کا تخمینہ کرو۔ صفحہ ۲۲۲

مثال ۱ کی سادہ تر صورت کے نتائج اور دفعہ ۱۱۸ کی مساوات (۳) کے استعمال سے

$$\text{ص} = \frac{4}{15}\,\text{م} \times \text{قط}\,30^\circ \left(\text{جتم}^2\,30^\circ + \frac{2}{2.55}\,\text{جب}^2\,30^\circ\right)$$

$$= \frac{64}{15} \times 1.155\,(0.75 + .196) = 4.668 \text{ انچ}$$

(دیکھو تار کا طول مثال ۱ سے ۱۵٫۵ فی صدی زیادہ ہے)۔ اور مساوات (۱۰) دفعہ ۱۱۸ سے

$$\text{ف} = \frac{16 \times 10 \times 2.5 \times 40 \times 128}{60 \times 12} \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2.55}\right)$$

$$= \frac{94}{3.05} \text{ نیم قطری} = 91.8 \text{ درجے}$$

مساوات (۱۱) دفعہ ۱۱۸ سے اعظم خاص زور کی حدت

$$= \frac{8 \times 400 \times 16}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1.5 \times 8160 = 12230 \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

مثال ۴۔ ایک مرغولی کمانی ایک چپٹی فولادی پٹی کی بنی ہوئی ہے جو ۱ انچ چوڑی اور $\frac{1}{16}$ انچ موٹی ہے اور موٹائی مرغولے کے محور کے علی القوائم ہے۔ لچھے پانچ ہیں جن کا اوسط قطر ۴ انچ ہے اور گھائی ۱۱ انچ ہے۔ اگر بالائی سرا مضبوطی کے ساتھ ثابت ہو تو نچلے سرے کی گردش فی پونڈ محوری بوجھ کا تقریبی اندازہ لگاؤ۔ س اور ے کی وہ قیمتیں لو جو مثال ۱ اور ۲ میں دی گئی ہیں۔

اگر انتصابی محور کی صورت میں لچھے افق سے زاویہ ھ بنائیں تو

$$مس\ عد = \frac{گھائی}{اوسط\ محیط} = \frac{۱۰}{۴\pi} = ٫۷۹۶$$

اس لیے $جب\ عد = ٫۶۲۳$

اب مساوات (۹) دفعہ ۱۱۸ میں $\frac{۱}{جا}$ کی بجائے نتیجہ (۶) دفعہ ۱۱۲

یعنی $\frac{۴۰ جا}{ر^۴}$ کو استعمال کرنا چاہیے اور ایک مستطیل ض × ق کے لیے

$$جا = \frac{۱}{۱۲} ض\ ق\ (ض^۲ \times ق^۲)،\ \text{اس لیے}$$

$$جا = \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۱}{۱۰} (۱٫۰۱) = \frac{۱٫۰۱}{۱۲۰}$$

اور $ر = \frac{۱}{۱۰}$

$$\frac{۴۰ جا}{ر^۴} = \frac{۴۰ \times ۱٫۰۱ \times ۱۰۰۰۰}{۱۲۰} = \frac{۱۰۱۰۰}{۳}$$

نیز $ا = \frac{۱}{۱۲} ض\ ق^۳ = \frac{۱}{۱۲۰۰۰}$

اس لیے مساوات (۹) دفعہ ۱۱۸ سے ایک پونڈ محوری بوجھ کے لیے مروڑ کا زاویہ

$$ف = \frac{٫۶۲۳ \times ۵ \times ۴ \times ۲\pi}{۱۰^۶} \left(\frac{۱۲۰۰۰}{۳۰} - \frac{۱۰۱۰۰}{۱۲ \times ۳} \right)$$

$$= \frac{٫۶۲۳ \times ۵ \times ۴ \times ۲\pi}{۱۰^۶ \times ۱۲} (۴۸۰۰ - ۳۳۶۷)$$

$$= -٫۰۰۹۳۵ \text{ نیم قطری} = -٫۵۳۵ \text{ درجے}$$

منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ کمانی کھلتی ہے۔

مثال ۵ — مدور فولاد کی ایک تنگ لچھے دار مرغولی کمانی کا وزن معلوم کرو جو ۵۰۰ پونڈ کے بے خطر بوجھ کو ۲ انچ کے تطول اور جزی زور کی بے خطر حدت

...۵۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کے ساتھ برداشت کرنے کے لیے ضروری ہو۔ س = ۱۲×۱۰^{۶} پونڈ فی مربع انچ اور فولاد کا وزن ۰٫۲۸ پونڈ فی مکعب انچ ہے۔

برداشتنی بازگشتگی فی مکعب انچ

$$= \frac{۱}{۴} \frac{ج^{۲}}{س} = \frac{۲۵۰۰ \times ۱۰^{۶}}{۴ \times ۱۲ \times ۱۰^{۶}} = ۵۲٫۱ \text{ انچ پونڈ}$$

$$\text{جمع شُدنی کام} = \frac{۱}{۲} \times ۵۰۰ \times ۲ = ۵۰۰ \text{ انچ پونڈ}$$

$$\text{مطلوبہ حجم} = \frac{۵۰۰}{۵۲٫۱} \text{ مکعب انچ}$$

$$\text{کمانی کا مطلوبہ وزن} = \frac{۰٫۲۸ \times ۵۰۰}{۵۲٫۱} = ۲٫۶۹ \text{ پونڈ}$$

سوالات نمبر ۱۰

۱۔ ایک فولادی ڈھرے کا قطر ۳ انچ ہے، اور اس میں مروڑ ۵ فٹ طول میں ۱° سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے۔ اگر س = ۵۲۰۰ ٹن فی مربع انچ تو یہ مروڑ کے زور کی کس اعظم حدت کے متناظر ہوگا؟

۲۔ وہ مروڑ کا معیار معلوم کرو جو ایک ۴ انچ قطر کے ڈھرے میں ۹۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کا زور پیدا کر چکا۔ اگر س = ۱۲×۱۰^{۶} پونڈ فی مربع انچ تو ۱۰ فٹ طول میں مروڑ کا زاویہ کیا ہوگا؟

۳۔ ۸۰ ا۔ط کو ۶۰ چکر فی سنٹ پر منتقل کرنے کے لیے ڈھرے کا کتنا قطر درکار ہوگا اگر اعظم پیچیدگی اوسط سے ۳۰ فی صدی زیادہ ہو اور مروڑ کے زور کی حد ۸۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہو۔ اگر س = ۱۲×۱۰^{۶} پونڈ فی مُربع انچ تو ۱۰ فٹ طول میں مروڑ کا اعظم زاویہ کیا ہوگا؟

۴۔ اگر ایک ۴ انچ قطر کا ڈھرا ۱۰۰ ا۔ط کو ۱۵۰ چکر فی منٹ پر منتقل کرے اور مروڑ کا اعظم معیار اوسط سے $۱\frac{۱}{۴}$ گنا ہو تو مروڑ کے زور کی اعظم حدت

معلوم کرو۔

۵۔ ایک داسر کے ڈھرے میں اعظم زور معلوم کرو جس کا بیرونی قطر ۱۶ انچ اور اندرونی قطر ۸ انچ ہے اور جس پر صرف ایک مروڑ کا معیار ۱۸۰۰۰ ٹن انچ عمل کرتا ہے۔ اگر س = ۵۲۰۰۰ ٹن فی مربع انچ تو قطر کے ۲۰ گنے طول میں مروڑ کتنا ہوگا۔

۶۔ سوال ۵ کے ڈھرے کا مقابلہ ایک ٹھوس گول ڈھرے سے جس کا طول اور وزن وہی ہو (۱) بلحاظ مروڑ کی لچکدار مضبوطی کے (۲) بلحاظ صلابت یا مروڑ کی استواری کے کرو۔

۷۔ سوال ۵ کے ڈھرے کا مقابلہ ایک ٹھوس گول ڈھرے سے جس کی مروڑ کی استواری وہی ہو (۱) بلحاظ وزن کے (۲) بلحاظ مضبوطی یا مروڑ کی مزاحمت کے معیار کے کرو۔

۸۔ ایک ۴ انچ قطر کے ڈھرے کی ایک خاص تراشش پر ۴۰۰۰۰ پونڈ انچ کا ایک مروڑ کا معیار اور ۳۰۰۰۰ پونڈ انچ کا ایک خماؤ کا معیار عمل کرتے ہیں۔ مادے میں راست زور کی اعظم حدت کیا ہوگی اور اعظم خاص زور کا ڈھرے کے محور کے ساتھ میلان کیا ہوگا۔

۹۔ ایک ٹھوس ڈھرے کا قطر کیا ہونا چاہیے کہ ۱۶۰ ٹن فٹ کے ایک مروڑ کے معیار اور ۴۰ ٹن فٹ کے ایک خماؤ کے معیار کو برداشت کرے اور اعظم راست زور ۴ ٹن فی مربع انچ تک محدود رہے۔ اس مطلب کے لیے ایک کھوکھلا ڈھرا استعمال کیا جائے جس کا اندرونی قطر بیرونی قطر کا ۰٫۶ ہو تو اس کا بیرونی قطر کیا ہونا چاہیے۔

صفحہ ۳۲۶
۱۰۔ ایک ۲½ انچ قطر کے ڈھرے پر ۶ ٹن انچ کا خماؤ کا معیار عمل کرتا ہے۔ اگر اس کو ۱۰۰ چکر فی منٹ پر چلایا جائے تو یہ کتنی اسپی طاقت منتقل کر سکتا ہے بغیر اس کے کہ اعظم راست زور ۵ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ ہو۔

۱۱۔ ایک داسر کا ٹھوس تراش کا ڈھرا ۱۰ انچ قطر کا ہے اور ۱۲۰۰ ا۔ط کو ۹۰ چکر فی منٹ پر منتقل کرتا ہے۔ اگر پیچ کا ڈھکیل ۱۰ ٹن ہو تو ڈھرے میں فشاری زور کی اعظم حدت محسوب کرو۔ خماؤ کے زور قابلِ نظر اندازی ہیں۔

۱۲۔ اگر گزشتہ سوال میں ۱۰ ٹن فٹ کا ایک خماؤ کا معیار بھی موجود ہو تو

فشاری زور کی اعظم حدت معلوم کرو۔

۱۳ — فولاد کی ۱ انچ قطر کی ایک گول سلاخ جو ۵۰ انچ فصل کے دو نقطوں پر سہاری گئی ہے ۶۰ پونڈ کے ایک وسطی بوجھ کے تحت ۱۰۶ء انچ منصرف ہوتی ہو اور ۱۵۰۰ پونڈ انچ کے مروڑ کے معیار سے ۴۰ انچ کے طول میں ۲۶۹۶ء درجے مروڑی جاتی ہو تو اس کے لیے ی، س اور پوائی سن کی نسبت معلوم کرو۔

۱۴ — ایک تنگ پیچے دار مرغولی کمانی $\frac{1}{4}$ انچ کے گول فولادی تار کی بنی ہوئی ہے جس کے ۱۰ پیچھے ۴ انچ اوسط قطر کے ہیں۔ ۱۲ پونڈ کے محوری بوجھ کے تحت اس کا انصراف معلوم کرو۔ (س = ۱۲ × ۱۰^6 پونڈ فی مربع انچ)۔ تار میں جزی زور کی اعظم حدت کیا ہوگی اور کمانی کی صلابت پونڈ فی فٹ انصراف میں کیا ہے۔

۱۵ — ایک تنگ پیچے دار مرغولی کمانی کو $\frac{1}{4}$ انچ کے تار سے بنانا ہے (س = ۱۲ × ۱۰^6 پونڈ فی مربع انچ) اور اس کو $\frac{1}{20}$ انچ فی پونڈ بوجھ منصرف ہونا ہے۔ اگر پیچھوں کا قطر ۳ انچ ہو تو تار کا کتنا طول درکار ہوگا۔

۱۶ — ایک تنگ پیچے دار کمانی $\frac{1}{4}$ انچ مربع فولاد کی بنی ہے اور اس میں دس مکمل پیچھے ۲ انچ اوسط قطر کے ہیں۔ اعظم بے خطر بوجھ اور انصراف معلوم کرو۔ (س = ۱۲ × ۱۰^6 پونڈ فی مربع انچ۔ اعظم بے خطر جزی زور ۵۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ)۔

۱۷ — گول فولادی تار کی ایک تنگ لپیٹی ہوئی مرغولی کمانی کا ضروری وزن معلوم کرو جو ۳ ٹن کے بے خطر بوجھ کو برداشت کرے اور ۱ انچ کا انصراف ہو۔ (س = ۵۲۰۰ ٹن فی مربع انچ۔ اعظم بے خطر زور ۲۵ ٹن فی مربع انچ۔ فولاد کا وزن ۲۸ء پونڈ فی مکعب انچ)۔

۱۸ — اگر گزشتہ سوال میں پیچھوں کا اوسط قطر ۵ انچ ہو تو ان کے گول تار کا طول اور قطر معلوم کرو۔

۱۹ — سوال ۱۴ کی کمانی کو مرغولے کے محور کے گرد ۳۰° مروڑنے کے لیے کتنا مروڑ کا معیار درکار ہوگا۔ (ی = ۳۰ × ۱۰^6 پونڈ فی مربع انچ)۔

۲۰ — ایک تنگ پیچے دار مرغولی کمانی کو مربع تراش کے فولاد سے بنانا ہے اور اس کو اس کے محور کے گرد ۵۰۰ پونڈ انچ کا انتہائی جفت برداشت کرنا

اور اس کے تحت ۴۰۰° میں مروڑا جاتا ہے۔ کمانی کو بنانے کے لیے تار کے ضروری طول اور موٹائی کا تخمینہ کرو۔ (سے = ۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ۔ خمائی کا زور ۶۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو)۔

۲۱ — ۴ انچ قطر کے ۱۰ مکمل لچھوں کی فولادی کمانیاں حسبِ ذیل تراشوں کی بنائی گئی ہیں: (۱) $\frac{1}{4}$ انچ قطر کی گول تراشش (۲) ناقصی تراش $\frac{1}{2}$ انچ × $\frac{1}{8}$ انچ، چھوٹا قطر لچھے کے محور سے نیم قطری سمت میں (۳) $\frac{1}{4}$ انچ مربع (۴) مستطیلی تراش $\frac{1}{2}$ انچ چوڑی اور $\frac{1}{8}$ انچ موٹی، موٹائی لچھے کے محور سے نیم قطری سمت میں۔ لچھے ہر صورت میں محور کے علی القوائم مستوی سے ۴۰° کا زاویہ بناتے ہیں۔ ہر صورت کے لیے ۱۲ پونڈ کے محوری بوجھ سے کھنچاؤ معلوم کرو۔ (س = ۱۲ × ۱۰^۶ اور سے = ۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ)۔

۲۲ — گزشتہ سوال میں کمانیوں کے آزاد سروں کی گردش معلوم کرو۔

۲۳ — سوال نمبر ۲۱ کی کمانیوں میں ۱۵ پونڈ انچ کی محوری پیچندگی کے تحت مروڑ معلوم کرو۔

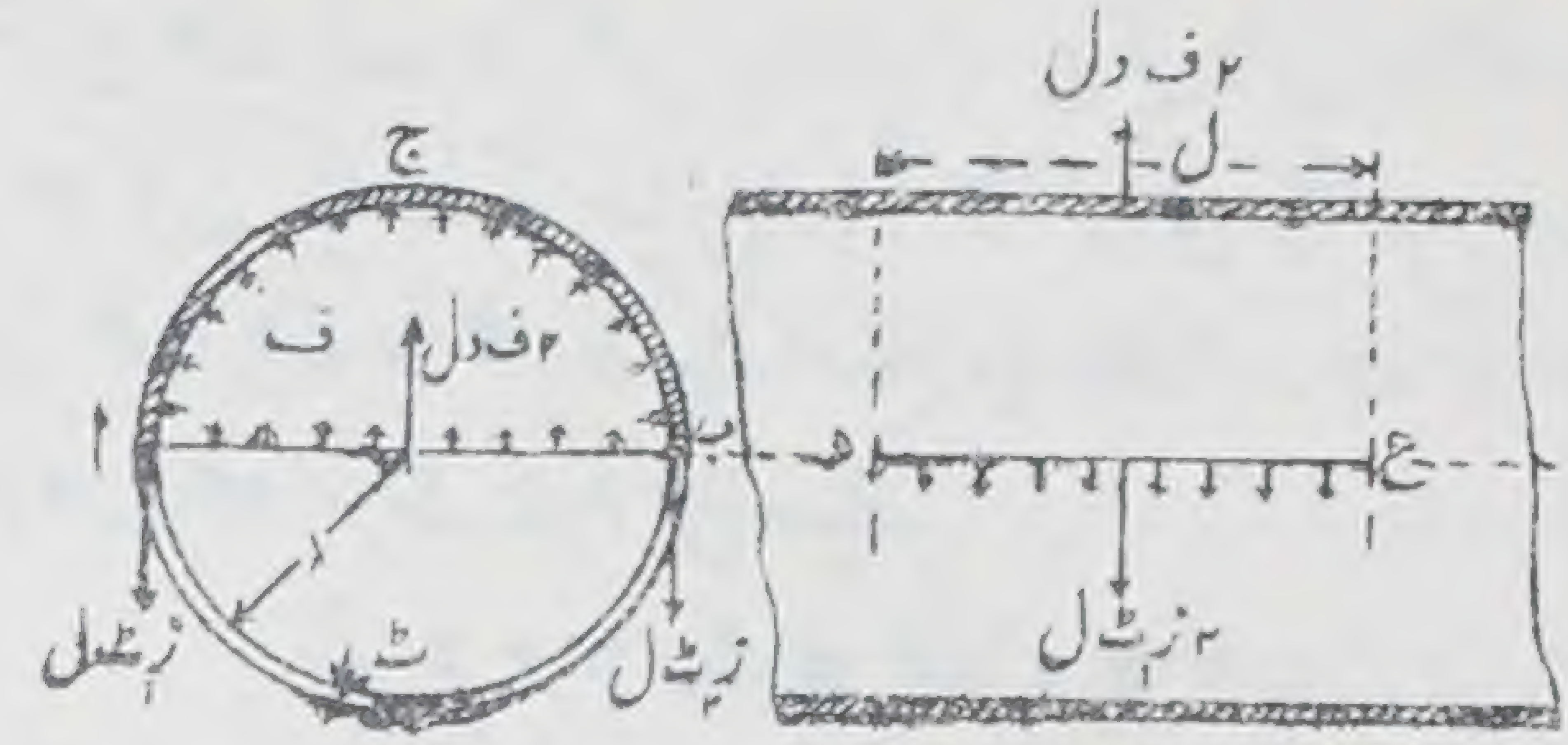
صفحہ ۳۲۷

گیارہواں باب

نل، اُستوانے اور قُرص

۱۱۹ـ پتلے اُستوانی خول میں اندرونی دباؤ ـ حلقہ تناؤ۔

اگر ایک بہت پتلی دیوار کے مدور اُستوانے یا نل میں ایک سیال دباؤ کے تحت ہو تو سیال کے وزن کو نظر انداز کرتے ہوئے اِس اُستوانے یا نل میں دیواروں پر یکساں عمادی دباؤ ہوگا اور اس کی وجہ سے دیوار کے مادے میں ایک تنشی زور عرضی تراش کے محیط کی مماسی سمتوں میں پیدا ہوگا۔ اس کو بالعموم محیطی تناؤ یا حلقہ تناؤ کہتے ہیں۔ حلقہ تناؤ کی حدت در اصل دیوار کی اندرونی جانب بیرونی جانب سے زیادہ ہوتی ہے (دیکھو دفعہ ۱۲۲)، لیکن اگر دیوار کی موٹائی خول کے قطر کے مقابلے میں خفیف ہو تو تناؤ کا تغیر قابلِ نظر اندازی ہوگا اور زور کو یکساں منقسم سمجھا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک پتلے بے جوڑ (یعنی جس میں جوڑ نہ ہوں) مُدور اُستوانے کا اندرونی نصف قطر ر (شکل ۱۵۶) اور نیم قطری موٹائی ٹ ہے اور اس پر ایک اندرونی دباؤ حدت ف کا ہے جس کی وجہ سے حلقہ تناؤ حدت ز کا پیدا ہوتا ہے۔ ایک نصف اُستوانہ ا ب ج کے تعادل پر غور کرو جس کا طول د ع یا ل ہے۔ چونکہ محور کے علی القوائم



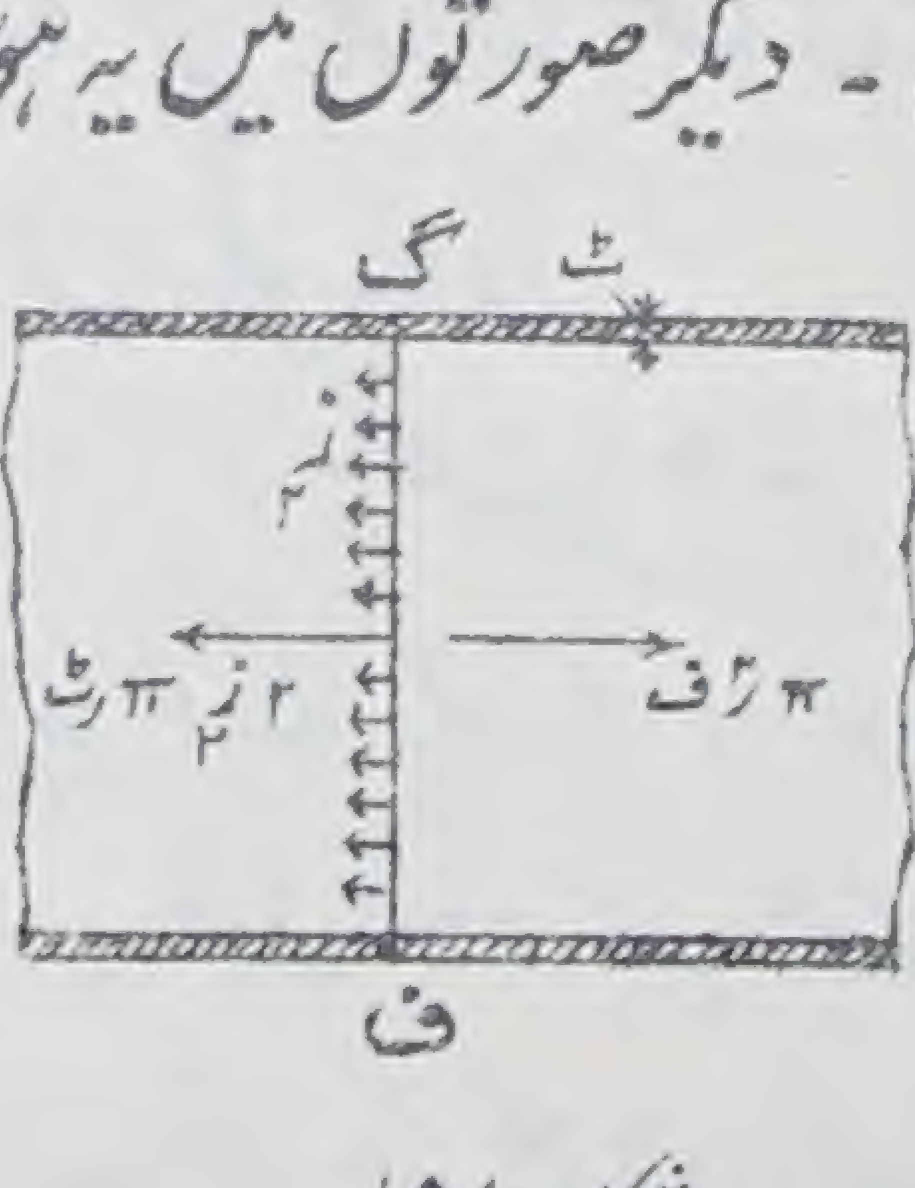
شکل ۱۵۶

مستویوں میں دیواروں پر کوئی جزی زور نہیں اس لیے قطری مستوی اب کے علی القوائم مجموعی حلقہ تناؤ ز × ٹ × ل اُسطوانے کے دونوں پہلوؤں میں ہونگے جیساکہ ا اور ب پر دکھایا گیا ہے - یہ منحنی سطح اج ب پر کے حاصل سیالی دباؤ کو عین تعادل میں رکھینگے - یہ حاصل دباؤ وہی ہوگا جو قطری مستوی اب پر ہے یعنی ف × ۲ رل - اس لیے

۲ ز × ل × ٹ = ۲ ف × ر × ل .... (۱)

اور $\text{ز} = \frac{\text{ف ر}}{\text{ٹ}}$ .... (۲)

طولی تناؤ — اُسطوانی خول کے سروں کو محور کے متوازی کسی طرح کے تھاموں کے ذریعے جوڑا جاسکتا ہے جو اندرونی سیالی دباؤ کے اس اقتضا کی کہ سروں کو علیحدہ کردے گا کاملاً یا جزوا مزاحمت کرتے ہیں اور اس طرح خول کے مادّے کے اندر طولی زور کو روک دیتے ہیں یا کم کردیتے ہیں - دیگر صورتوں میں یہ ہوسکتا ہے کہ سرے خول کے ساتھ ہی جوڑ دیے جائیں۔



شکل ۱۵۷

ایسی صورت میں خول میں حلقہ تناؤ ز کے علاوہ ایک طولی تناؤ بھی ہوگا جس کی حدت فرض کرو کہ ز۲ ہوگی - اگر اُسطوانے کے ایسے طول پر غور کیا جائے جس کے ایک سرے پر بند سرا ہو اور دوسرے سرے پر ایک عمادی

تراشی مستوی ف گ (شکل ۱۵۷) ہو تو اس حصے پر محوری سمت میں قوتیں دو ہیں ایک تو سیالی دباؤ کا محوری ترکیبی جو سرے کی شکل پر منحصر نہیں اور $\text{ف} \times \pi\, \text{ر}^{۲}$ کے مساوی ہے اور دوسرے مجموعی طولی تناؤ $\text{ز}_{۲} \times ۲\, \pi\, \text{ر}\, \text{ٹ}$۔ اس لیے

$$\text{ز}_{۲} \times ۲\, \pi\, \text{ر}\, \text{ٹ} = \text{ف} \times \pi\, \text{ر}^{۲} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

$$\text{ز}_{۲} = \frac{\text{ف}\, \text{ر}}{۲\, \text{ٹ}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

یہ حدت محیطی یا حلقہ تناؤ کی حدت کی ٹھیک ٹھیک نصف ہے یعنی

$$\text{ز}_{۲} = \frac{۱}{۲}\, \text{ز}_{۱} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

ان دو خاص زوروں $\text{ز}_{۱}$ اور $\text{ز}_{۲}$ کے علاوہ ایک تیسرا خاص زور نیم قطری دباؤ بھی ہے جو اندرونی پہلو پر ف ہے اور بیرونی جانب صفر ہے۔ پتلے خولوں میں اس زور کو $\text{ز}_{۱}$ اور $\text{ز}_{۲}$ کے مقابلے میں عموماً نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ محیطی فساد $\text{س}_{۱}$ دفعہ ۱۹ کی رو سے صریحاً حسبِ ذیل ہو گا:-

$$\text{س}_{۱} = \frac{\text{ز}_{۱}}{\text{ے}} - \frac{\text{ز}_{۲}}{\text{م}\, \text{ے}} = \frac{\text{ز}_{۱}}{\text{ے}} \left(۱ - \frac{۱}{۲\, \text{م}} \right) \text{ یا } \frac{\text{ف}\, \text{ر}}{\text{ٹ}\, \text{ے}} \left(۱ - \frac{۱}{۲\, \text{م}} \right)$$

جہاں $\frac{۱}{\text{م}}$ پوائی سن کی نسبت ہے اور ے راست یا کھنچاؤ کی لچک کا مقیاس ہے۔ اور

$$\text{ے}\, \text{س}_{۱} = \text{ز}_{۱} \left(۱ - \frac{۱}{۲\, \text{م}} \right) \text{ یا } \frac{\text{ف}\, \text{ر}}{\text{ٹ}} \left(۱ - \frac{۱}{۲\, \text{م}} \right) \qquad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

جو م = ۴ کے لیے $\frac{۷}{۸}\, \text{ز}_{۱}$ ہو جاتا ہے۔

طولی فساد $\text{س}_{۲}$ حسبِ ذیل ہو گا:-

$$\text{س}_{۲} = \frac{\text{ز}_{۲}}{\text{ے}} - \frac{\text{ز}_{۱}}{\text{م}\, \text{ے}} = \frac{\text{ز}_{۲}}{\text{ے}} \left(۱ - \frac{۲}{\text{م}} \right) \text{ یا } \frac{\text{ز}_{۱}}{\text{ے}} \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{\text{م}} \right) \text{ یا } \frac{\text{ف}\, \text{ر}}{۲\, \text{ٹ}\, \text{ے}} \left(۱ - \frac{۲}{\text{م}} \right)$$

$$\text{ے س}_{2} = \text{ز}_{2}\left(1 - \frac{2}{\text{م}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

جو م = ۴ کے لیے ½ ز۲ ہو جاتا ہے۔ لچکدار مضبوطی کا جو "اعظم فساد" کا نظریہ ہے (دیکھو دفعہ ۲۵) اس کی رُو سے ظاہر ہے کہ طولی زور سے خول کی محیطی سمت کی مضبوطی میں اضافہ ہوتا ہے۔

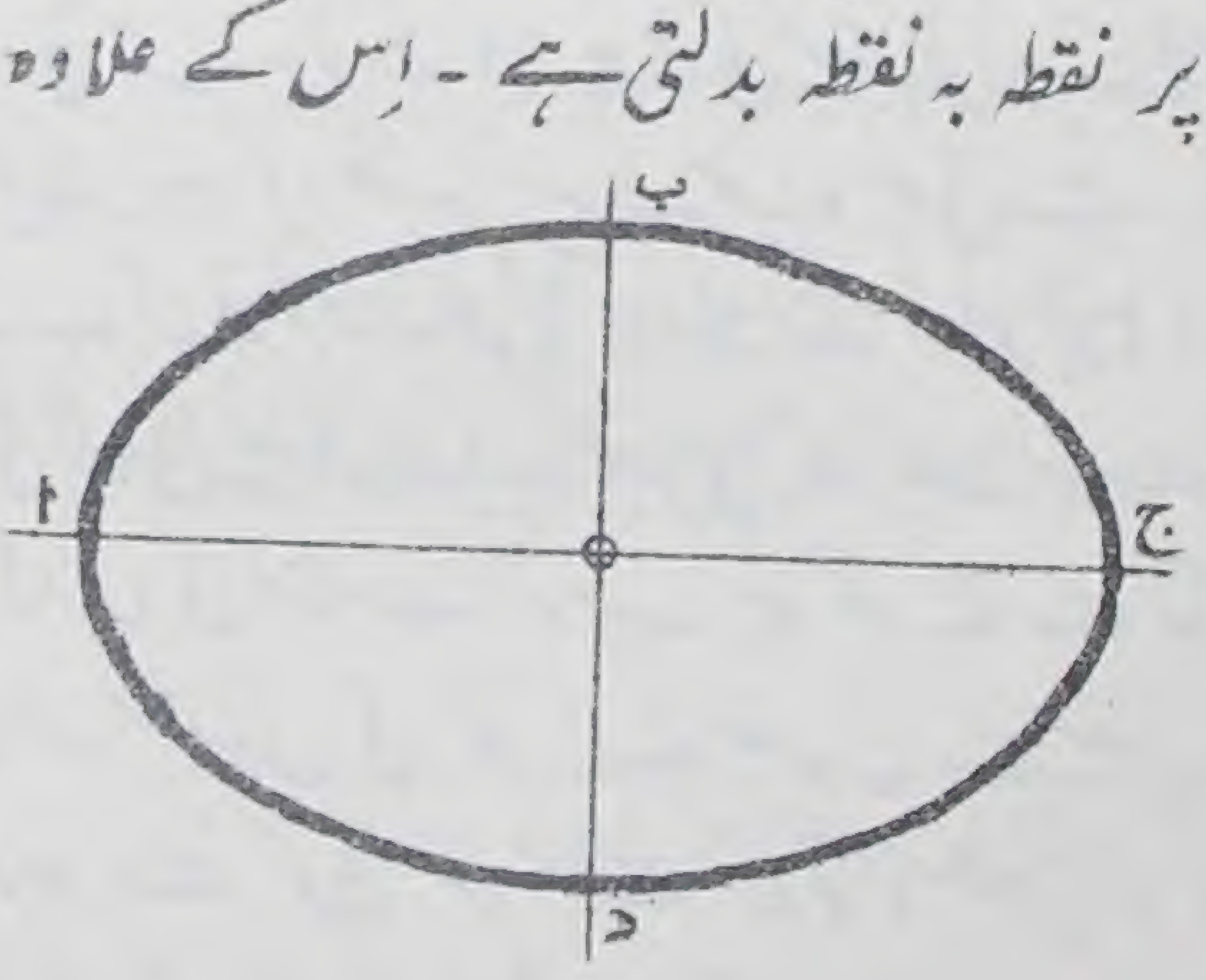
نصف قطر کا اضافہ محیط ہی کے اضافے کے تناسب (س۱) میں ہوگا اور گنجائش یعنی خول سے گھرے ہوئے حجم کا کسری اضافہ

$$= 2\text{س}_{1} + \text{س}_{2} \;\; \text{یا} \;\; \frac{\text{ف ر}}{\text{ط ے}}\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\text{م}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

لچکدار مضبوطی کے "اعظم جزی زور" یا "زور کے اعظم فرق" کے نظریے کی رُو سے اعظم اثر اس کے معادل ہوگا جو ایک سادہ تناؤ ز۱ - (- ف) = ز۱ + ف سے پیدا ہو اور (۲) سے

$$\text{ز}_{1} + \text{ف} = \text{ف}\left(\frac{\text{ر}}{\text{ط}} + 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

بیضوی اُستوانے — کسی بیضوی تراش کے، مثلاً ناقصی اُستوانے میں حلقہ تناؤ کی حدت محیط پر نقطہ بہ نقطہ بدلتی ہے۔ اِس کے علاوہ بیضوی تراش میں مدور بن جانے کا اقتضا ہوتا ہے اور وہ اس وجہ سے کہ ایک خماؤ کا معیار اقل انحنا کے نقاط (مثلاً ب اور د شکل ۱۵۸) کے نواح میں انحنا کو بڑھانا چاہتا ہے اور اعظم انحنا کے نقاط مثلاً ا اور ج کے نواح میں ایک مخالف علامت کا



شکل ۱۵۸

خاؤ کا معیار عمل کرتا ہے۔ ا اور ج پر حلقہ تناؤ بالکل (۱) اور (۲) کی طرح $\frac{\text{ف} \times \text{و}_{\text{ا}}}{\text{ٹ}}$ اور اسی طرح ب اور د پر $\frac{\text{ف} \times \text{و}_{\text{ب}}}{\text{ٹ}}$ ہوگا اور (۳) اور (۴) کی طرح طولی تناؤ

$$\text{ز}_{\text{۲}} = \frac{\text{ف} \times (\text{نل کا اندرونی رقبہ})}{\text{ٹ} \times (\text{نل کا محیط})}$$

خاؤ کے معیار ا، ب، ج اور د پر انتہائی قیمتوں کو پہنچتے ہیں اور ان چار نقاط پر متبادلاً مخالف علامت کے ہوتے ہیں اور ہر دو متصل نقاط کے درمیان صفر قیمت سے گزرتے ہیں۔ اس طرح کے نل یا استوانے کے محیط کے مختلف نقاط پر خاؤ کا معیار اور جزی قوت اور تناؤ معلوم کرنے کا ایک آسان ترسیمی قاعدہ مسٹر ولیسٹن نے رسالہ انجینیر (۲۳ ستمبر سنہ ۱۹۰۴ء) میں دیا ہے۔

۱۴۰۔ پتلے خولوں کے جوڑ۔ استوانی خول اکثر جوڑ دار ہوتے ہیں (مثلاً بڑے قطر کے نل اور بھاپ جوشارے) اور ایسی تختیوں پر مشتمل ہوتے ہیں جو صحیح نصف قطر پر مڑی ہوئی اور ریوٹ دار جوڑوں سے جڑی ہوئی ہوتی ہیں۔ ریوٹ دار جوڑ کی مضبوطی بہت صحت کے ساتھ محسوب نہیں ہوسکتی کیونکہ زور کی تقسیم بہت پیچیدہ ہوتی ہے۔ ریوٹوں اور تختیوں میں زور محسوب کرتے وقت عموماً اوسط زور مراد ہوتا ہے۔ ریوٹوں کے تناسبات اور اُن کی گھائی ہمیشہ صرف مضبوطی کے نقطۂ نظر سے نہیں مقرر کیے جاتے۔ ایسے جوڑوں کی مناسب ترتیب جو تجربے سے حاصل شدہ قواعد پر مبنی ہو تعمیروں اور مشینوں کی تجویز کے مضمون سے متعلق ہے۔ ریوٹ دار جوڑ میں رگڑ کی وجہ سے کوئی مزاحمت ہو تو اس کو نظر انداز کرتے ہوئے صفحہ ۳۴۳ اُس تختی کی جس میں ریوٹوں کے لیے سوراخ کیے گئے ہوں اقل تراش پر اوسط تنشی زور ٹھوس تختی کے زور سے اُسی نسبت میں زیادہ ہوگا جس نسبت میں ٹھوس تختی کی تراش سوراخ دار تختی کی

اقل تراشش سے تناؤ کی سمت کے علی القوائم سمت میں زیادہ ہے۔

اگر ایک اُستوانی خول میں جو ایک اندرونی دباؤ کے تحت ہو محیطی اور طولی جوڑ ہوں تو صریحاً تناؤ کی سمت کے علی القوائم تراشی رقبے کو محیطی جوڑوں میں طولی جوڑوں کی بہ نسبت زیادہ گھٹانے کی اجازت دی جاسکتی ہے کیونکہ محیطی جوڑ طولی تناؤ کی مزاحمت کرتے ہیں اور طولی جوڑ محیطی تناؤ کی جس کی حدت (ٹھوس تختی میں) طولی تناؤ سے دُگنی ہوتی ہے۔ اسی وجہ سے محیطی ریوٹ دار جوڑ طولی جوڑوں سے بہت کم استعداد کے رکھے جاتے ہیں۔ استعداد وہ نسبت ہے جو جوڑ کی مضبوطی کو بے جوڑ ٹھوس تختی کے مساوی عرض کی مضبوطی کے ساتھ ہو۔

مرغولی جوڑ۔۔۔ چونکہ ایک پتلے اُستوانی خول کا کم زور ترین حصہ طولی جوڑ ہوتا ہے اس لیے اندرونی دباؤ کے لحاظ سے اس کو اس طرح مضبوط کیا جاسکتا ہے کہ تمام طولی جوڑوں کو اُستوانے کے محور کے ساتھ مائل رکھا جائے۔ اگر اُستوانی سطح پر ایک مرغولے کا میلان عرضی تراش کے مستوی کے ساتھ طہ ہو، یا اُستوانے کے محور کے ساتھ ۹۰° - طہ ہو تو عمادی زور کی حدت مرغولے کے علی القوائم مساوات (۱) دفعہ ۱۵ کی رُو سے اور دفعہ ۱۲۰ کی ترقیم کے بموجب حسبِ ذیل ہوگی:-

$$\text{ز}_۲\,\text{جم}^۲\,\text{طہ} + \text{ز}_۱\,\text{جب}^۲\,\text{طہ} \quad \text{یا} \quad \text{ز}_۱\left(\tfrac{۱}{۲}\,\text{جم}^۲\,\text{طہ} + \text{جب}^۲\,\text{طہ}\right)$$

اور حاصل زور کی حدت جو مرغولے پر ترچھی ہوگی مساوات (۳) دفعہ ۱۵ کی رُو سے حسبِ ذیل ہوگی

$$\sqrt{\text{ز}_۱^۲\,\text{جم}^۲\,\text{طہ} + \text{ز}_۲^۲\,\text{جب}^۲\,\text{طہ}}$$

۱۲۱ - پتلا کروی خول اندرونی دباؤ کے ساتھ ۔۔۔

ایک قطری مستوی پر قوتیں وہی ہونگی جو اُستوانے میں اس کے

محور کے علی القوائم مستوی پر ہوتی ہیں، اور اگر کُرے کا نصف قطر ر ہو، اندرونی دباؤ کی حدت ف، خول کے اندر تناؤ کی حدت ز اور خول کی موٹائی ٹ ہو تو مساوات (۴۳) دفعہ ۱۱۹ کی طرح

$$ز \times ۲ \pi ر ٹ = ف \times \pi ر^{۲}$$

$$ز = \frac{ف ر}{۲ ٹ}$$

یہ زور کی حدت کُروی خول کے ہر مماس کی سمت میں ہوگی اور زور کا ناقص ایک دائرہ ہوگا - خول کے نیم قطری فشاری زور کو نظر انداز کریں تو صریحاً محیطی فساد

$$س = \frac{ز}{ے} \left(۱ - \frac{۱}{م} \right)$$

$$\text{اور} \quad ے س = ز \left(۱ - \frac{۱}{م} \right) = \frac{ف ر}{۲ ٹ} \left(۱ - \frac{۱}{م} \right)$$

نصف قطر کا کسری اضافہ س ہوگا اور گھرے ہوئے حجم کا ۳س صفحہ ۳۳۱

یا $\frac{۳}{۲} \frac{ف ر}{ے ٹ} \left(۱ - \frac{۱}{م} \right)$ ہوگا -

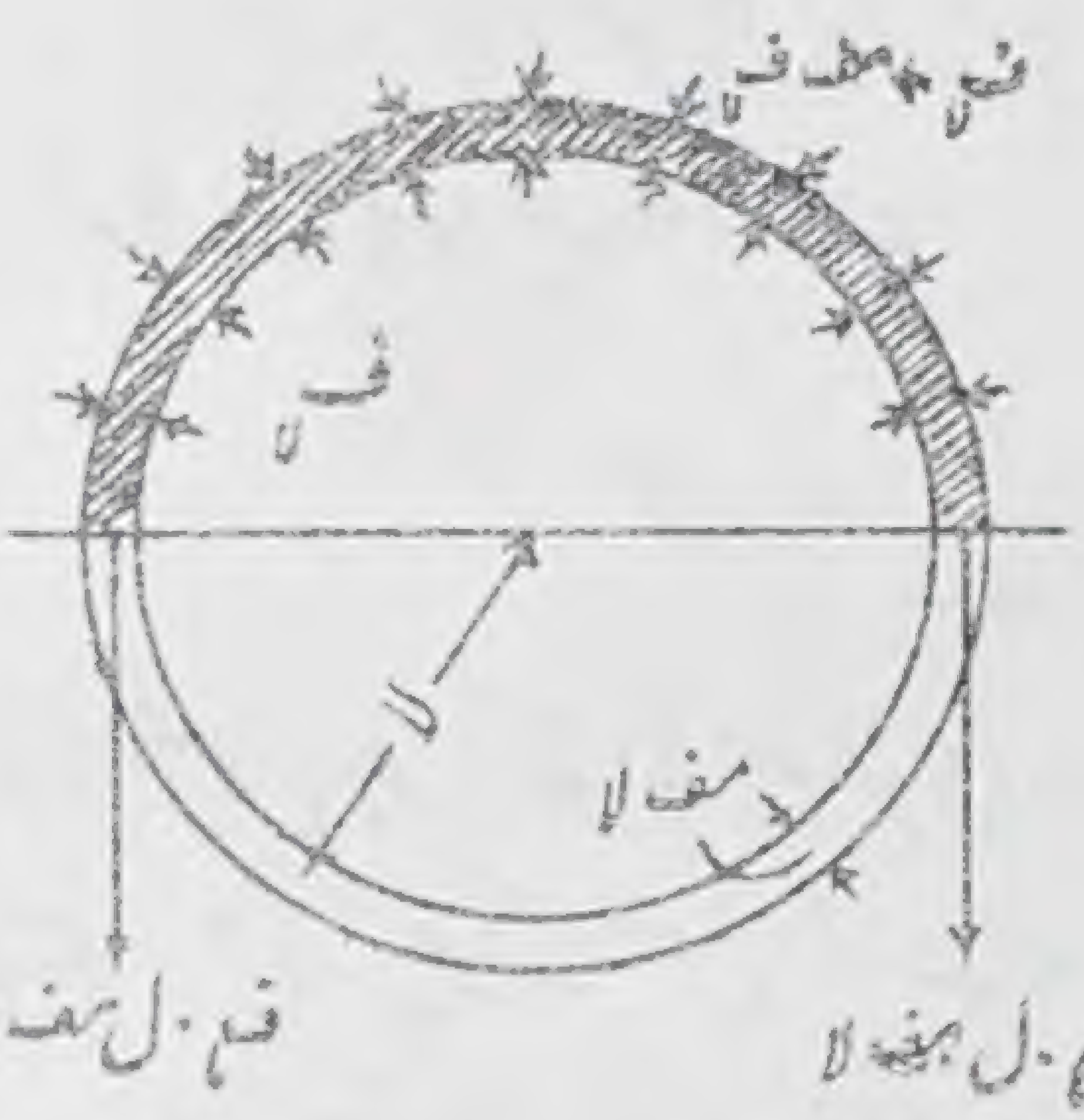
۱۲۲ - موٹا اُستوانہ سیالی دباؤ کے زیرِ عمل —

ایک موٹا اُستوانہ متجانس اور متساوی السموت شے کا بنا ہوا ہو تو اس کے اندر محیطی اور نیم قطری زور کی حدتیں چند سادہ مفروضوں کی مدد سے محسوب کی جاسکتی ہیں - ذیل کا نظریہ لامے[له] کا پیش کردہ ہے -

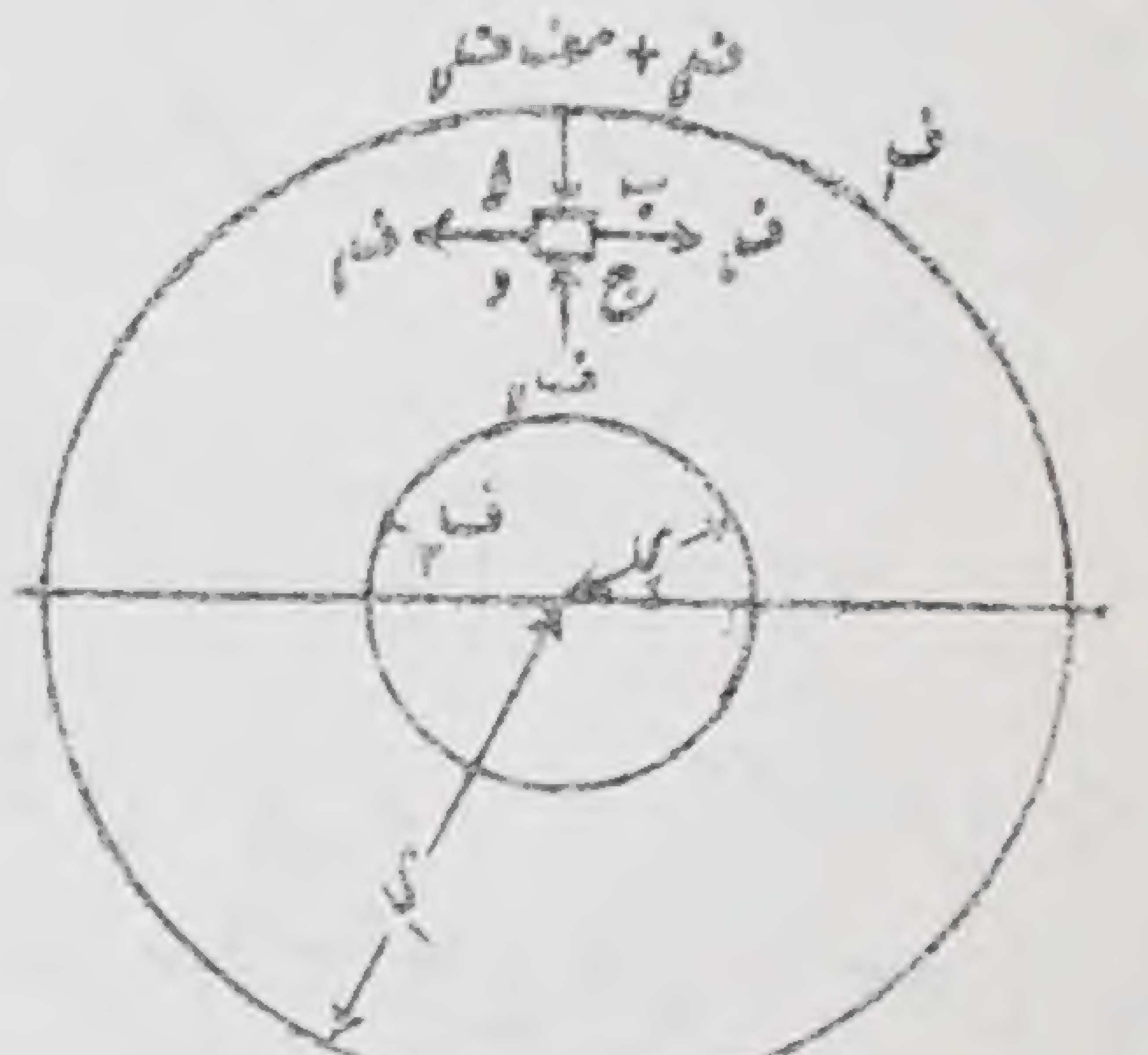
فرض کرو کہ اندرونی اور بیرونی قطر علی الترتیب $ر_{۲}$ اور $ر_{۱}$

له Lamé

ہیں (شکل ۱۵۹) ، اور اندرونی اور بیرونی دباؤں کی حدتیں ف۲ اور ف۱ ہیں۔ فرض کرو کہ کسی متغیر نصف قطر لا پر نیم قطری فشاری زور اور محیطی تناؤ کی حدتیں علی الترتیب ف لا اور ف ہا ہیں۔ تیسرا خاص زور اُستوانے کے محور کے متوازی ہوگا۔ تب نصف قطر لا اور موٹائی مف لا اور کسی طول ل کے ایک جہت پتلے اُستوانی حصے کے نصف کے تعادل پر غور کریں (شکل ۱۶۰) تو مساوات (ا) دفعہ ۱۱۹ کی طرح منحنی سطح پر باہر کی



شکل ۱۶۰



شکل ۱۵۹

طرف دباؤ یعنی اندرونی اور بیرونی جانبوں کا باہروار حاصل ایک قطری مستوی کے علی القوائم مجموعی حلقہ تناؤ کے مساوی ہونا چاہیے۔ یعنی

$$(\text{ف}_{\text{لا}} \times 2\,\text{لا}\,\text{ل}) - (\text{ف}_{\text{لا}} + \text{مف}\,\text{ف}_{\text{لا}})\,2\,(\text{لا} + \text{مف}\,\text{لا})\,\text{ل}$$
$$= 2\,\text{ف}_{\text{ہا}} \times \text{ل} \times \text{مف}\,\text{لا}$$

یا $$-\text{ف}_{\text{لا}} \times \text{مف}\,\text{لا} - \text{لا}\,\text{مف}\,\text{ف}_{\text{لا}} - \text{مف}\,\text{لا}\,\text{مف}\,\text{ف}_{\text{لا}} = \text{ف}_{\text{ہا}} \times \text{مف}\,\text{لا}$$

اور انتہا میں جب زیرِ غور حصے کی موٹائی بے انتہا کم ہو

$$\text{ف}_{\text{ہا}} = -\text{ف}_{\text{لا}} - \text{لا}\,\frac{\text{قر}\,\text{ف}_{\text{لا}}}{\text{قر}\,\text{لا}} = -\frac{\text{قر}}{\text{قر}\,\text{لا}}(\text{ف}_{\text{لا}} \times \text{لا}) \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$\text{ف}_{\text{لا}}$ اور $\text{ف}_{\text{ہا}}$ کے درمیان ایک اور ربط ایک مفروضے پر مبنی ہے جو طولی فسادوں کے متعلق اختیار کیا گیا ہے۔ وہ مفروضہ یہ ہے کہ مستوی عرضی تراشیں دباؤ کے تحت مستوی رہتی ہیں۔ یہ مفروضہ سروں سے کافی فاصلے پر تقریباً صحیح ہونا چاہیے پھر خواہ سرے کسی طرح سے سہارے گئے ہوں بلکہ آزاد ہی کیوں نہ ہوں۔ اس مفروضے کی رُو سے کسی تراش کے اندر ہر نقطے پر طولی فساد مستقل ہونا چاہیے یعنی لا پر منحصر نہیں ہونا چاہیے۔ اب اگر طولی زور یکساں منقسم ہو اور اس کی حدت $\text{ز}_{\text{ا}}$ ہو (جو فرض کرو کہ تنشی ہے) اور محور سے فاصلہ لا پر کسی نقطے پر طولی فساد س ہو تو دفعہ ۱۹ سے صفحہ ۲۳۲

$$\text{س} = \frac{1}{\text{ہے}}\left(\text{ز}_{\text{ا}} - \frac{\text{ف}_{\text{ہا}} - \text{ف}_{\text{لا}}}{\text{م}}\right)$$

اگر تراشیں جو ابتداءً مستوی ہوں مستوی رہیں تو اس کو مستقل ہونا چاہیے۔ اور چونکہ س، ہے، $\text{ز}_{\text{ا}}$ اور م مستقل ہیں اس لیے $\text{ف}_{\text{ہا}} - \text{ف}_{\text{لا}}$ مستقل ہونا چاہیے۔ اس لیے فرض کرو کہ

$$\text{ف}_{\text{ہا}} - \text{ف}_{\text{لا}} = 2\,\text{ا} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(۱) سے $\text{ف}_{\text{ہا}}$ کی قیمت لے کر (۲) میں درج کرنے سے

$$-2\,\text{ف}_{\text{لا}} - \text{لا}\,\frac{\text{فرف}_{\text{لا}}}{\text{فرلا}} = 2\,\text{ا}$$

$$\frac{\text{فرف}_{\text{لا}}}{\text{ف}_{\text{لا}} + \text{ا}} = -\frac{2\,\text{فرلا}}{\text{لا}}$$

تکمل کرنے سے $\text{لوگ}\,(\text{ف}_{\text{لا}} + \text{ا}) = -\,\text{لوگ}\,\text{لا}^2 + \text{مستقل}$

یا $\text{ف}_{\text{لا}} + \text{ا} = \frac{\text{ب}}{\text{لا}^2}$

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{\text{ب}}{\text{لا}^2} - \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

جہاں ا اور ب مستقل ہیں جن کو معلومہ اندرونی اور بیرونی نیم قطری دباؤ اور نصف قطر کے ذریعے معلوم کرنا ہوگا - نیز (۲) سے

$$\text{ف}_{\text{ہا}} = \frac{\text{ب}}{\text{لا}^2} + \text{ا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

عددی سوالات کے حل کرنے کے لیے مساواتیں (۳) اور (۴) سہل ترین ضابطے ہیں - اب شکل ۱۵۹ کی مدد سے یہ شرائط درج کریں کہ لا = $\text{ر}_{\text{ا}}$ پر $\text{ف}_{\text{ہا}} = \text{ف}_{\text{ا}}$ اور لا = $\text{ر}_{۲}$ پر $\text{ف}_{\text{لا}} = \text{ف}_{۲}$ تو

$$\text{ب} = \frac{\text{ر}_{\text{ا}}^2\,\text{ر}_{۲}^2}{\text{ر}_{\text{ا}}^2 - \text{ر}_{۲}^2}\left(\text{ف}_{۲} - \text{ف}_{\text{ا}}\right)$$

اور
$$\text{ا} = \frac{\text{ف}_{۲}\,\text{ر}_{۲}^2 - \text{ف}_{\text{ا}}\,\text{ر}_{\text{ا}}^2}{\text{ر}_{\text{ا}}^2 - \text{ر}_{۲}^2}$$

ان کو (۳) اور (۴) میں درج کرنے سے عام ترین جملے حاصل ہونگے -

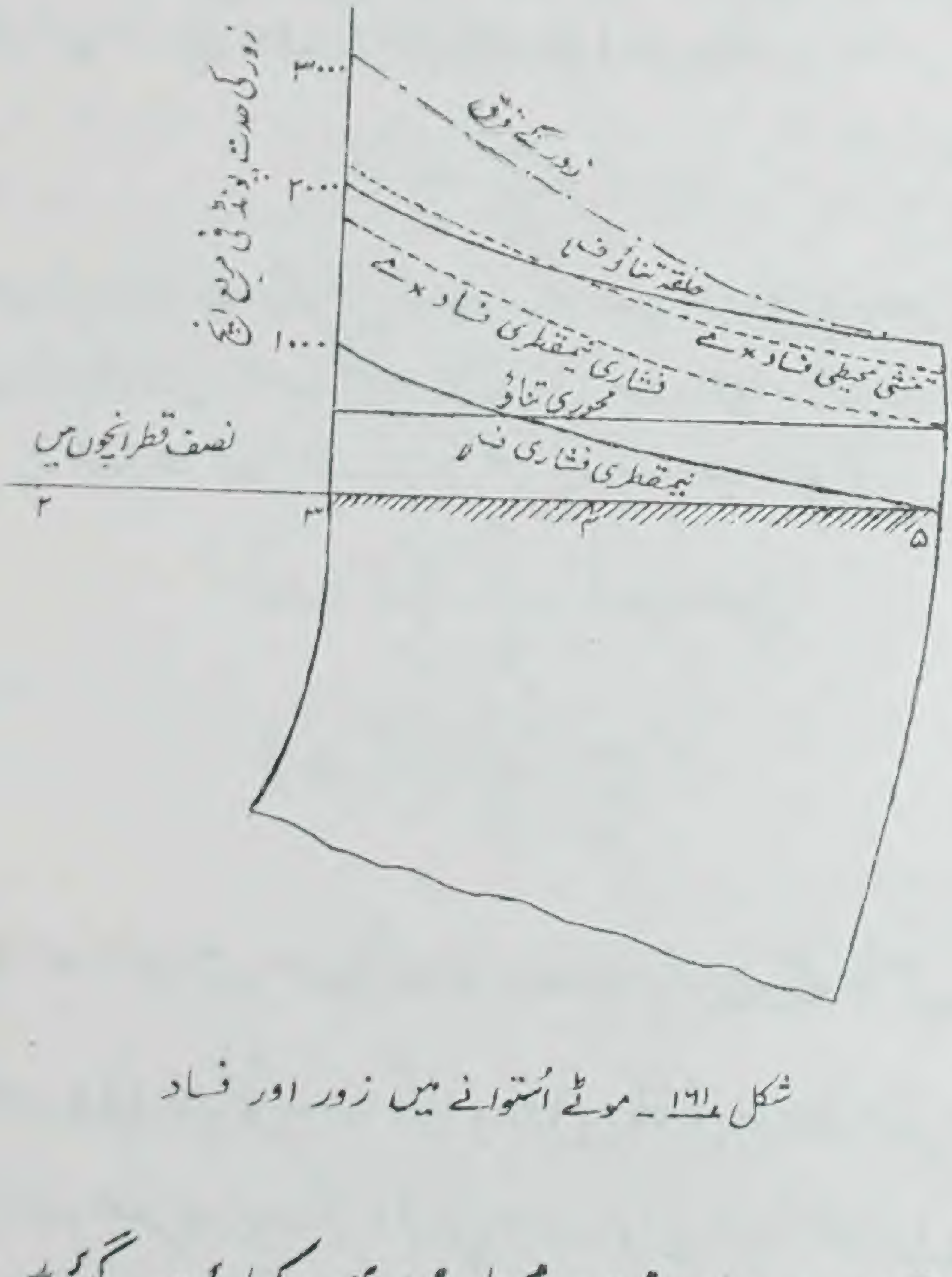
اندرونی دباؤ — اگر اندرونی دباؤ کی حدت $\text{ف}_{۲}$ ہو، اور بیرونی دباؤ $\text{ف}_{\text{ا}}$ صفر ہو جیسا کہ ماقوائی صدر نلوں اور اُستوانوں، وغیرہ میں ہوتا ہے تو (۳) سے

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{\text{ر}_{\text{ا}}^2\,\text{ر}_{۲}^2}{\text{ر}_{\text{ا}}^2 - \text{ر}_{۲}^2} \times \frac{\text{ف}_{۲}}{\text{لا}^2} - \frac{\text{ف}_{۲}\,\text{ر}_{۲}^2}{\text{ر}_{\text{ا}}^2 - \text{ر}_{۲}^2}$$

$$= \text{ف}_{۲}\,\frac{\text{ر}_{۲}^2}{\text{ر}_{\text{ا}}^2 - \text{ر}_{۲}^2}\left(\frac{\text{ر}_{\text{ا}}^2}{\text{لا}^2} - ۱\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

$$\text{ف}_{\text{ہا}} = \text{ف}_{۲}\,\frac{\text{ر}_{۲}^2}{\text{ر}_{\text{ا}}^2 - \text{ر}_{۲}^2}\left(\frac{\text{ر}_{\text{ا}}^2}{\text{لا}^2} + ۱\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

کسی دی ہوئی صورت میں نیم قطری فشاری زور ف‌ا اور حلقہ تناؤ ف‌ا کس طرح بدلتے ہیں یہ شکل ۱۶۱ میں دکھایا گیا ہے (دیکھو ذیل کی مثال ۳)



شکل ۱۶۱ - موٹے اُستوانے میں زور اور فساد

جس میں نیم قطری اور حلقہ فساد یا محیطی فساد بھی دکھائے گئے ہیں جن کو اعظم فساد کے نظریے، (دفعہ ۲۵) کی رُو سے لچکدار مضبوطی کا ایک ناپ سمجھنا چاہیے - شکل ۱۶۱ میں فسادوں کے حساب میں یہ مانا گیا ہے کہ اُستوانے کی دیواریں اندرونی دباؤ کی وجہ سے سروں پر جو دھکیل ہے اُس کو ایک یکساں منقسم تنشی زور کے طور پر برداشت کرتی ہیں - زور کی اعظم حدت اُستوانے کی اندرونی سطح کا حلقہ تناؤ ہے جہاں صفحہ ۳۳۳

لا = ہا اور یہ حدت حسبِ ذیل ہے :-

$$\text{ف}_{\text{ہ}} = \text{ف}_{۲} \frac{\text{ر}_{۱}^{۲} + \text{ر}_{\text{ہ}}^{۲}}{\text{ر}_{۱}^{۲} - \text{ر}_{۲}^{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

خاص زوروں کا اعظم جبری فرق بھی شکل ۱۶۱ میں دکھایا گیا ہے۔ لچکدار مضبوطی کے "اعظم جبری زور" والے نظریے (دفعہ ۲۵) کی رو سے "زور کے فرق" کی اعظم قیمت ہی سے لچکدار ناکارگی کا تعین ہوگا۔ اس جبری فرق کی قیمت (۵) اور (۶) سے حسب ذیل ہے:—

$$\text{ف}_{\text{ہ}} + \text{ف}_{\text{لا}} = \frac{۲\,\text{ف}_{۲}\,\text{ر}_{۱}^{۲}\,\text{ر}_{۲}^{۲}}{(\text{ر}_{۱}^{۲} - \text{ر}_{۲}^{۲})\,\text{لا}^{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷\ \text{ا})$$

اور اس کی اعظم قیمت اندرونی سطح پر

$$\text{ف}_{\text{ہ}} + \text{ف}_{۲} = \frac{۲\,\text{ف}_{۲}\,\text{ر}_{۱}^{۲}}{(\text{ر}_{۱}^{۲} - \text{ر}_{۲}^{۲})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷\ \text{ب})$$

اگر طولی زور ز صفر ہو تو اعظم حلقہ زور کی سمت میں واقع ہونے والے صفحہ ۳۳۴
اعظم فساد کا معادل زور حسب ذیل ہوگا:—

$$\text{ے}\,\text{س}_{\text{ہ}} = \text{ف}_{۲} \left(\frac{\text{ر}_{۱}^{۲} + \text{ر}_{۲}^{۲}}{\text{ر}_{۱}^{۲} - \text{ر}_{۲}^{۲}} + \frac{۱}{\text{م}} \right) \ \text{یا}$$

$$\text{ف}_{۲} \left\{ \frac{\text{ر}_{۱}^{۲}(\text{م}+۱) + \text{ر}_{۲}^{۲}(\text{م}-۱)}{\text{م}\,(\text{ر}_{۱}^{۲} - \text{ر}_{۲}^{۲})} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$

جو قیمت (۷) سے زیادہ ہے اور جو م = ۴ کے لیے حسب ذیل شکل اختیار کرتا ہے:—

$$\frac{\text{ف}_{۲}\left(\frac{۵}{۴}\,\text{ر}_{۱}^{۲} + \frac{۳}{۴}\,\text{ر}_{۲}^{۲}\right)}{\text{ر}_{۱}^{۲} - \text{ر}_{۲}^{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۹)$$

اگر اُستوانے کی دیواریں سروں کا دباؤ $\pi\,\text{نق}_1^2\,\text{ف}_1$ برداشت کریں تو ز کو یکساں تناؤ ماننے سے $\text{ز}_1 = \text{ف}_1\,\text{نق}_1^2 \div (\text{نق}_2^2 - \text{نق}_1^2)$ اور اس صورت میں اندرونی سطح پر دفعہ ۱۹ کی رُو سے

$$\text{س}_{\text{نق}_1} = \text{ف}_1 \left\{ \text{نق}_2^2 (\text{م}+1) + \text{نق}_1^2 (\text{م}-2) \right\} \div \text{م} (\text{نق}_2^2 - \text{نق}_1^2) \quad \ldots\ldots (10)$$

جو (۸) سے کم ہے۔

بیرونی دباؤ — اگر بیرونی دباؤ ف_1 ہو اور اندرونی دباؤ ف_2 صفر ہو تو مستقلوں ا اور ب کی معلوم شدہ قیمتیں استعمال کرنے سے

$$\text{ف}_{\text{لا}} = -\frac{\text{ف}_1}{\text{لا}^2}\left(\frac{\text{نق}_1^2\,\text{نق}_2^2}{\text{نق}_1^2 - \text{نق}_2^2}\right) + \text{ف}_1 \frac{\text{نق}_1^2}{\text{نق}_1^2 - \text{نق}_2^2}$$

$$= \text{ف}_1 \frac{\text{نق}_1^2}{\text{نق}_1^2 - \text{نق}_2^2}\left(1 - \frac{\text{نق}_2^2}{\text{لا}^2}\right) \quad \ldots\ldots (11)$$

$$\text{ف}_{\text{ہ}} = -\text{ف}_1 \frac{\text{نق}_1^2}{\text{نق}_1^2 - \text{نق}_2^2}\left(1 + \frac{\text{نق}_2^2}{\text{لا}^2}\right) \quad \ldots\ldots (12)$$

منفی علامت سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ محیطی زور $\text{ف}_{\text{ہ}}$ اس صورت میں فشاری ہے۔ اس کی اعظم قیمت $\text{لا} = \text{نق}_2$ پر ہوتی ہے اور حسبِ ذیل ہوتی ہے:-

$$\text{ف}_{\text{ہ}} = -2\,\text{ف}_1\,\text{نق}_1^2 \div (\text{نق}_1^2 - \text{نق}_2^2) \quad \ldots\ldots (13)$$

زور کا فرق حسبِ ذیل ہے:-

$$\text{ف}_{\text{ہ}} + \text{ف}_{\text{لا}} = -2\,\text{ف}_1\,\text{نق}_1^2\,\text{نق}_2^2 \div (\text{نق}_1^2 - \text{نق}_2^2)\,\text{لا}^2 \quad \ldots\ldots (14)$$

جس کی اعظم قیمت وہی ہے جو (۱۳) میں دی گئی ہے اور $\text{لا} = \text{نق}_2$ ہی پر ہوتی ہے۔

آیندہ استعمال کے لیے یہ معلوم رکھنا بھی مفید ہوگا کہ بیرونی دباؤ کی

صورت میں ہر جگہ

$$ف_ا = - ف_ل (لا^۲ + مر_۲^۲) \div (لا^۲ - مر_۲^۲)$$

۱۲۲ (- نلوں اور اُستوانوں کے ابعاد — تجرباتی نتائج —

اندرونی دباؤ کے زیرِ عمل پتلی اور موٹی دیواروں کے نلوں کی لچکدار مضبوطیاں اس امر کی نمایاں مثالیں ہیں کہ لچکدار مضبوطی کے جو مختلف نظریے ہیں (دفعہ ۲۵) اُن میں سے ہر ایک کس نتیجے کی طرف رہبری کرتا ہے تقسیم اور مقدار کا فرق شکل ۱۶۱ میں دکھایا گیا ہے۔ ایک دیے ہوئے اندرونی دباؤ کے لیے دیوار کی موٹائی اور نل کے قطر کی بے خطر نسبت ایک دی ہوئی شے کے لیے اعظم خاص زور، اعظم خاص فساد، یا زور کے اعظم فرق (اور اس طرح اعظم جزی زور) کی قیمت پر منحصر ہوگی۔ یہ سب دیوار کے اندرونی پہلو پر اعظم ہونگے۔ مضبوطی کے جو تین نظریے ہیں اُن کا نلوں پر اطلاق سمجھنے کے لیے مناسب ہے کہ دفعہ ۱۲۲ میں اندرونی پہلو کے لیے جو نتائج دیے گئے ہیں اُن کو ایسی شکل میں بیان کیا جائے جس سے مقابلے میں آسانی ہو۔ فرض کرو کہ ف = اندرونی دباؤ، یا $ف_۲$ کی وہ قیمت جو لچکدار ناکارگی پیدا کرنے کے لیے عین ضروری ہو۔ فرض کرو کہ ٹ = دیوار کی موٹائی $= مر_۱ - مر_۲$ اور ق = اندرونی قطر = ۲ $مر_۲$ اور فرض کرو کہ $\frac{مر_۱}{مر_۲}$ یا صفحہ ۳۳۵

$$\frac{ق + ۲ ٹ}{ق} = ک \text{ اور } \frac{ٹ}{ق} = ع = \frac{۱}{۲}(ک - ۱)$$

اعظم خاص زور — فرض کرو کہ ز = اعظم بے خطر خاص زور = $ف_ا$ کی قیمت لچکدار ناکارگی پر۔ تب مساوات (۷) دفعہ ۱۲۲ حسبِ ذیل ہو جائیگی :—

$$\text{ز} = \text{ف}\,\frac{\text{ک}^{2}+1}{\text{ک}^{2}-1} \quad \cdots\cdots (1)$$

اور

$$\frac{\text{ف}}{\text{ز}} = \frac{\text{ک}^{2}-1}{\text{ک}^{2}+1} \;\text{یا}\; \frac{2\,\text{عہ}\,(\text{عہ}+1)}{1+2\,\text{عہ}+2\,\text{عہ}^{2}} \quad \cdots\cdots (2)$$

نیز

$$\text{ک} = \sqrt{\frac{1+\frac{\text{ف}}{\text{ز}}}{1-\frac{\text{ف}}{\text{ز}}}} \;\text{یا}\; \sqrt{\frac{\text{ز}+\text{ف}}{\text{ز}-\text{ف}}} \quad \cdots\cdots (3)$$

اور

$$\text{عہ یا } \frac{\text{ٹ}}{\text{ق}} = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{1+\frac{\text{ف}}{\text{ز}}}{1-\frac{\text{ف}}{\text{ز}}}} - 1\right\} \;\text{یا}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{\text{ز}+\text{ف}}{\text{ز}-\text{ف}}} - 1\right\} \quad \cdots\cdots (4)$$

یہ دی ہوئی شرائط کی مناسبت سے موزوں ابعاد معلوم کرنے کے لیے مساواتوں کی بہترین شکلیں ہیں -

اعظم خاص فساد —— فرض کرو کہ زَ = اعظم ''معادل'' بے خطر زور یعنی سے × اعظم خاص فساد یا سے × س کی قیمت لچکدار ناکارگی پر - تب اس صورت کے لیے کہ نل کو طولی زور برداشت کرنا نہ پڑے مساوات (۸) دفعہ ۱۲۲ حسب ذیل ہوگی :-

$$\text{زَ} = \text{ف}\left\{\frac{\text{ک}^{2}(\text{م}+1)+(\text{م}-1)}{\text{م}\,(\text{ک}^{2}-1)}\right\} \quad \cdots\cdots (5)$$

اور

$$\frac{\text{ف}}{\text{زَ}} = \frac{\text{م}\,(\text{ک}^{2}-1)}{\text{ک}^{2}(\text{م}+1)+(\text{م}-1)} \;\text{یا}\; \frac{2\,\text{م}\,\text{عہ}\,(1+\text{عہ})}{\text{م}+2\,\text{عہ}\,(1+\text{عہ})(\text{م}+1)} \quad \cdots\cdots (6)$$

نیز $\text{ک} = \sqrt{\dfrac{1 + \frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1 - \frac{1}{\text{م}}\right)}{1 - \frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)}}$ یا $\sqrt{\dfrac{\text{زَ} + \text{ف}\left(1 - \frac{1}{\text{م}}\right)}{\text{زَ} - \text{ف}\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)}}$ ....(۷)

اور عہ یا $\dfrac{\text{ٹ}}{\text{ق}}$

$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\dfrac{1 + \frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1 - \frac{1}{\text{م}}\right)}{1 - \frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)}} - 1\right\}$ یا $\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\dfrac{\text{زَ} + \text{ف}\left(1 - \frac{1}{\text{م}}\right)}{\text{زَ} - \text{ف}\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)}} - 1\right\}$ ....(۸)

اگر نل سرے کے دباؤ $\frac{\pi}{4}$ ق^2 ف سے پیدا ہونے والے پورے طولی تناؤ کو برداشت کرے تو مساوات (۱۰) دفعہ ۱۲۲ حسب ذیل ہوگی:-

$\text{زَ} = \text{ف}\left\{\dfrac{\text{ک}^2(\text{م}+1) + \text{م} - 2}{\text{م}(\text{ک}^2 - 1)}\right\}$ ....(۹)

صفحہ ۳۳۶ اور $\dfrac{\text{ف}}{\text{زَ}} = \dfrac{\text{م}(\text{ک}^2 - 1)}{\text{ک}^2(\text{م}+1) + \text{م} - 2}$ یا $\dfrac{4\,\text{م}\,\text{عہ}(1 + \text{عہ})}{2\text{م} - 1 + 4\,\text{م}\,\text{عہ}(1 + \text{عہ})(\text{م} + 1)}$ .....(۱۰)

نیز $\text{ک} = \sqrt{\dfrac{1 + \frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1 - \frac{2}{\text{م}}\right)}{1 - \frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)}}$ یا $\sqrt{\dfrac{\text{زَ} + \text{ف}\left(1 - \frac{2}{\text{م}}\right)}{\text{زَ} - \text{ف}\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)}}$ ....(۱۱)

اور عہ یا $\dfrac{\text{ٹ}}{\text{ق}}$

$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\dfrac{1 + \frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1 - \frac{2}{\text{م}}\right)}{1 - \frac{\text{ف}}{\text{زَ}}\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)}} - 1\right\}$ یا $\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\dfrac{\text{زَ} + \text{ف}\left(1 - \frac{2}{\text{م}}\right)}{\text{زَ} - \text{ف}\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)}} - 1\right\}$ ....(۱۲)

زور کا اعظم فرق —— فرض کرو کہ زً = زور کا اعظم بے خطر

جبری فرق یعنی $\text{ض}_{\text{ما}} + \text{ف}_{۲}$ کی وہ قیمت جو لچکدار ناکارگی کے لیے ضروری ہو۔ تب مساوات (۷ ب) دفعہ ۱۳۲ حسبِ ذیل ہوگی :-

$$\text{ز}'' = \text{ف}\,\frac{۲\text{ک}^{۲}}{\text{ک}^{۲} - ۱} \qquad \text{(۱۳)}$$

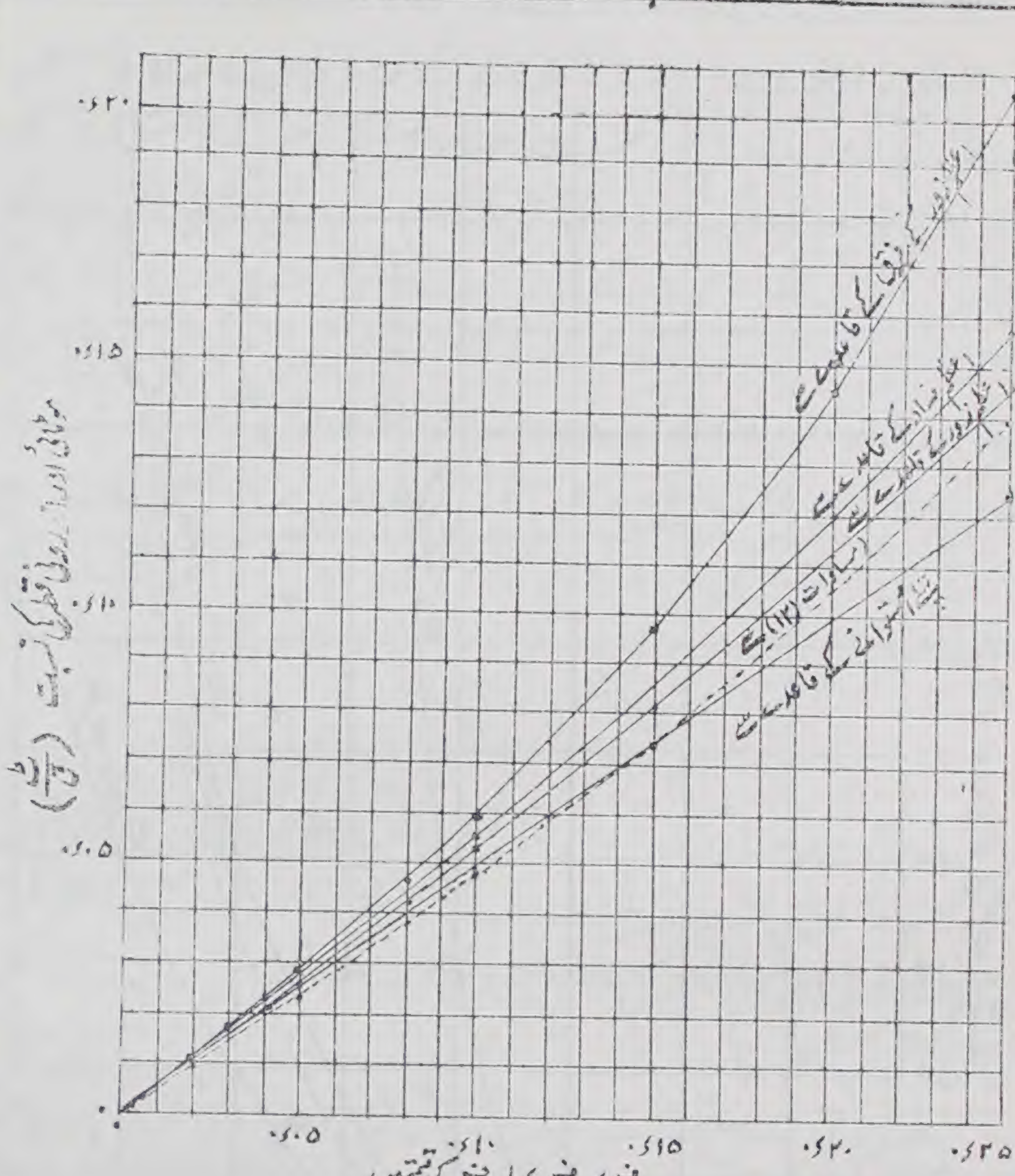
$$\text{اور}\quad \frac{\text{ف}}{\text{ز}''} = \frac{\text{ک}^{۲} - ۱}{۲\text{ک}^{۲}} \quad \text{یا} \quad \frac{۲\,\text{عہ}\,(۱ + \text{عہ})}{۱ + ۴\,\text{عہ} + ۴\,\text{عہ}^{۲}} \qquad \text{(۱۴)}$$

$$\text{نیز}\quad \text{ک} = \sqrt{\frac{۱}{۱ - ۲\frac{\text{ف}}{\text{ز}''}}} \quad \text{یا} \quad \sqrt{\frac{\text{ز}''}{\text{ز}'' - ۲\text{ف}}} \qquad \text{(۱۵)}$$

$$\text{اور عہ یا}\quad \frac{\text{ٹ}}{\text{ق}} = \frac{۱}{۲}\left\{\sqrt{\frac{۱}{۱ - ۲\frac{\text{ف}}{\text{ز}''}}} - ۱\right\} \qquad \text{(۱۶)}$$

$\frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}$ کی قیمتیں $\frac{\text{ف}}{\text{ز}}$، $\frac{\text{ف}}{\text{ز}'}$ یا $\frac{\text{ف}}{\text{ز}''}$ کی دی ہوئی قیمتوں کے لیے مساواتوں (۴)، (۸)، (۱۲) اور (۱۶) کے مطابق شکل ۱۶۱ الف میں دکھائی گئی ہیں اور زیادہ موٹے استوانوں کے لیے بھی شکل ۱۶۱ ب میں دکھائی گئی ہیں۔ م کی قیمت ۴ لی گئی ہے۔ اگر اندرونی دباؤ ف دیا ہوا ہو اور اعظم زور یا اعظم کامی معادل زور ز یا ز'' دیا گیا ہو (جو ممکن ہے کہ کسی مناسب نسبت میں گھٹا ہوا ہو) تو ان نقشوں سے نل کی مطلوبہ موٹائی اندرونی قطر کی رقوم میں آسانی سے پڑھ لی جا سکتی ہے۔ یا متبادلاً اگر نل دیا ہوا ہو تو زور یا "معادل زور" کی ایک مختص اعظم قیمت کے لیے بے خطر اندرونی سیالی دباؤ کی قیمت یا مختص سیالی دباؤ کے لیے زور وغیرہ پڑھ لیے جا سکتے ہیں۔ نقطہ دار خطوط ہر صورت میں مساوات (۱۲) کو تعبیر کرتے ہیں جہاں کہ محیطی فساد طولی زور کی وجہ سے گھٹ گیا ہے۔ یہ اثر پتلی دیوار کے نلوں میں بہت نمایاں ہوتا ہے اور قطر کے تناسب سے موٹائی کے بڑھنے سے یہ اثر کم ہوتا ہے۔

ایک پتلے استوانی نل یا خول کے لیے (۴)، (۸)، (۱۲) اور (۱۶) صفحہ ۳۳۷
کے متناظر حسبِ ذیل قاعدے حاصل ہوں گے :-



$\frac{ف}{ز}$، $\frac{ف}{ز}$، یا $\frac{ف}{ز}$ کی قیمتیں

شکل ۱۶۱ ا ۔ اندرونی دباؤ کے تحت اُستوانوں کی لچکدار مضبوطی

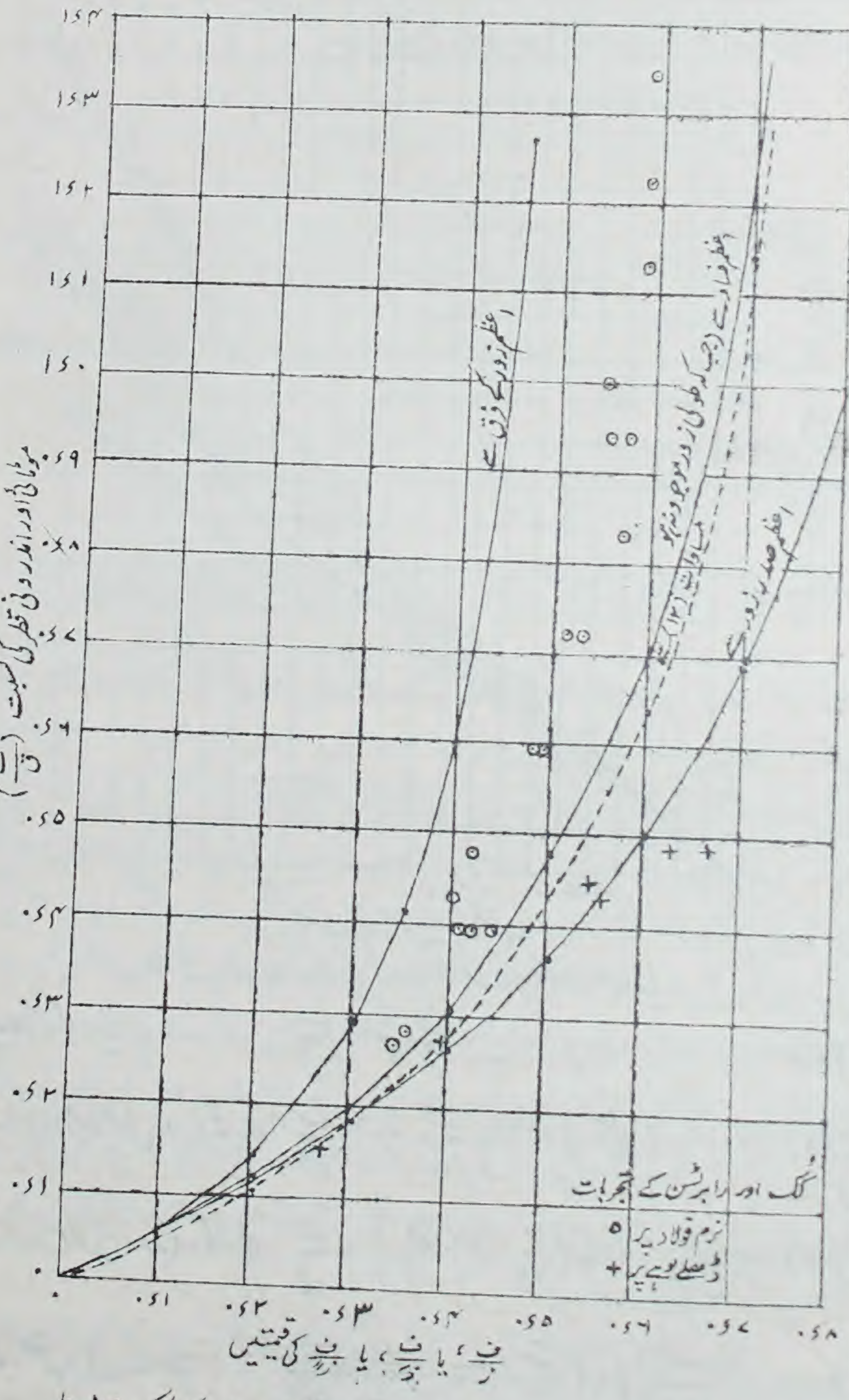
اعظم زور کے لیے $\frac{ط}{ق} = \frac{1}{2}\frac{ف}{ز}$ .... (۴و)

اعظم فساد (اور صفر طولی زور) کے لیے $\frac{ط}{ق} = \frac{1}{2}\frac{ف}{ز} \div \left(1 - \frac{1}{م}\frac{ف}{ز}\right)$ .... (۸و)

اعظم فساد (مع طولی زور) کے لیے $\frac{ط}{ق} = \frac{1}{2}\frac{ف}{ز}\left(1 - \frac{1}{2م}\right) \div \left(1 - \frac{1}{م}\frac{ف}{ز}\right)$ ... (۱۲و)

زور کے اعظم فرق کے لیے $\frac{ط}{ق} = \frac{1}{2}\frac{ف}{ز} \div \left(1 - \frac{ف}{ز}\right)$ یا $\frac{1}{2}\frac{ف}{ز - ف}$ .... (۱۶و)

صفحہ ۳۴۸



شکل ۱۶۱ ب - اندرونی دباؤ کے تحت موٹے اُستوانوں کی لچکدار مضبوطی

صفحہ ۳۳۹

دیکھو یہ ہر صورت میں موٹے اُستوانے کے متناظر قاعدے سے حاصل ہونے والی مقداروں سے کم ہیں جس سے معلوم ہوا کہ "موٹے" اُستوانے کو پتلا سمجھنا سلامتی کے منافی ہے (دیکھو شکل ۱۶۱ا)۔ دیوار کی موٹائی اندرونی قطر کی صرف $\frac{1}{10}$ ہو تو یہ خطا اعظم زور کے قاعدے سے ۱۰ فی صدی سے زیادہ ہوتی ہے اور سادہ قاعدہ (۴ہ ا) $\frac{ف}{ز}$ کا (۱۶) کے مقابلے میں ۳۰ فی صدی بیش اندازہ کرتا ہے۔ بارلو کا جو قاعدہ موٹے (اور پتلے) اُستوانوں کے لیے ہے جو بہت کثرت سے استعمال ہوا ہے لیکن جو کسی معقول استدلال پر مبنی نہیں وہ اُسی ربط (۴ہ ا) کی شکل کا ہے لیکن بیرونی قطر کی رقوم میں ہے اور اس کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے:-

$$\frac{ٹ}{ق + ۲ٹ} = \frac{۱}{۲} \frac{ف}{ز}$$

یہ تحویل ہو کر مساوات (۱۶ا) کی شکل اختیار کرتا ہے اور اس کو ایک آزمائشی قاعدہ سمجھنا چاہیے۔ بحیثیت ایک آزمائشی قاعدے کے یہ اعظم فساد کی مساوات (۸) پر مبنی منحنی کی خاصی پیروی کرتا ہے اور اس سے زیادہ تر سلامتی کی جانب ہٹتا ہے۔

تجرباتی نتائج —— تجارتی آغوشی تیا جوڑے فولادی نلوں پر کیے ہوئے کثیر تعداد کے امتحانوں سے پروفیسر اسٹوارٹ نے نتیجہ اخذ کیا ہے کہ ضابطوں (۹)، (۱۰)، (۱۱)، (۱۲) کے طریقے سے نقطۂ مغلوبیت کے لیے جو زور حاصل ہوتا ہے وہ زیر بحث شے کے تمشی نقطۂ مغلوبیت کے امتحانوں سے بہت مطابق ہوتا ہے۔ دباؤ کے تحت مغلوبیت کی جو پہلی علامات ہوتی ہیں اُن کو مشاہدہ کرنے کے تجرباتی طریقے اُس کے پرچے میں شائع نہیں ہوئے۔ نیز اُس نے جو نل استعمال کیے وہ بغیر جوڑ کے نہیں تھے اور سب کی موٹائی قطروں کے ۰.۲ سے کم تھی اور اس حد تک محسوبہ زور باہم زیادہ مختلف نہیں ہوتے (دیکھو شکل ۱۶۱ا)۔ ان وجوہ سے ایسے تجربات کو بغیر جوڑ کے موٹے اُستوانوں کی مضبوطی کے مختلف ضابطوں کے تقابل میں قطعی شہادت نہیں سمجھا جا سکتا اگرچہ ان سے

Barlow ۵

تجارتی تیا جوڑے نلوں کی کامی مضبوطی کے متعلق کار آمد معلومات حاصل ہوتی ہیں۔ اندرونی دباؤ والے موٹے اُستوانوں پر کوک[۱] اور رابرٹسن[۲] نے جو چند بہت اچھے تجربات کیے ہیں اُن سے موٹائی اور قطر کے بہت ہی مختلف تناسبوں کے نرم فولاد کے استوانوں کے لیے نقطۂ مغلوبیت کے زور کے اچھے نتائج حاصل ہوئے جو باہم بہت متطابق ہیں اور اعظم خاص فساد اور زور کے اعظم فرق کے نظریوں سے حاصل ہونے والی قیمتوں (شکل ۱۶۱ ب) کے بین بین ہیں۔ ڈھلے لوہے کے لیے (جو ایک پھوٹک شے ہے) کوک اور رابرٹسن نے شکستگی کے تناظر اندرونی دباؤ کے لیے اچھے نتائج حاصل کیے جو ضابطہ (۴) سے اعظم خاص زور کو شے کی انتہائی تنشی مضبوطی کے مساوی رکھنے سے حاصل ہونے والے نتائج کے بہت مطابق ہیں۔ یہ نتائج پھوٹک اشیا کے لیے "اعظم زور کے قاعدے" کی صحت پر دلالت کرتے ہیں اور سکونی بوجھوں کے تحت متمدد اشیا کے لیے "زور کے اعظم فرق" کے نظریے کی تقریبی صحت ثابت کرتے ہیں۔ لیکن اگر "اعظم فسادی توانائی" کے مفروضے (دفعہ ۲۵) کے لیے منحنی کھینچا جائے جو شکل ۱۶۱ ب میں نہیں دکھایا گیا تو ایسی اشیا کے لیے جو بہت متمدد ہوں ان حاصل شدہ نتائج سے یہی نظریہ دوسرے تین نظریوں سے زیادہ مطابق ہوتا ہے۔ مخلوط زور کے متعلق دوسرے جو تجربات بہت مختلف طریقوں پر کیے گئے ہیں (دیکھو دفعہ ۲۵) اُن کے ساتھ بھی یہ نتائج بہت مطابقت رکھتے ہیں۔ ضمناً یہ ذکر کر دینا مناسب معلوم ہوتا ہے کہ کوک اور رابرٹسن نے معلوم کیا کہ اُنھوں نے نرم فولاد کے موٹے اُستوانوں کی جو انتہائی مضبوطی ایسے دباؤ کے تحت معلوم کی جس سے اُستوانے پھٹ گئے وہ مضبوطی لامی کے ضابطوں (۱)، (۲)، (۳) اور (۴) کے تناظر امتحانی قانون کے مطابق ہوتی ہے اگر ان ضابطوں میں ز کو شے کی انتہائی تنشی مضبوطی لیا جائے۔ صفحہ ۳۴۴

۱؎ Cook ۲؎ Robertson

۱۲۲ ب ۔ نل بیرونی دباؤ کے تحت ۔۔۔ اگر ایک استوانی خول یا نل پر بیرونی دباؤ ہو تو دیوار میں ایک محیطی یا حلقہ فشار پیدا ہوگا جس کی حدت مساوات ۱۲ دفعہ ۱۲۲ سے حاصل ہوگی ۔ اگر نلی کی دیوار پتلی ہو تو فشاری زور تقریباً یکساں ہوگا اور اس کو آسان ضابطہ (۲) دفعہ ۱۱۹ سے محسوب کیا جا سکتا ہے ۔ صرف یہ کرنا ہوگا کہ شکل ۱۵۶ کی تمام قوتوں کی سمت کو معکوس کر دیا جائے ۔ لیکن بیرونی دباؤ کا مسئلہ اندرونی دباؤ کے مسئلے سے تقریباً اسی لحاظ سے مختلف ہے جس لحاظ سے داب روک، بندھن سلاخ سے مختلف ہوتا ہے ۔ کیونکہ جس طرح داب روک اگر لمبا اور بے سہارا ہو تو خم ہو کر یا جھک کر ٹوٹ سکتا ہے اسی طرح بڑے قطر کے نل کی پتلی دیوار ٹوٹ سکتی ہے ۔ دیوار موٹی ہو تو اُستوانے کی تراش اُس وقت تک مدور رہتی ہے کہ شے کی فشاری مزاحمت کی حد نہ پہنچ جائے ۔ اگر نلی کا طول چھوٹا ہو (مثلاً قطر کے چھ گنے سے کم ہو) تو اس کو سروں سے کچھ سہارا مل سکتا ہے ۔ اس لیے مسئلے کو آسان بنانے کے لیے پہلے نل کا طول بہت لمبا فرض کیا جا سکتا ہے ۔ دفعہ ۱۱۹ کی ترقیم استعمال کرو لیکن زِ سے دیواروں کے فشاری زور کی حدت تعبیر کرو اور ر سے بیرونی نصف قطر اور ف سے بیرونی دباؤ ۔ تب حسبِ سابق

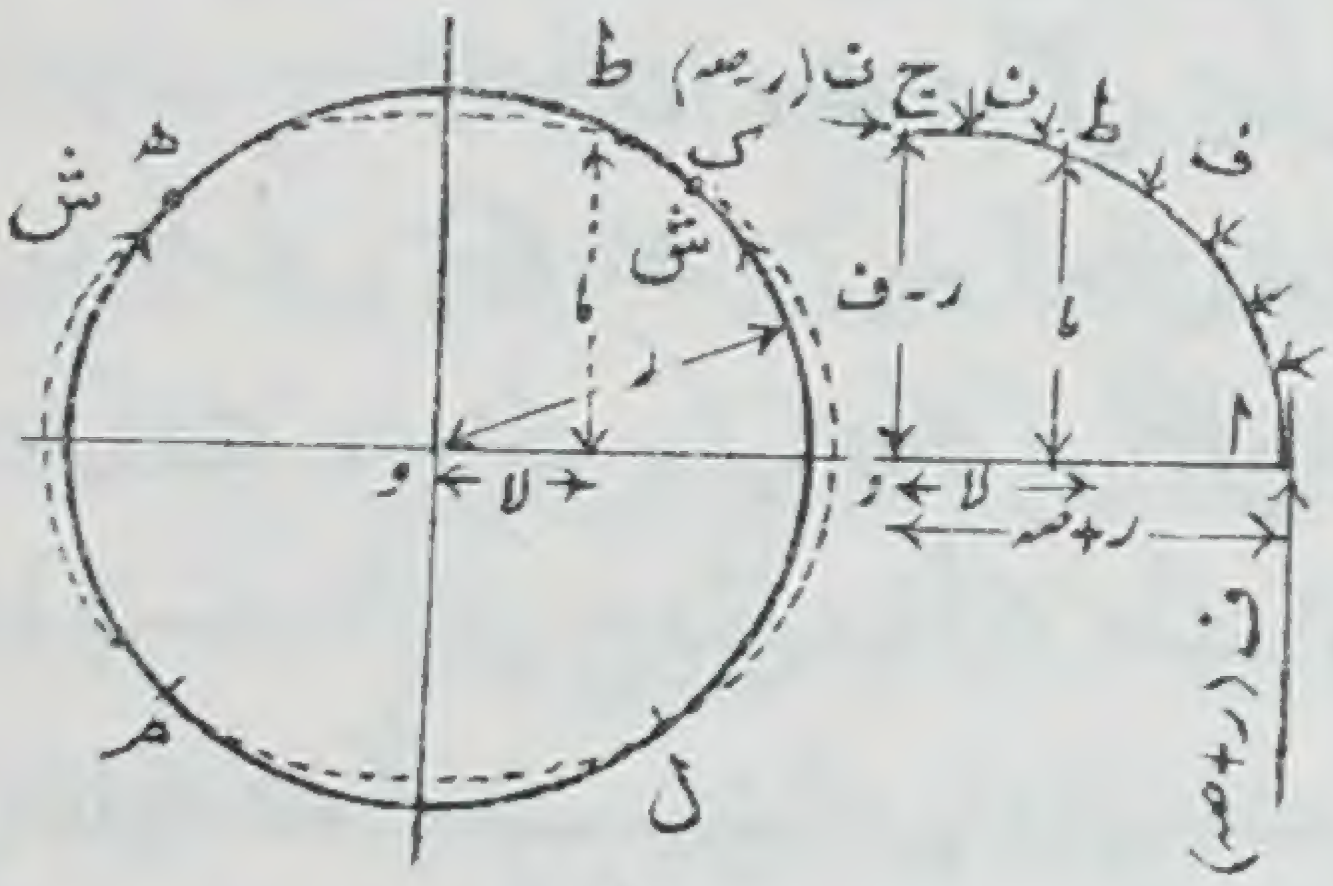
$$ زِ = \frac{ف ر}{ٹ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱) $$

اب نل کے ایک بہت چھوٹے محوری طول مثلاً اکائی طول پر غور کرو ۔ دیوار جس کا محیطی طول ۲ π ر اور تراش مستطیلی ٹ × ۱ ہے ایک مجموعی فشار شؔ کے تحت ہے جہاں

$$ شؔ = زِ × ٹ × ۱ = ف ر \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲) $$

شؔ کی جو فاصل قیمت غیر قائمیت پیدا کرنے کے لیے ضروری ہے وہ

آئیلر[1] کے قواعد باب ۹ سے جو داب روکوں اور ستونوں سے متعلق ہیں مماثلت کے ذریعے اخذ کیے جا سکتے ہیں اگر معادل داب روک کا طول اور سروں کی کیفیت معلوم ہو جائے۔ اس قسم کی تصوری صورت میں صریحاً کسی طرح کی متشاکل ناکارگی تسلیم کرنی ہوگی اور سادہ ترین متشاکل شکل وہ ہوگی جس میں مدور تراش ایک خفیف سی بیضوی شکل اختیار کر کے بگڑنا شروع کرتی ہے اور اس شکل کی تجربے سے بھی تصدیق ہوتی ہے - ایسی صورت میں شکل ۱۶۱ ج کے مطابق تعاکس خمیدگی کے چار نقطے ھ، ک، ل، م ہونگے یعنی ایسے نقاط جو (ک ل اور ھ م کے) بڑھتے ہوئے انحنا کو (ھ ک اور ل م کے) گھٹتے ہوئے انحنا سے جدا کرتے ہیں اور یہ چار نقطے نل کی تراش کو چار مساوی قوسوں میں تقسیم کرینگے جن میں سے ہر ایک کا طول $\frac{1}{2}\pi$ ر ہوگا۔ تب کسی ایک قوس مثلاً ھ ک کو ایک داب روک تصور کریں جو سروں ھ اور ک پر قبضہ دار ہے تو مساوات (۶) دفعہ ۱۰۰ سے فاصل دباؤ پر صفحہ ۳۴۱



شکل ۱۶۱ ج

$$ش = \frac{\pi^2 آ ے}{(\frac{1}{2}\pi ر)^2} = \frac{۴ آ ے}{ر^2} \quad .... (۳)$$

اب $آ = \frac{1}{12} \times 1 \times ٹ^3$ اور ش = ف ر اس لیے (۳) سے

$$ف ر = \frac{۴ ے ٹ^3}{12 ر^2}$$

$$یا \quad ف = \frac{ے}{۳}\left(\frac{ٹ}{ر}\right)^3 \quad یا \quad \frac{۸ ے}{۳}\left(\frac{ٹ}{ق}\right)^3 \quad .... (۴)$$

[1] Euler

یہ ایسے نلوں کا تقریبی فاصل دباؤ ہے جو اتنے لمبے ہیں کہ سرے درمیانی حصے کی ناکارگی کی مزاحمت میں کوئی مدد نہیں دیتے - اس قیمت کو جو صحیح تحلیل سے نہیں حاصل ہوتی بلکہ ایک محوری بوجھ کے سیدھے داب رد کی مماثلت سے حاصل ہوئی ہے بالکل صحیح نہیں سمجھنا چاہیے بلکہ یہ سمجھنا چاہیے کہ اس سے ف کی فاصل قیمت کے جملے کی شکل حاصل ہوتی ہے - چونکہ نل در اصل چھوٹے محوری طول کا نہیں اس لیے جب اکائی طول پر غور کیا گیا ہے اُس کے متصل حصوں سے اُس کے ضد انحنائی انحنا کی مزاحمت عمل میں آتی ہے اور لچک کا مناسب مقیاس جیسا کہ دفعہ ۹۴ میں دکھایا گیا ہے ے نہیں ہوگا بلکہ $\frac{\text{م}^2\,\text{ے}}{\text{م}^2-1}$ ہوگا جہاں $\frac{1}{\text{م}}$ پوائے سن کی نسبت ہے - زیادہ صحیح ریاضیاتی تحلیل سے حسبِ ذیل قیمت حاصل ہوتی ہے:-

$$\text{ف} = \frac{\text{م}^2}{\text{م}^2-1} \times \frac{\text{ے}}{4} \times \left(\frac{\text{ٹ}}{\text{ر}}\right)^3 \quad \text{یا} \quad \frac{\text{م}^2}{\text{م}^2-1} \times 2\,\text{ے} \left(\frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}\right)^3 \quad \text{......(5)}$$

اس نتیجے کی ایک سادہ تمثیل کے لیے مصنف، مسٹر ساؤتھ ویل کا ممنون ہے - اگر مدور تراش کا ایک خفیف سا بگاڑ ناقصی تراش میں فرض کیا جائے تو فاصل دباؤ ف اس طرح کا ہوگا جو اس خفیف سی بگڑی ہوئی شکل کو دیوار کی لچکدار قوتِ بازگشت کے مقابلے میں تعادل میں رکھیگی - فرض کرو کہ نصف قطر ر کی مدور تراش ایک ناقص بن جاتی ہے جس کے نیم محور ر+صہ اور ر-صہ ہیں (شکل ۱۶۱ ج) جہاں صہ چھوٹا ہے اور اس کی وجہ سے محیطی فشار ف (ر+صہ) اور ف (ر-صہ) ہونگے جیسا کہ شکل میں دائیں طرف دکھایا گیا ہے - تب ناقص کی مساوات یہ ہوگی:-

$$\frac{\text{لا}^2}{(\text{ر}+\text{صہ})^2} + \frac{\text{ی}^2}{(\text{ر}-\text{صہ})^2} = 1$$

یا

$$\text{ی} = \frac{\text{ر}-\text{صہ}}{\text{ر}+\text{صہ}} \sqrt{(\text{ر}+\text{صہ})^2 - \text{لا}^2}$$

اس کو دو مرتبہ تفرق کر کے انحنا کے ضابطے میں مندرج کریں جو دفعہ ۷۷ کے حاشیے میں دیا گیا ہے تو کسی نقطہ ط کا انحنا صہ کی پہلی قوت تک

$$\frac{1}{ر'} = \frac{1}{ر}\left\{1 - 3\frac{صہ}{ر} + 6\frac{صہ}{ر} \times \frac{لا^2}{ر^2}\right\}$$

انحنا کا اضافہ صفحہ ۳۴۲

$$\frac{1}{ر'} - \frac{1}{ر} = \frac{3}{ر}\left\{-\frac{صہ}{ر} + 2\frac{صہ}{ر} \times \frac{لا^2}{ر^2}\right\} \quad \text{.........} \quad (۵ ا)$$

اور یہ ایک خمیدہ ٹکڑے میں خماؤ کے معیار کے متناسب ہوگا (دیکھو دفعہ ۱۲۹)۔ تراش کے کسی نقطے پر خمیدگی کی مزاحمت کا معیار حاصل کرنے کے لیے ضد انحنائی انحنا کی مزاحمت (دفعہ ۹۴) کی رعایت سے صرف اتنا کرنا ہوگا کہ انحنا کے اضافے کو

$$\frac{م^2}{م^2-1}\,آ \text{ سے یعنی } \frac{م^2}{م^2-1}\,.\,ے\,\frac{ط^3}{12}$$

سے ضرب دینا ہوگا۔

اس طرح (۵ ا) سے ط پر مزاحمت کا معیار

$$م_ط = \frac{م^2 ے}{م^2-1} \times \frac{ط^3 صہ}{4ر^2}\left\{-1 + 2\frac{لا^2}{ر^2}\right\} \quad \text{.............} \quad (۵ ب)$$

اور لا = ۰ پر

$$م_ج = -\frac{م^2 ے}{م^2-1} \times \frac{ط^3 صہ}{4ر^2} \quad \text{..................} \quad (۵ ج)$$

اور لا = ر پر

$$م_ا = +\frac{م^2 ے}{م^2-1} \times \frac{ط^3 صہ}{4ر^2} \quad \text{..................} \quad (۵ د)$$

اس خفیف ناقصی بگاڑ کی حالت میں تعادل تعدیلی واقع ہونے

کے لیے ان معیاروں کو متناظر کھنچاؤ کے معیاروں کا توازن کرنا ہوگا جو دباؤ ف سے پیدا ہوتے ہیں۔ شکل ۱۶۱ ج میں دکھائے ہوئے ربع دائرہ کے لیے اکّے گرد معیار لیں اور انحنا میں اضافہ کرنے والے معیار کو مثبت سمجھیں تو

$$\text{ص}_{\text{ا}} = \text{ص}_{\text{ج}} - \text{ف}\,(\text{ر} - \text{صہ})^{۲} + \tfrac{1}{2}\,\text{ف}\,(\text{ر} + \text{صہ})^{۲} + \tfrac{1}{2}\,\text{ف}\,(\text{ر} - \text{صہ})^{۲}$$

$$= \text{ص}_{\text{ج}} + ۲\,\text{ف}\,\text{ر}\,\text{صہ}$$

(۵ د) اور (۵ ج) سے ص$_{\text{ا}}$ اور ص$_{\text{ج}}$ کی قیمتیں لے کر درج کرنے سے

$$۲\,\text{ف}\,\text{ر}\,\text{صہ} = \text{ص}_{\text{ا}} - \text{ص}_{\text{ج}} = \frac{۲\,\text{م}_{\text{ا}}^{۲}}{\text{م}_{\text{ا}}^{۲} - ۱} \times \text{ے}\,\frac{\text{ٹ}^{۳}\,\text{صہ}}{۴\,\text{ر}^{۲}}$$

$$\text{ف} = \frac{\text{م}_{\text{ا}}^{۲}}{۴\,(\text{م}_{\text{ا}}^{۲} - ۱)}\,\text{ے}\left(\frac{\text{ٹ}}{\text{ر}}\right)^{۳} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{م}_{\text{ا}}^{۲}}{\text{م}_{\text{ا}}^{۲} - ۱}\,۲\,\text{ے}\left(\frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}\right)^{۳}$$

یہ وہی قیمت ہے جو (۵) میں دی گئی ہے۔ نیز اگر نل کی دیوار پر کوئی نقطہ ط لیا جائے اور حصے ج ط کے معیار ط کے گرد لیے جائیں اور ج پر کے معیار کے لیے قیمت (۵ ج) اور ا کے لیے اوپر کی قیمت جو لا کی رقوم میں دی گئی ہے استعمال کریں تو صہ کی پہلی قوت تک یہ پایا جائیگا کہ ف کی اس قیمت سے ط پر خماؤ کا معیار اُس مزاحم معیار کے مساوی ہوگا جو خفیف ناقص بگاڑ کے لیے (۵ ب) سے حاصل ہوگا۔

یہ فاصل دباؤ صریحاً تصوری صورت کے لیے ہے اور تصوری صورت سے جو انحراف واقع ہونگے مثلاً تراش کا غیر کامل طور پر مدور ہونا، دیوار کی موٹائی کا نامساوی ہونا، نل جس شے کا بنا ہوا ہے اس کی غیر یکسانیت اور اس کی لچک کی حدود کا محدود ہونا ان سب باتوں کا اثر یہ ہوگا کہ ناکارگی پست تر دباؤں پر واقع ہوگی۔ بغیر جوڑ کے اور آغوشی تیا جوڑے دونوں طرح صفحہ ۳۴۳ کے نلوں پر جو تجربات کیے گئے اُن سے ناکارگی دباؤں کے لیے قیمت

$$ف = ج \left(\frac{ٹ}{ق}\right)^3 \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

کی شکل میں حاصل ہوتی ہے جو (۴) اور (۵) کے مطابق ہے لیکن مستقل ج کی قیمت عموماً (۵) سے حاصل ہونے والی قیمت سے ۲۵ تا ۳۰ فی صدی کم حاصل ہوتی ہے۔ مثلاً اگر $\frac{ٹ}{ق} < ۰٫۰۲۵$ تو تجرباتی قیمتیں تقریباً حسبِ ذیل ہیں:-

فولادی نلیوں کے لیے $ف = ۵۰ \times ۱۰^6 \times \left(\frac{ٹ}{ق}\right)^3$ پونڈ فی مربع انچ ....(۷)

پیتل کی نلیوں کے لیے $ف = ۲۵ \times ۱۰^6 \times \left(\frac{ٹ}{ق}\right)^3$ پونڈ فی مربع انچ ....(۸)

بہت موٹی نلیوں کی صورت میں، بہت چھوٹے داب روکوں کی طرح، ناکارگی خمیدگی سے واقع نہیں ہوگی بلکہ مادے کے کچلے جانے کی وجہ سے ہوگی اور سوراخ بتدریج بند ہوتا جائیگا۔

اگر نلی نہ بہت پتلی ہو نہ بہت موٹی مثلاً $\frac{ٹ}{ق} > ۰٫۰۲۵$ تو ناکارگی کے حالات (۵) یا (۶) کے مطابق ناکارگی اور لچک کی حد پہنچ جانے کی ناکارگی کے بین بین ہونگے۔ ایسی صورتوں میں، داب روکوں کی طرح، ایک کم و بیش آزمائشی ضابطے کے ذریعے ناکارگی کی انتہائی مزاحمت کو پتلے پن $\frac{ق}{ٹ}$ کی ایک بڑی وسعت کے لیے ایک کم و بیش آزمائشی ضابطے کے ذریعے بیان کیا جاسکتا ہے۔ یہ ضابطہ بھی داب روک کے ضابطوں کے نمونے پر ہوسکتا ہے۔ چنانچہ $\frac{ٹ}{ق} > ۰٫۰۳$ کے لیے $\frac{ٹ}{ق}$ کی ایک بڑی وسعت کے لیے کارمن[1] اور کار[2] نے معلوم کیا کہ حسبِ ذیل ربط درست رہتے ہیں،

[1] Carman
[2] Carr

بغیر جوڑ کی فولادی نلیوں کے لیے

$$\text{ف} = ۹۵۵۲۰ \frac{\text{ٹ}}{\text{ق}} - ۲۰۹۰ \text{ پونڈ فی مربع انچ} \quad \ldots\ldots\ldots (۹)$$

آغوشی تپا جوڑی نلیوں کے لیے

$$\text{ف} = ۸۳۲۷۰ \frac{\text{ٹ}}{\text{ق}} - ۱۰۲۵ \text{ '' '' ''} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

پیتیل کی نلیوں کے لیے

$$\text{ف} = ۹۳۳۶۵ \frac{\text{ٹ}}{\text{ق}} - ۲۴۷۴ \text{ '' '' ''} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

صفحہ ۳۴۴ اگر زیرِ بحث نل کا مادّہ ایسا ہو جس کے متعلقہ مستقل نلوں پر فی الواقع کیے ہوئے تجربات کے ذریعے معلوم کیے گئے ہوں تو عملی اغراض کے لیے ضابطے کی یہ شکل بہترین شکل ہے۔ لیکن دفعہ ۱۰۲ کی طرح یہ بھی ممکن ہے کہ ایک ایسا آزمائشی ضابطہ وضع کیا جائے جو مسلسل ہو یعنی فشار کی لچک کی حد پر واقع ہونے والی ناکارگی پر بھی حاوی ہو جس کے لیے (۱) کی رو سے

$$\text{ف} = ۲\,\text{ز} \frac{\text{ٹ}}{\text{ق}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

جہاں ز لچک کی حد کا زور ہے اور ان صورتوں پر بھی حاوی ہو جن میں غیر قائمیت واقع ہو جائے جس کے لیے (۵) میں رقم $\frac{\text{م}^۲}{\text{م}^۲ - ۱}$ کو نظر انداز کرنے سے

$$\text{ف} = ۲\,\text{مے} \left(\frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}\right)^۳ \quad \ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

اس طرح کا ضابطہ جو اِن دونوں ناکارگیوں پر حاوی ہو حسبِ ذیل ہوگا:-

$$\text{ف} = \frac{۲\,\text{ز} \frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}}{۱ + \frac{\text{ز}}{\text{مے}} \frac{\text{ق}^۲}{\text{ٹ}^۲}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

یا اگر نلوں پر کیے ہوئے تجربات سے حاصل شدہ مستقل ا استعمال کیا جائے تو ایک مسلسل قاعدہ بنایا جاسکتا ہے :۔

$$\text{ف} = \frac{2\text{ز}\,\frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}}{1 + \text{و}\left(\frac{\text{ق}}{\text{ٹ}}\right)^2} \quad \text{یا} \quad \frac{2\text{ز}}{\frac{\text{ق}}{\text{ٹ}} + \text{ا}\left(\frac{\text{ق}}{\text{ٹ}}\right)^3} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

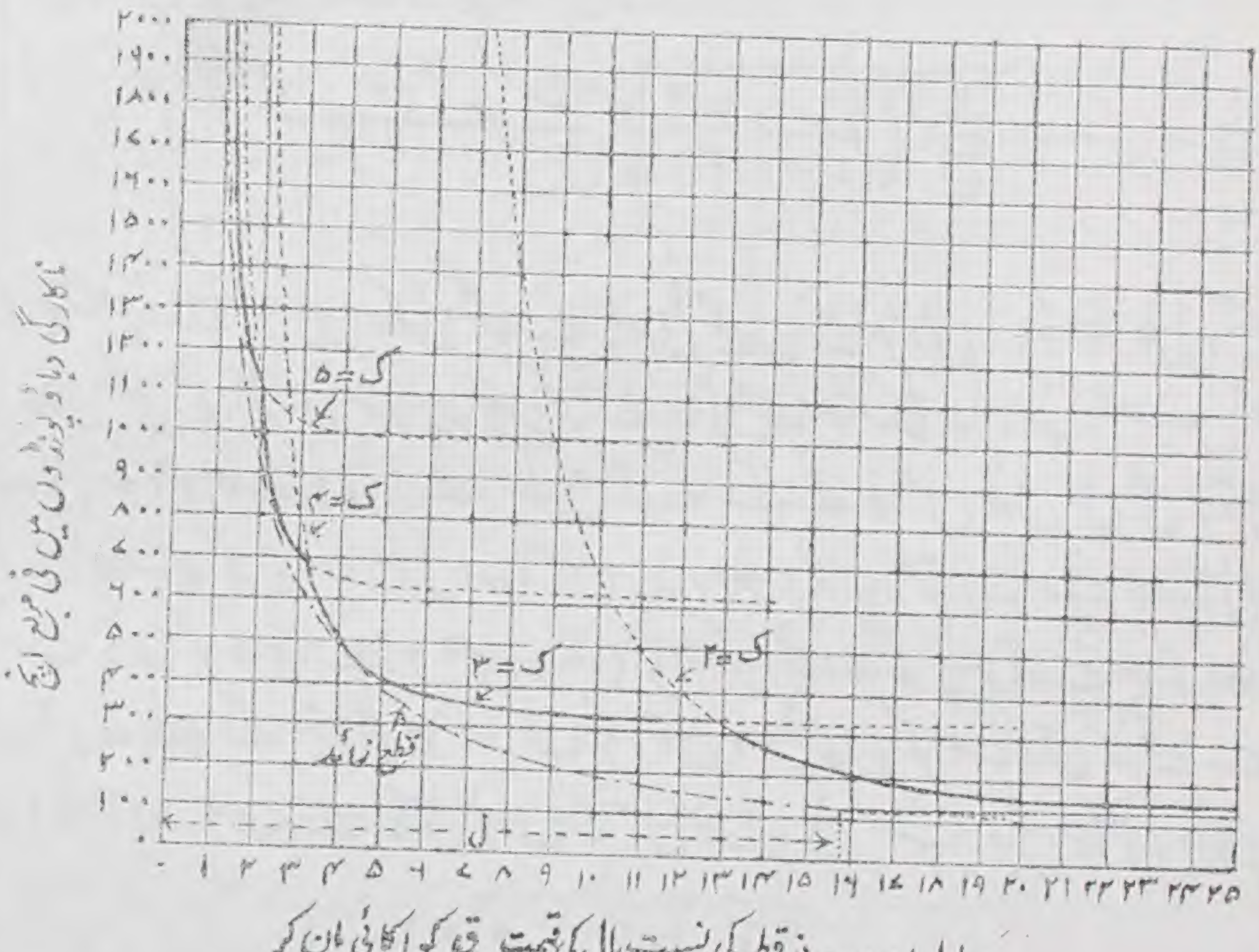
طول کا اثر — ایک خاص طول سے، جو قطر پر اور غالباً دیواروں کی موٹائی پر بھی منحصر ہوتا ہے، کم طول پر نلیوں کی ناکارگی کی مزاحمت ایک بہت لمبی نلی سے زیادہ ہوتی ہے۔ لمبی نلی بیضوی شکل سے گزر کر دو قصی یا کم و بیش 8 کی شکل اختیار کرکے ناکارہ ہوتی ہے اور چھوٹی نلی ایک کم و بیش متشاکل شکل اختیار کرتی ہے اور طول جتنا کم ہو تراش میں اتنے ہی زیادہ قص پیدا ہوتے ہیں۔ اس طرح چھوٹی نلیوں کی مدور تراشیں ناکارگی کے وقت چھوٹی چھوٹی قوسوں میں تقسیم ہوجاتی ہیں اور ناکارگی کا دباؤ جو تقریباً ان قوسوں کے طول کے بالعکس متناسب ہوگا (جیسا کہ داب روکوں میں ہوتا ہے) اُن فصوص کی تعداد کے بڑھنے سے بڑھیگا اور نلی کے طول کے گھٹنے سے غیر مسلسل طور پر بڑھیگا۔ اس سلسلے میں ساؤتھ ویل نے بہت پتلی نلیوں کے لیے ذیل کا دلچسپ ضابطہ اخذ کیا ہے :۔

$$\text{ف} = 2\,\text{ی}\,\frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}\left\{\frac{\text{س}}{\text{ک}^2(\text{ک}^2-1)} \times \frac{\text{ق}^4}{\text{ل}^4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(\text{ک}^2-1)\,\text{م}^2}{\text{م}^2-1}\cdot\frac{\text{ٹ}^2}{\text{ق}^2}\right\} \quad \ldots\ldots (16)$$

صفحہ ۳۴۵ جہاں ک ناکارگی پر تراش کے فصوص کی تعداد ہے اور س ایک مستقل ہے جو سروں کی بندش پر منحصر ہے اور ل نلی کا مجموعی طول ہے۔ مختلف طول کی نلیوں پر کیے ہوئے تجربات سے یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ ایک خاص فاصل طول ل سے کم پر ناکارگی دباؤ ف تقریباً طول کے بالعکس متناسب ہوتا ہے یعنی

ف = (لَ / ل.) فَ .... (۱۷)

جہاں فَ ایک لمبی نلی کا ناکارگی دباؤ ہے جو ل = لَ کے لیے اقل قیمت اختیار کرتا ہے - طول لَ تقریباً قطر کا ۶ گنا لیا گیا ہے - لیکن غالباً یہ طول قطر کے



شکل ۱۶۱ د - بیرونی دباؤ کے زیر عمل پتلی نلیوں کی نظری مضبوطی -

علاوہ موٹائی پر بھی منحصر ہے - اگر (۱۶) میں ک کی ہمیشہ وہ قیمت اختیار کی جائے جس سے ف کم سے کم حاصل ہو تو (۱۶) کی نظری قیمتیں ایک غیر مسلسل منحنی کی شکل میں حاصل ہوتی ہیں جس کا نمونہ شکل ۱۶۱ د میں دکھایا گیا ہے -
زائدی ربط (۱۷) کو یوں لکھا جا سکتا ہے :-

ف × ل = فَ × لَ = مستقل .... (۱۸)

اور ساؤتھ ویل نے دکھایا ہے کہ اگر مستقل اس طرح انتخاب کیا جائے کہ مساوات (۱۸) کا زائد مساوات (۱۶) سے تعبیر ہونے والے منحنیوں کے خاندان میں سے اس منحنی کو عین مس کرے جس کے لیے ک = ۳ تو یہ زائد اُس غیر مسلسل منحنی کے بہت قریب ہوگا اور اُس سے سلامتی کی جانب ہوگا جو خاندان (۱۶) میں ک کی مختلف صحیح (یعنی غیر کسری) قیمتوں کے متناظر منحنیوں کی اقل قیمتوں کو تعبیر کرے۔ تب اس زائد صفحہ ۳۴۶

$$\text{ف} = \frac{۳۲}{۹} \text{ے} \frac{\text{ط}^۲}{\text{ل ق}} \sqrt[۴]{\frac{\text{س}}{۳۶}\left(\frac{\text{م}^۲}{\text{م}^۲-۱}\right)^۳ \frac{\text{ط}^۲}{\text{ق}^۲}} \quad \text{.........} \quad (۱۹)$$

کو جو شکل ۱۶۱ د میں دکھایا گیا ہے چھوٹی نلیوں کے ہتدیمی دباؤ اور طول کے ربط کی شکل کو تقریبی طور پر تعبیر کرنے والا سمجھا جاسکتا ہے۔ اس کو حد ل = ل تک (۱۸) سے مطابق کرنے کے لیے فاصل طول ل کی یہ تعریف کرنی چاہیے کہ یہ وہ طول ہے جس پر ربط (۱۸) ختم ہوتا ہے اور فاصل دباؤ قیمت (۵) کو پہنچتا ہے (یعنی (۱۶) کی اُس قیمت کو پہنچتا ہے جو ک = ۲ اور ل = ∞ کے متناظر ہو)۔ ف کی ان دو قیمتوں کو مساوی رکھنے سے جو (۱۹) اور (۵) سے حاصل ہوں فاصل طول ل حسبِ ذیل حاصل ہوگا:

$$\text{ل} = \frac{۱۶}{۹} \sqrt[۴]{\frac{\text{س}}{۳۶} \, \frac{\text{م}^۲-۱}{\text{م}^۲} \, \frac{\text{ق}^۶}{\text{ط}^۲}} \quad \text{..............} \quad (۲۰)$$

اس کی شکل سادہ ہے اور حسبِ ذیل ہے:

$$\text{ل} = \text{ج} \sqrt[۴]{\frac{\text{ق}^۳}{\text{ط}}} \quad \text{..................} \quad (۲۱)$$

جہاں ج ایک نامعلوم مستقل ہے جو سروں کی بندش پر منحصر ہوتا ہے اور مختلف اشیا کے لیے بھی اس میں فرق ہوتا ہے مگر خفیف کیونکہ $\sqrt[۴]{\frac{\text{م}^۲-۱}{\text{م}^۲}}$ کا

تغیر بہت غیر اہم ہوگا۔ کوک[۱] نے مختلف طول اور موٹائی کی فولادی نلیوں پر جو تجربات کیے ہیں اُن میں ربط (۱۸) کے ساتھ مطابقت پائی جاتی ہے اگر (۲۱) کو حسبِ ذیل لیا جائے:-

$$ل = ۱٫۷۳ \sqrt{\frac{ق^۳}{ط}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۲)$$

اور توقع یہ ہے کہ دیگر اشیا کے لیے بھی یہ ربط (یعنی (۲۲)) کچھ زیادہ مختلف نہیں ہوگا۔ اگر ان ضابطوں کی تصدیق طول کی زیادہ وسعتوں اور دیگر اشیا کے لیے ہو جائے تو پھر کسی طول کی پتلی نلی کا فاصل دباؤ پہلے سے معلوم کر لیا جا سکتا ہے اور وہ اس طرح کہ پہلے لمبی نلیوں کے لیے ضابطہ (۶) یا (۱۵) استعمال کیا جائے اور پھر (۲۲) سے ل معلوم کر کے ل سے کم طول کے لیے (۱۷) کو استعمال کیا جائے۔ عملی تجویز میں استعمال ہونے کے متعلق اس پر منحصر ہونگے کہ سرے ایک حقیقی مدور شکل میں کس طرح ثابت کیے گئے ہیں اور اس پر کہ نلی ابتداء میں کامل طور پہ مدور تھی یا نہیں اور اس کی موٹائی یکساں تھی یا نہیں اور کسی اور لحاظ سے تصوری حدت سے مختلف تو نہیں تھی۔

تہدیمی چھلوں کی فصل بندی۔۔۔ لمبی پتلی دُود راہ نلیوں کے جوڑوں پر مختلف قسم کے مصلّب چھلے استعمال کیے جاتے ہیں تاکہ تھوڑے تھوڑے فاصلے سے مدور شکل کو برقرار رکھیں اور لمبی نلی کے طول کو تقسیم کر کے کسی قدر چھوٹی نلیوں کی صورتِ حال پیدا کر کے تہدیم کو روکیں۔ ساؤتھ ویل[۲] نے دکھایا ہے کہ جو نتائج حاصل کیے گئے ہیں اُن سے
صفحہ ۳۴۷ ان مصلّب چھلوں کی فصل بندی کس طرح حاصل کی جا سکتی ہے۔ متصل تہدیمی چھلوں کے درمیان طول ص ہو تو (۱۷) میں ف کے لیے (۱۳) کی تقریبی قیمت استعمال کرنے سے اور ل کے لیے کوک[۳] کی قیمت (۲۲) استعمال کرنے سے تہدیمی دباؤ حسبِ ذیل ہوگا:-

$$ف = \frac{ل}{ص} \times ۲ ے \frac{ط^۳}{ق^۳} = ۳٫۴۶ \frac{ے}{ص} \sqrt{\frac{ط^۵}{ق^۳}} \quad \ldots\ldots (۲۳)$$

۱ Cook ۲ Southwell ۳ Cook

اگر ص اس طرح انتخاب کیا جائے کہ نلی میں اس کی پوری قوتِ مزاحمت پیدا ہو جو کہ (۱۲) سے ظاہر ہوتی ہے تو (۲۳) اور (۱۲) کو مساوی رکھنے سے

$$\text{۲}\,\frac{\text{ط}}{\text{ق}}\times \text{ز} = \text{۳ء۴۴۲}\;\frac{\text{ے}}{\text{ص}}\sqrt[\text{۵}]{\frac{\text{ط}}{\text{ق}^{\text{۳}}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۲۴})$$

اور

$$\frac{\text{ص}}{\text{ق}} = \text{۱ء۷۳}\;\frac{\text{ے}}{\text{ز}}\sqrt[\text{۴}]{\frac{\text{ط}^{\text{۳}}}{\text{ق}^{\text{۳}}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۲۵})$$

جس سے ص نلی کے ابعاد اور شئے کے خواص کی رقوم میں حاصل ہوتا ہے۔ اس میں پہلے سے $\frac{\text{ط}}{\text{ق}}$ کو تاکل وغیرہ کی مناسب رعایت رکھ کر (۱۲) کے ذریعے معین کر لیا جائیگا۔

چونکہ چھلّے نلی کی دیواریں حقیقی مدور شکل برقرار نہیں رکھ سکینگے اور عملی صورتوں میں نلی میں خود دیگر نقائص ہونگے اس لیے غالباً مساوات (۲۴) کی دائیں جانب کو ایک جزوِ ضربی سے ضرب دینا چاہیے جو ایک سے بڑا ہو اور اس طرح (۲۵) کی بائیں جانب کو اسی جزوِ ضربی سے تقسیم کرنا ہوگا۔ یہ جزوِ ضربی ممکن ہے ۲ تک ہو۔

تہدیمی چھلے اسی صورت میں کارآمد ہونگے کہ ان سے فاصل تہدیمی دباؤ بڑھ جائے، یعنی اسی صورت میں کہ ص ﮮ ل ۔ یہ حد اس طرح حاصل ہو گی کہ (۲۵) میں ص = ل رکھا جائے اور (۲۲) سے ل کی قیمت درج کی جائے جس سے

$$\frac{\text{ط}}{\text{ق}} = \text{۲}\sqrt{\frac{\text{ز}}{\text{ے}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۲۶})$$

اس سے موٹی نلیوں کے لیے جن میں ترمیم تصوری حالات سے انحراف کی رعایت سے کی گئی ہو تہدیمی چھلے بے کار ہونگے کیونکہ اگر ص کو گھٹا کر فاصل تہدیمی دباؤ کی قیمت کو بڑھا بھی دیا جائے تو بھی زور کی حدت ز پر ناکارگی پھیلاؤ کی وجہ سے واقع ہو جائیگی۔ اگر ز کی قیمت فولاد کے لیے ۴۴۰۰۰ اور ے کی

۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ لی جائے تو (۲۶) سے ٹ کی حد نلی کے قطر کی تقریباً $\frac{1}{30}$ حاصل ہوتی ہے۔

حوالے

نلیوں کی مزاحمت کے مضمون پر ایک قابلِ قدر کتابیات (Bibliography) "زور کی مخلوط تقسیم" کی رپورٹ (برٹش ایسوسی ایشن، سکشن گ ۱۹۱۳ء) کے اُس حصے سے منسلک ملیگی جو مسٹر کوک[1] نے لکھا ہے۔

۱۲۳ - موٹے کُروی خول — اگر کسی نصف قطر لا پر نیم قطری فشاری زور ف$_{لا}$ ہے اور محیطی تنشی زور ف$_{ہا}$ (جو کُروی خول میں نیم قطر کے علی القوائم ہر سمت میں مساوی ہوتا ہے) تو خاص زوروں ف$_{لا}$ اور ف$_{ہا}$ کے درمیان ایک مساوات اس طرح حاصل ہوسکتی ہے کہ خول کے اندر نصف قطر لا اور موٹائی مف لا کے ایک بے انتہا پتلے کُروی خول کی قوتوں پر غور کیا جائے۔ اس طرح صفحہ ۳۴۸

$$\pi\,\text{لا}^2\,\text{ف}_{\text{لا}} - \pi\,(\text{لا} + \text{مف لا})^2\,(\text{ف}_{\text{لا}} + \text{مف ف}_{\text{لا}}) = 2\pi\,\text{لا}\,\text{مف لا} \times \text{ف}_{\text{ہا}} \quad (1)$$

$$2\,\text{ف}_{\text{ہا}} = -2\,\text{ف}_{\text{لا}} - \text{لا}\,\frac{\text{فرف}_{\text{لا}}}{\text{فرلا}} = -\frac{1}{\text{لا}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\,(\text{لا}^2\,\text{ف}_{\text{لا}}) \quad \ldots\ldots (2)$$

ف$_{لا}$ اور ف$_{ہا}$ کے درمیان ایک اور مساوات اس طرح حاصل ہوسکتی ہے کہ فساد پر غور کیا جائے۔ اگر خول کا ایک نقطہ جو کُرے کے مرکز سے فاصلہ لا پر ہے بقدر فاصلہ ی کے ہٹے (جیسا کہ دفعہ ۱۲۶ میں پورے طور پر دکھایا گیا ہے) تو نیم قطری اور محیطی تنشی فساد علی الترتیب س$_{لا}$ = $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ اور س$_{ہا}$ = $\frac{\text{ی}}{\text{لا}}$ ہونگے، اور محیطی فساد تشاکل کی وجہ سے ہر مماسی سمت میں مساوی ہونگے۔ اس لیے دفعہ ۱۹ سے

[1] Mr. G. Cook

$$س_ا = \frac{ی}{لا} = \frac{1}{ے}\left(\frac{م-1}{م} ف_ا + \frac{1}{م} ف_{لا}\right) \quad ....(۳)$$

$$س_{لا} = \frac{فری}{فرلا} = \frac{1}{ے}\left(-\frac{۲}{م} ف_ا - ف_{لا}\right) \quad ....(۴)$$

(۳) کو تفرق کرکے (۴) کی مدد سے ی کو ساقط کرنے سے :-

$$(م-1)\, لا \times \frac{فرف_ا}{فرلا} + لا \frac{فرف_{لا}}{فرلا} + (م+1)(ف_{لا} + ف_ا) = 0 \quad .....(۵)$$

اور (۲) سے $ف_ا$ اور $\frac{فرف_ا}{فرلا}$ کی قیمت درج کرنے سے

$$\frac{فر^2 ف_{لا}}{فرلا^2} + \frac{۳}{لا}\frac{فرف_{لا}}{فرلا} = 0 \quad ....(۶)$$

اس کو $\frac{فرف_{لا}}{فرلا}$ کی ایک مساوات سمجھ کر حل کرنے سے

$$\left.\begin{aligned} لا^۳ \frac{فرف_{لا}}{فرلا} &= \text{مستقل} = -۲ب \text{ فرض کرو} \\ \text{یا } \frac{فرف_{لا}}{فرلا} &= -\frac{۲ب}{لا^۳} \end{aligned}\right\} \quad ....(۷)$$

اس کو تکمل کرنے سے

$$ف_{لا} = \frac{ب}{لا^۲} + ا \quad ....(۸)$$

جہاں ا ایک مستقل ہے۔ اور (۲) سے

$$ف_ا = \frac{ب}{لا^۲} - ا \quad ....(۹)$$

اندرونی دباؤ $ف_ہ$ کی صورت میں اگر $لا = س_ا$ یعنی بیرونی نصف قطر صفحہ ۲۲۹
پر $ف_{لا} = 0$ اور $لا = س_ہ$ یعنی اندرونی نصف قطر پر $ف_{لا} = ف_ہ$ تو مساوات
(۸) سے :-

$$\text{ف}_{\text{ل}} = \text{ف}_{۲} \frac{\text{س}_{۲}^{۳}}{\text{س}_{۱}^{۳} - \text{س}_{۲}^{۳}} \left(\frac{\text{س}_{۱}^{۳}}{\text{لا}^{۳}} - ۱ \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

جو لا کے س۲ سے س۱ تک بدلنے سے $\text{ف}_{\text{ل}} = \text{ف}_{۲}$ سے $\text{ف}_{\text{ل}} = ۰$ تک بدلتا ہے اور مساوات (۹) سے

$$\text{ف}_{\text{ب}} = \text{ف}_{۲} \frac{\text{س}_{۲}^{۳}}{\text{س}_{۱}^{۳} - \text{س}_{۲}^{۳}} \left(\frac{\text{س}_{۱}^{۳}}{۲\,\text{لا}^{۳}} + ۱ \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۱)$$

جو اندرونی سطح لا = س۲ پر

$$\text{ف}_{\text{ما}} = \frac{\text{ف}_{۲}}{۲} \cdot \frac{\text{س}_{۱}^{۳} + ۲\,\text{س}_{۲}^{۳}}{\text{س}_{۱}^{۳} - \text{س}_{۲}^{۳}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

سے لے کر بیرونی سطح لا = س۱ پر

$$\text{ف}_{\text{ما}} = \frac{۳}{۲}\, \text{ف}_{۲} \frac{\text{س}_{۲}^{۳}}{\text{س}_{۱}^{۳} - \text{س}_{۲}^{۳}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

تک بدلتا ہے ۔

۱۲۴ - مرکب اُستوانے ــــــ شکل ۱۶۱ سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک موٹا اُستوانہ اندرونی دباؤ کے زیرِ عمل ہو تو اس کے اندرونی پہلو کے قریب دھات پر زور کی شدید حدت پڑیگی اور اس کی بیرونی سطح کے قریب زور اس سے بہت کم پڑیگا ۔ اندرونی دباؤ کے زیرِ عمل اس سے زیادہ یکساں تقسیم اس طرح حاصل ہو سکتی ہے کہ اندرونی دھات میں پہلے سے ایک حلقہ دباؤ (محیطی انفشار) موجود رکھا جائے ۔ یہ کئی طرح سے کیا جاتا ہے اور اس کا ایک طریقہ یہ ہے کہ ایک نلی کو دوسری نلی کے اوپر چڑھا کر سکڑایا جائے اور اس طرح اس مرکب نلی کے بیرونی حصے میں ابتدائی محیطی زور تنتنی ہوگا اور اندرونی حصے میں فشاری ہوگا ۔ اب اگر مرکب نلی پر اندرونی سیالی دباؤ عمل کرے تو زور کی کیفیت ابتدائی زور کا اور اکہری نلی میں اندرونی دباؤ سے پیدا ہونے والے زور کا (جو کہ دفعہ ۱۲۲ میں محسوب کیا گیا ہے) جبری مجموعہ

ہوگی - کسی مقام پر ابتدائی زور کی حدت بھی دفعہ ۱۲۲ کی طرح محسوب ہو سکتی ہے - ایک مرکب استوانے پر غور کرو جو دو نلیوں پر مشتمل ہے جن میں سے ایک دوسری کے اوپر سکڑائی گئی ہے - اگر اندرونی نصف قطر $\text{ر}_{\text{۲}}$ اور بیرونی $\text{ر}_{\text{۱}}$ ہو اور جوڑ پر نصف قطر $\text{ر}_{\text{۳}}$ ہو تو اندرونی نلی کے لیے

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{\text{ب}}{\text{لا}^{\text{۲}}} - \text{ا} \quad \cdots\cdots (۱)$$

$$\text{ف}_{\text{ما}} = \frac{\text{ب}}{\text{لا}^{\text{۲}}} + \text{ا} \quad \cdots\cdots (۲)$$

صفحہ ۳۵۰ $\text{ف}_{\text{لا}}$ فشاری صورت میں اور $\text{ف}_{\text{ما}}$ تننشی صورت ثبت ہوگا - اسی طرح بیرونی نلی کے لیے

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{لا}^{\text{۲}}} - \text{اَ} \quad \cdots\cdots (۳)$$

$$\text{ف}_{\text{ما}} = \frac{\text{بَ}}{\text{لا}^{\text{۲}}} + \text{اَ} \quad \cdots\cdots (۴)$$

جہاں اَ اور بَ دو مستقل ا اور ب سے علٰحدہ ہیں -

ان چار مستقلوں کو معین کرنے کے لیے جو چار مساواتیں ضروری ہیں اُن کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے (۱) $\text{ف}_{\text{لا}} = \cdot$ جب کہ $\text{لا} = \text{ر}_{\text{۲}}$ (۲) $\text{ف}_{\text{لا}} = \cdot$ جب کہ $\text{لا} = \text{ر}_{\text{۱}}$ (۳) $\text{لا} = \text{ر}_{\text{۳}}$ پر $\text{ف}_{\text{لا}}$ کی قیمت دونوں نلیوں کے لیے ایک ہی ہوگی (۴) $\text{لا} = \text{ر}_{\text{۳}}$ پر دونوں نلیوں کے محیطی زور کی حدتوں کے جبری فرق کو ے سے تقسیم کرنے سے ملاپ کے نصف قطر $\text{ر}_{\text{۳}}$ پر سکڑاو سے پہلے نصف قطروں کا جو فرق تھا وہ فرق بٹے $\text{ر}_{\text{۳}}$ حاصل ہوگا یعنی محیطی فسادوں کا جبری فرق حاصل ہوگا - اگر $\text{لا} = \text{ر}_{\text{۳}}$ پر $\text{ف}_{\text{لا}}$ کے لیے ایک قیمت نامزد کر دی جائے تو پھر شرائط (۳) اور (۴) غیر ضروری ہیں - شرط (۴) کو زیادہ تفصیل سے یوں سمجھو - نلیوں کے ملاپ پر بیرونی نلی کا محیطی تننشی فساد حسبِ ذیل ہے:-

$$\frac{\text{ف}_{\text{ما}}}{\text{ے}} + \frac{\text{ف}_{\text{لا}}}{\text{م ے}} \quad \cdots\cdots (۵)$$

اور اس طرح ابتدائی نصف قطر سکڑاؤ کے بعد بقدر حسبِ ذیل مقدار کے بڑھ جائیگا:-

$$\text{ر}_۱\left(\frac{\text{ف}}{\text{ے}}+\frac{\text{ف}_۱}{\text{م ے}}\right)=\text{ر}_۱\left\{\left(\frac{\text{ب}'}{\text{ر}_۱^۲}+\text{ا}'\right)\frac{۱}{\text{ے}}+\left(\frac{\text{ب}'}{\text{ر}_۱^۲}-\text{ا}'\right)\frac{۱}{\text{م ے}}\right\}\cdots(۶)$$

اسی طرح نصف قطر $\text{ر}_۱$ پر اندرونی نلی کے نصف قطر کا اضافہ حسبِ ذیل ہوگا:-

$$\text{ر}_۱\left\{\left(\frac{\text{ب}}{\text{ر}_۱^۲}+\text{ا}\right)\frac{۱}{\text{ے}}+\left(\frac{\text{ب}}{\text{ر}_۱^۲}-\text{ا}\right)\frac{۱}{\text{م ے}}\right\}\cdots\cdots(۷)$$

اس میں ا اور ب منفی مقداریں ہونگی اور فساد فشاری ہوگا۔ نصف قطر کا گھٹاؤ حسبِ ذیل ہوگا:

$$-\text{ر}_۱\left\{\left(\frac{\text{ب}}{\text{ر}_۱^۲}+\text{ا}\right)\frac{۱}{\text{ے}}+\left(\frac{\text{ب}}{\text{ر}_۱^۲}-\text{ا}\right)\frac{۱}{\text{م ے}}\right\}\cdots\cdots(۸)$$

اس طرح ملاپ پر ابتدائی نصف قطروں کا مجموعی فرق حسبِ ذیل ہوگا:-

$$\frac{\text{ر}_۱}{\text{ے}}\left\{\left(\frac{\text{ب}'}{\text{ر}_۱^۲}+\text{ا}'\right)-\left(\frac{\text{ب}}{\text{ر}_۱^۲}+\text{ا}\right)\right\}\cdots\cdots(۹)$$

کیونکہ شرط (۳) کی رُو سے $\frac{\text{ب}}{\text{ر}_۱^۲}-\text{ا}=\frac{\text{ب}'}{\text{ر}_۱^۲}-\text{ا}'$

اس طرح (۴) سے حسبِ ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$\frac{۱}{\text{ے}}\left(\frac{\text{ب}'-\text{ب}}{\text{ر}_۱^۲}+\text{ا}'-\text{ا}\right)=\frac{\text{ر}_۱\ \text{پر نصف قطروں کا ابتدائی فرق}}{\text{ر}_۱}\cdots\cdots(۱۰)$$

اس میں ا اور ب منفی مقداریں ہونگی (دیکھو ذیل میں مثال ۴)۔

اب نا معلوم مقداروں ا، ب، اَ اور بَ کو معلوم کرنے کی بجائے صفحہ ۳۵۱
یہ کر سکتے ہیں کہ چونکہ مساوات (۹) میں شریک ہونے والی مقداریں $\frac{\text{ب}'}{\text{ر}_۱^۲}+\text{ا}'$

اور $\frac{ب}{س_1^2}$ + ا مشترک سطح لا = $س_1$ پر علی الترتیب بیرونی اور اندرونی نلیوں میں $ف_{س}$ کی قیمتیں ہیں اس لیے دفعہ ۱۲۲ کی مساواتوں (۷) اور (۱۲) سے ان کی قیمتیں $ف_1$ کی رقوم میں لکھی جا سکتی ہیں صرف بیرونی نل کے لیے ترقیم میں ضروری ترمیم کرلینی ہوگی۔ اس طرح مساوات (۱۰) حسب ذیل ہو جائیگی :-

$$\frac{ف_1}{ی}\left\{\frac{س_1^2+س_0^2}{س_1^2-س_0^2}+\frac{س_2^2+س_1^2}{س_2^2-س_1^2}\right\}=\frac{ص}{2\,س_1} \quad \text{.........} \quad (11)$$

جہاں ص = اُستوانوں کے ملاپ لا = $س_1$ پر قطروں کا ابتدائی فرق۔ اگر ص معلوم ہو تو (۱۱) سے $ف_1$ معلوم ہوسکتا ہے اور پھر دونوں استوانوں کے اہم ترین زور دفعہ ۱۲۲ کے نتائج کی مدد سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

مثال ا — ۶ انچ اندرونی قطر کے ایک فولادی نل کو ۴۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کا اندرونی دباؤ برداشت کرنا ہے۔ اگر تننشی زور کی حدت کو ۶۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کی حد کے اندر رکھنا ہو تو نل کی ضروری موٹائی معلوم کرو۔ اگر اس نل پر $\frac{1}{20}$ انچ قطر کا ایک گول فولادی تار لپیٹا گیا ہو جس میں نل کے اندر دباؤ آنے سے پہلے ۱۵۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کا یکساں تناؤ ہو تو نل اور تار کی دھات کے اندر زور کی اوسط حدت ۴۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کا دباؤ آنے سے پہلے اور بعد معلوم کرو، (ا) اگر نل محور کی سمت میں کوئی زور برداشت نہ کرے (ب) اگر نل محور کی سمت کا پورا زور برداشت کرے (پوائی سن کی نسبت = $\frac{1}{4}$)۔

مساوات (۲) دفعہ ۱۱۹ سے نل کی موٹائی

$$ٹ = \frac{3 \times 4000}{6000} = 2 \text{ انچ}$$

تار کے مکمل لچھوں کی تعداد = ۲۰ فی انچ طولِ نل اور اس طرح نل کے ایک انچ طول پر مجموعی تناؤ

$$= 40 \times \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{1}{20}\right)^2 \times 15000 = 1178 \text{ پونڈ}$$

جس سے نل کے اندر ایک محیطی فشاری زور پیدا ہوگا جس کی حدت

= ۱۱۷۸ ÷ (٫۲ × ۲) = ۲۹۴۵ پونڈ فی مربع انچ

(ڈ) نل میں دباؤ کے آنے کے بعد ایک قطری مستوی پر پھٹاؤ پیدا کرنے والی قوتوں کی مزاحمت نل کی دیوار اور لپیٹن دونوں مل کر کرتے ہیں اور چونکہ ان میں فساد تقریباً مساوی ہوگا اور لچک کا مقیاس مساوی ہے اس لیے دونوں میں زور کی تبدیلی مساوی ہوگی - نل کے فی انچ طول مجموعی قوت

= ۴۰۰ × ۶ = ۲۴۰۰ پونڈ

اور مزاحم رقبہ

= (۲ × ٫۲) + (۴۰ × π/۴ × ۱/۴۰۰) = ٫۴۷۸۵۴ مربع انچ

صفحہ ۳۵۲

اس لیے زور کی حدت کی تبدیلی

= ۲۴۰۰ ÷ ٫۴۷۸۵۴ = ۵۰۱۵ پونڈ فی مربع انچ تناؤ

اس لیے نلی میں تناؤ

= ۵۰۱۵ - ۲۹۴۵ = ۲۰۷۰ پونڈ فی مربع انچ

اور تار میں تناؤ

= ۱۵۰۰۰ + ۵۰۱۵ = ۲۰۰۱۵ پونڈ فی مربع انچ

(ب) اگر نل کی دیوار میں دباؤ کی وجہ سے محیطی زور کی تبدیلی ز ہو تو چونکہ طولی زور مساوات (۴) دفعہ ۱۱۹ کی رُو سے ۳۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کے مساوی ہوگا اور چونکہ نلی اور تار کے حلقہ فساد مساوی ہونگے اس لیے

ز/سے + ۳۰۰۰/(م سے) = زَ/سے یا زَ = ز - ۷۵۰

جہاں زَ تار میں تننشی زور کا اضافہ ہے۔
اس لیے حسبِ سابق تناؤ کی مجموعی تبدیلی کو پھٹاؤ کے دباؤ فی انچ طول کے مساوی رکھنے سے

٫۴ × ز + ٫۰۷۸۵۴ × (ز − ۷۵۰) = ۲۴۰۰

ز = ۲۴۵۹ ⁄ ٫۴۷۸۵ = ۵۱۳۹ پونڈ فی مربع انچ

زَ = ۵۱۳۹ − ۷۵۰ = ۴۳۸۹ پونڈ فی مربع انچ

اس طرح نل میں تناؤ

= ۵۱۳۹ − ۲۹۴۵ = ۲۱۹۴ پونڈ فی مربع انچ

اور تار میں

= ۱۵۰۰۰ + ۴۳۸۹ = ۱۹۳۸۹ پونڈ فی مربع انچ

مثال ۲۔ ایک ۷ فٹ اندرونی قطر کے جوشارے کو ۲۰۰ پونڈ فی مربع انچ کا دباؤ برداشت کرنا ہے۔ تختیاں ۷⁄۸ انچ موٹی ہیں۔ اگر ایک طولی جوڑ میں ریوٹوں کی ایک قطار میں سے تختی کی تراش بے سوراخ تختی کی تراش کی ۷۰ فی صدی ہو تو جوڑ پر تختی میں اوسط تننشی زور معلوم کرو۔

سالم تختی کے لیے دفعہ ۱۱۹ سے

زِ = (۸ × ۴۲ × ۲۰۰) ⁄ ۷ = ۹۶۰۰ پونڈ فی مربع انچ

جس مقام پر تختی پورے رقبے کی ۷۰ فی صدی رہ گئی ہے وہاں حدت حسبِ ذیل ہوگی:—

$$\text{۹۶۰۰} \times \frac{\text{۱۰}}{\text{۷}} = \text{۱۳۷۱۴}$$ پونڈ فی مربع انچ

مثال ۳ - ایک باقوائی صدر نل کا اندرونی قطر ۶ انچ اور موٹائی ۲ انچ ہے، اور پانی کا دباؤ ۱۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہے - تراش کے ہر نقطے پر محیطی تناؤ اور نیم قطری فشار کی حدتیں معلوم کرو۔

مساوات (۳) دفعہ ۱۲۲ سے نیم قطری فشار کی حدت

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{\text{ب}}{\text{لا}^2} - \text{ا}$$

صفحہ ۳۵۳ اب لا = ۳ پر $\text{ف}_{\text{لا}} = \text{۱۰۰۰}$ اور لا = ۵ پر $\text{ف}_{\text{لا}} = \text{۰}$ رکھنے سے

$$\text{ا} = \frac{\text{۹۰۰۰}}{\text{۱۶}} \text{ ، } \text{ب} = \frac{\text{۲۲۵۰۰۰}}{\text{۱۶}}$$

اس لیے

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{\text{۹۰۰۰}}{\text{۱۶}}\left(\frac{\text{۲۵}}{\text{لا}^2} - \text{۱}\right)$$

اور مساوات (۴) دفعہ ۱۲۲ سے محیطی تناؤ کی حدت

$$\text{ف}_{\text{ہا}} = \frac{\text{۹۰۰۰}}{\text{۱۶}}\left(\frac{\text{۲۵}}{\text{لا}^2} + \text{۱}\right)$$

$\text{ف}_{\text{لا}}$ اور $\text{ف}_{\text{ہا}}$ کی قیمتیں دھاتی دیواروں کے تمام حصوں کے لیے شکل ۱۶۱ میں دکھائی گئی ہیں - نیم قطری اور محیطی فسادوں کو محسوب کرنے میں فرض کیا گیا ہے کہ سروں کے دباؤ سے ایک یکساں محوری تنشی زور پیدا ہوتا ہے جس کی حدت $\text{۱۰۰۰} \times \frac{\text{۳}^2}{\text{۵}^2 - \text{۳}^2} = \text{۵۶۲}$ پونڈ فی مربع انچ ہے - اندرونی سطح لا = ۳ پر :-

$$\text{ف}_{\text{ہا}} = \frac{\text{۹۰۰۰}}{\text{۱۶}}\left(\text{۱} + \frac{\text{۲۵}}{\text{۹}}\right) = \text{۲۱۲۶}$$ پونڈ فی مربع انچ

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \text{۱۰۰۰}$$ پونڈ فی مربع انچ

بیرونی سطح لا = ۵ پر

ف‌ما = ۹۰۰۰/۱۶ (۱+۱) = ۱۱۲۵ پونڈ فی مربع انچ

ف‌لا = ۰

مثال ۴ - ایک مرکب نلی ایک نلی کو دوسری کے اُوپر سُکڑا کر بنائی گئی ہے اور اس عمل کے بعد ابعاد حسبِ ذیل ہیں :- اندرونی قطر ۴ انچ ، بیرونی قطر ۸ انچ ، نلیوں کے ملاپ پر قطر ۶ انچ - اگر مشترک ۳ انچ نصف قطریہ نیم قطری دباؤ ۲۵۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہو تو مرکب اُستوانہ میں اعظم حلقہ تناؤ اور حلقہ دباؤ معلوم کرو- چڑھا کر سُکڑانے کے عمل سے پہلے اندرونی نلی کے بیرونی قطر اور بیرونی نلی کے اندرونی قطر میں کیا فرق ہونا چاہیے اور تپش کا کم سے کم کتنا فرق اس کے لیے درکار ہوگا کہ بیرونی نلی اندرونی کے اُوپر چڑھ جائے - اگر مرکب نلی پر ۱۵۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کا اندرونی دباؤ عمل کرے تو اندرونی ، بیرونی اور مشترک سطح پر محیطی زور معلوم کرو- اگر اس دباؤ کو برداشت کرنے کے لیے ایک اکہری نلی استعمال کی جائے جس میں اعظم محیطی تناؤ یہی ہو جو مرکب نلی میں ہے تو یہ اکہری نلی کتنی زیادہ وزنی ہوگی - پھیلاؤ کی شرح ۰۰۰۰۰۶۲ء فی درجہ فارن ہیٹ اور ے = ۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ لو-

دفعہ ۱۲۴ کی مساواتیں استعمال کرنے سے ، اندرونی نلی کے لیے :-

لا = ۲ پر ف‌لا = ۰ ، لا = ۳ پر ف‌لا = ۲۵۰۰

اس لیے ا = - ۴۵۰۰ ، ب = - ۱۸۰۰۰

اور بیرونی نلی کے لیے

لا = ۴ پر ف‌لا = ۰ ، لا = ۳ پر ف‌لا = ۲۵۰۰

اس لیے اَ = ۲۲۵۰۰/۷ ، بَ = ۳۶۰۰۰۰/۷

صفحہ ۳۵۴

اندرونی نلی :۔

لا = ۲ پر $ف_ا = -\frac{۱۸۰۰۰}{۴} - ۴۵۰۰ = -۹۰۰۰$ یعنی ۹۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ فشار

لا = ۳ پر $ف_ا = -\frac{۱۸۰۰۰}{۹} - ۴۵۰۰ = -۶۵۰۰$ یعنی ۶۵۰۰ پونڈ فی مربع انچ فشار

بیرونی نلی :۔

لا = ۳ پر $ف_ا = \frac{۳۶۰۰۰۰}{۹\times۷} + \frac{۲۲۵۰۰}{۷} = ۸۹۲۹$ پونڈ فی مربع انچ (تناؤ)

لا = ۴ پر $ف_ا = \frac{۳۶۰۰۰۰}{۱۶\times۷} + \frac{۲۲۵۰۰}{۷} = ۶۴۲۹$ " " " "

بیرونی نلی میں ۳ انچ نصف قطر پر محیطی تنشی فساد

$$= \frac{۸۹۲۹}{۳۰\times۱۰^۶} + \frac{۲۵۰۰}{۳۰\times۱۰^۶}\,\frac{۱}{م} = ۰.۰۰۰۲۹۷۶ + \frac{۲۵۰۰}{۳۰\times۱۰^۶\times م}$$

جہاں $\frac{۱}{م}$ پوائی سن کی نسبت ہے۔

۳ انچ نصف قطر پر اندرونی نلی میں محیطی فشاری فساد

$$= -\frac{۶۵۰۰}{۳۰\times۱۰^۶} - \frac{۲۵۰۰}{۳۰\times۱۰^۶}\,\frac{۱}{م} = -۰.۰۰۰۲۱\dot{۶} - \frac{۲۵۰۰}{۳۰\times۱۰^۶\times م}$$

اس لیے ملاپ کی سطح پر ابتدائی قطروں کا مجموعی فرق

$$= ۶\,(۰.۰۰۰۲۹۷۶ + ۰.۰۰۰۲۱\dot{۶}) = ۶\times۰.۰۰۰۵۱۴۳ = ۰.۰۰۳۰۸۶ \text{ انچ}$$

اندرونی نلی پر بیرونی کو چڑھانے کے لیے تپش کا اقل فرق، جو ضروری ہے

$$= ۰.۰۰۰۵۱۴۳ \div ۰.۰۰۰۰۰۶۲ = ۸۳^\circ \text{ ف}$$

جب ۱۵۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کا اندرونی دباؤ عمل کرے تو نئے مستقل و اور ب استعمال کرنے سے دفعہ ۱۴۲ سے :۔

چونکہ لا = ۴ پر فِ~لا~ = ۰ اور لا = ۲ پر فِ~لا~ = ۱۵۰۰۰

اس لیے ا = ۵۰۰۰ ، ب = ۸۰۰۰۰

اور صرف اندرونی دباؤ کی وجہ سے

لا = ۲ پر فِ~ما~ = ۸۰۰۰۰/۴ + ۵۰۰۰ = ۲۵۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ

لا = ۳ پر فِ~ما~ = ۸۰۰۰۰/۹ + ۵۰۰۰ = ۱۳۸۸۹ " " "

لا = ۴ پر فِ~ما~ = ۸۰۰۰۰/۱۶ + ۵۰۰۰ = ۱۰۰۰۰ " " "

ان میں سکڑاؤ کے ابتدائی زوروں کو شامل کرنے سے حاصل محیطی تناؤ صفحہ ۲۵۵
حسب ذیل ہونگے:-

لا = ۲ پر ۲۵۰۰۰ − ۹۰۰۰ = ۱۶۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ

لا = ۳ پر ۱۳۸۸۹ − ۶۵۰۰ = ۷۳۸۹ " " " (اندرونی نلی)

لا = ۳ پر ۱۳۸۸۹ + ۸۹۲۹ = ۲۲۸۱۸ " " " (بیرونی نلی)

لا = ۴ پر ۱۰۰۰۰ + ۶۴۲۹ = ۱۶۴۲۹ " " "

ساری نلی کے اندر زور کے تغیرات شکل ۱۶۲ میں دکھائے گئے ہیں۔

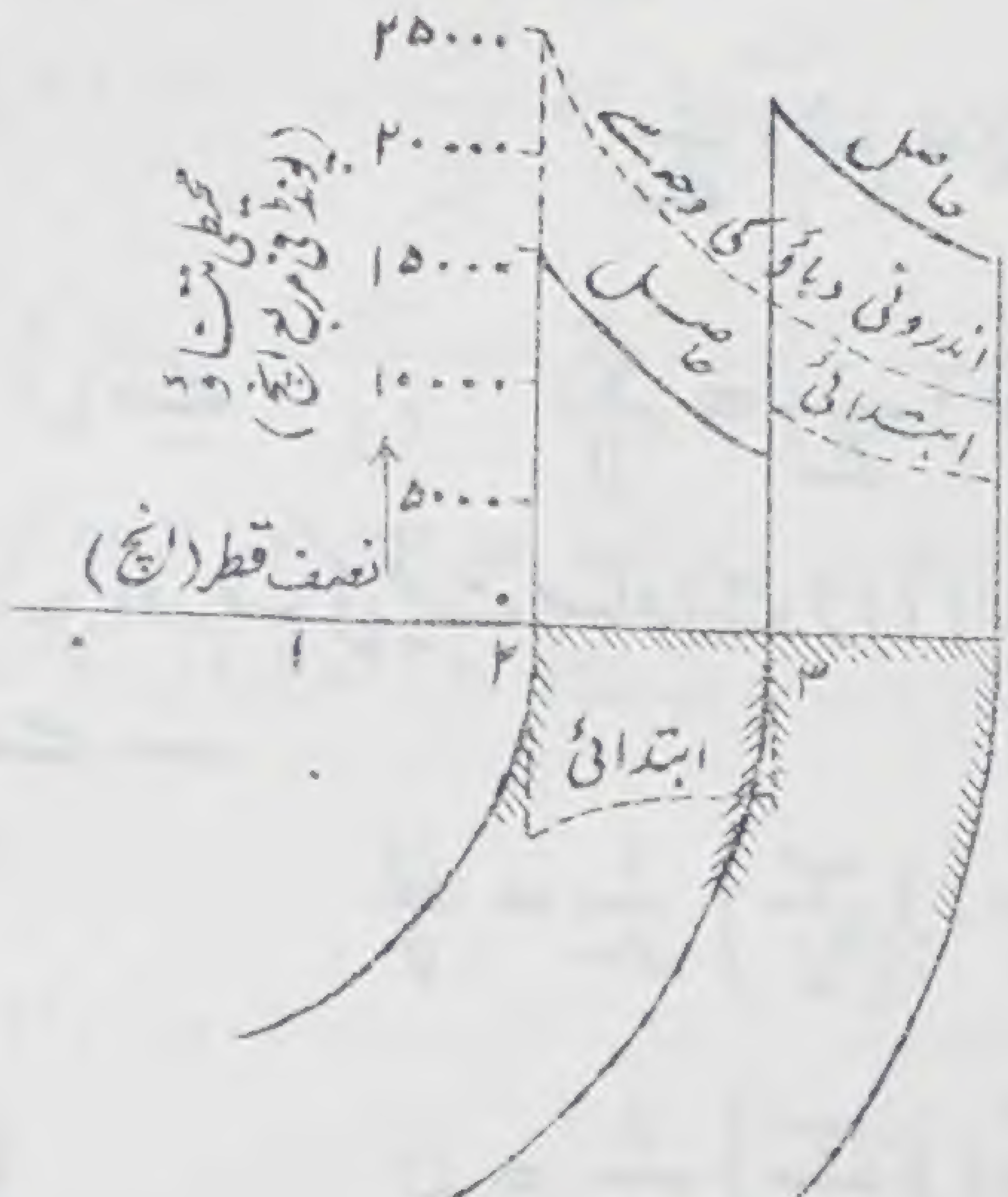
اگر اکہری نلی استعمال کی جائے جس میں اعظم تنشی زور ۲۲۸۱۸ پونڈ فی مربع انچ ہو، جو اندرونی سطح پر ہوگا، تو

۲۲۸۱۸ = ا + ب/۴

۱۵۰۰۰ = ا − ب/۴

اس لیے ب = ۷۵۶۳۶ ، ا = ۳۹۰۹

بیرونی سطح پر :-



شکل ۱۶۲

$$ف_ا = ۰ = ۳۹۰۹ - \frac{۷۵۶۳۶}{لا^۲}$$

$$لا^۲ = ۱۹٫۳۵$$

اکہری نلی میں وزن کی زیادتی

$$= \frac{لا^۲ - ۱۶}{۱۶ - ۴} = \frac{۳٫۳۵}{۱۲} = \text{تقریباً}$$

۲۸ فی صدی

۱۲۴ ا - ٹھوس ڈھرول پر شکنجے —— ایک اُستوانے پر دوسرے کو سُکڑانے یا شکنجہ کرنے کی ایک دلچسپ خاص صورت یہ ہے کہ اندرونی اُستوانے کا اندرونی قطر غائب ہوجائے یعنی اندرونی اُستوانہ ایک ٹھوس ڈھرا ہو - دفعہ ۱۲۴ ہی کی ترقیم کو استعمال کرتے ہوئے تعمیم کی خاطر فرض کرو کہ ینگ کا مقیاس بیرونی اُستوانے یا قبے کے لیے ہے اور ٹھوس ڈھرے کے لیے، جس پر قبہ سُکڑایا گیا ہے یا شکنجہ کیا گیا ہے، ہے ہے۔ اور ان کے لیے پوائسن کی نسبت علی الترتیب مَ اور م ہے - فرض کرو کہ ٹھوس ڈھرے کے مرکز سے فاصلہ لا پر کسی نقطے کا نیم قطری باہر دار ہٹاؤ ی ہے جس کی وجہ سے لا بدل کر لا + ی ہوجاتا ہے (ی موجودہ صورت میں منفی ہوگا) - نصف قطر لا پر محیطی فساد

$$= \frac{۲\pi (لا + ی) - ۲\pi لا}{۲\pi لا} = \frac{ی}{لا} \quad \text{..........(۱)}$$

صفحہ ۳۵۶ لیکن یہ محیطی فساد حسب ذیل کے مساوی ہونا چاہیے :-

$$\frac{1}{\text{ے}}\left(\text{ف}_{\text{ما}} + \frac{1}{\text{م}}\cdot\text{ف}_{\text{لا}}\right) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اس لیے

$$\frac{\text{ی}}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{ے}}\left(\text{ف}_{\text{ما}} + \frac{1}{\text{م}}\cdot\text{ف}_{\text{لا}}\right) \quad\ldots\ldots\ldots (۳)$$

$\text{ف}_{\text{لا}}$ اور $\text{ف}_{\text{ما}}$ کی قیمت مساوات (۱) اور (۲) دفعہ ۱۲۴ سے لے کر درج کرنے سے —

$$\frac{\text{ی}}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{ے}}\left\{\frac{\text{ب}}{\text{لا}^2}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right) + \text{ا}\left(1-\frac{1}{\text{م}}\right)\right\} \quad\ldots\ldots\ldots (۴)$$

یا

$$\text{ی} = \frac{1}{\text{ے}}\left\{\frac{\text{ب}}{\text{لا}}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right) + \text{ا}\,\text{لا}\left(1-\frac{1}{\text{م}}\right)\right\} \quad\ldots\ldots (۵)$$

ٹھوس ڈھرے میں (برخلاف ایسے ڈھرے کے جس میں اندرونی سوراخ موجود ہو خواہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو) لا = ۰ پر ی = ۰ اور (۵) میں اس کو درج کرنے سے صریحاً ب = ۰، اس لیے مساوات (۱) اور (۲) دفعہ ۱۲۴ سے

$$-\text{ف}_{\text{ما}} = +\text{ف}_{\text{لا}} = -\text{ا} = \text{مستقل} \quad\ldots\ldots\ldots (۶)$$

(یہ ایک ثبت مقدار ہوگی) جو سارے ڈھرے کا اور نیز ڈھرے کی سطح پر یعنی $\text{لا} = \text{سہ}_1$ پر قبے کا نیم قطری فشاری زور ہے۔

یعنی

$$\text{ف}_1 = -\text{ا} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

جو ایک ثبت مقدار ہوگی۔

فرض کرو کہ قبے کے اندر $\text{لا} = \text{سہ}_1$ یا $\frac{1}{2}$ ق پر محیطی تننشی اکائی زور ز_1 ہے اور فرض کرو کہ صہ = ڈھرے کے ابتدائی قطر کی زیادتی قبے کے ابتدائی اندرونی قطر پر جس کو اکثر "دوتننگ" رعایت کہا جاتا ہے۔ $\text{لا} = \text{سہ}_1$ پر مجموعی محیطی فساد (یعنی قبے کا تننشی فساد + ڈھرے کا فشاری فساد)

حسب ذیل ہوگا :-

$$\frac{\text{ف}_1}{\text{سے}} - \frac{\text{ف}_1}{\text{م}\,\text{سے}} + \frac{\text{ز}_1}{\text{سے}'} + \frac{\text{ف}_1}{\text{م}\,\text{سے}'} = \frac{\text{صہ}}{\text{ق}} \quad \cdots\cdots (\text{۸})$$

یا

$$\text{ف}_1 \left\{ \frac{1}{\text{سے}}\left(1 - \frac{1}{\text{م}}\right) + \frac{1}{\text{م}\,\text{سے}'} \right\} + \frac{\text{ز}_1}{\text{سے}'} = \frac{\text{صہ}}{\text{ق}} \quad \cdots\cdots (\text{۹})$$

نیز مساوات (۳) دفعہ ۱۲۴ سے اور لا = سا_1 پر $\text{ف}_{\text{لا}}$ = ف_1 اور لا = سا_2 پر $\text{ف}_{\text{لا}}$ = ۰ لکھنے سے یا مساوات (۷) دفعہ ۱۲۲ سے بالراست اور ترقیم میں ضروری ترمیم کرنے سے

$$\text{ز}_1 = \text{ف}_1 \frac{\text{سا}_2^2 + \text{سا}_1^2}{\text{سا}_2^2 - \text{سا}_1^2} \quad \cdots\cdots (\text{۱۰})$$

(۹) میں ز_1 کی اس قیمت کو مندرج کرنے سے

$$\frac{\text{صہ}}{\text{ق}} = \frac{\text{ف}_1}{\text{سے}} \left\{ \frac{\text{م}-1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{سے}}{\text{سے}'} + \frac{\text{سے}}{\text{سے}'} \times \frac{\text{سا}_2^2 + \text{سا}_1^2}{\text{سا}_2^2 - \text{سا}_1^2} \right\} \quad \cdots\cdots (\text{۱۱})$$

اور

$$\frac{\text{صہ}}{\text{ق}} = \frac{\text{ز}_1}{\text{سے}} \left\{ \left(\frac{\text{م}-1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{سے}}{\text{سے}'} \right) \frac{\text{سا}_2^2 - \text{سا}_1^2}{\text{سا}_2^2 + \text{سا}_1^2} + \frac{\text{سے}}{\text{سے}'} \right\} \quad \cdots\cdots (\text{۱۲})$$

صفحہ ۳۵۷ اگر قبے کی موٹائی اور قطر کی نسبت $\frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}$ = عہ تو (۱۲) کو یوں لکھا جاسکتا ہے :-

$$\frac{\text{صہ}}{\text{ق}} = \frac{\text{ز}_1}{\text{سے}} \left\{ \left(\frac{\text{م}-1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{سے}}{\text{سے}'} \right) \frac{2\,\text{عہ}(1+\text{عہ})}{2\,\text{عہ}^2 + 2\,\text{عہ} + 1} + \frac{\text{سے}}{\text{سے}'} \right\} \quad \cdots (\text{۱۲ا})$$

یا اگر قبے کے بیرونی اور اندرونی قطر کی نسبت $\frac{\text{ق} + 2\text{ٹ}}{\text{ق}} = \frac{\text{سا}_2}{\text{سا}_1}$ = ک تو

$$\frac{\text{صہ}}{\text{ق}} = \frac{\text{ز}_1}{\text{سے}} \left\{ \left(\frac{\text{م}-1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{سے}}{\text{سے}'} \right) \frac{\text{ک}^2 - 1}{\text{ک}^2 + 1} + \frac{\text{سے}}{\text{سے}'} \right\} \quad \cdots\cdots (\text{۱۲ب})$$

(۱۲)، (۱۲ا) یا (۱۲ب) سے دی ہوئی اشیا کے لیے قبے میں دی ہوئی

تنگی $\frac{\text{صہ}}{\text{ق}}$ سے پیدا ہونے والا اعظم زور آسانی سے معلوم ہوسکتا ہے۔ یا اگر زور کی اعظم حد دی ہوئی ہو تو قبے کی ضروری موٹائی معلوم کی جاسکتی ہے جو تنگی $\frac{\text{صہ}}{\text{ق}}$ سے پیدا ہونے والے اعظم زور کو اس حد کے اندر رکھے یا اگر قبے کے ابعاد دیے ہوئے ہوں تو تنگی $\frac{\text{صہ}}{\text{ق}}$ معلوم کی جاسکتی ہے جس سے زور دی ہوئی حدود کے اندر رہے۔

اگر قبہ اور ڈھرا ایک ہی شے کے ہوں تو ے = ےَ اور م = مَ اور (۱۲ ا) حسبِ ذیل ہو جاتی ہے :—

$$\frac{\text{صہ}}{\text{ق}} = \frac{\text{ن}_1}{\text{ے}}\left\{\frac{\text{۴ ع}^2 + \text{۴ ع} + 1}{\text{۲ ع}^2 + \text{۲ ع} + 1}\right. \text{ یا } \frac{\text{ن}_1}{\text{ے}} \cdot \frac{\text{۲ ک}^2}{\text{ک}^2 + 1} \quad \ldots\ldots (13)$$

یا

$$\text{ن}_1 = \text{ے} \times \frac{\text{صہ}}{\text{ق}} \times \frac{\text{۲ ع}^2 + \text{۲ ع} + 1}{\text{۴ ع}^2 + \text{۴ ع} + 1} \text{ یا } \text{ے} \times \frac{\text{صہ}}{\text{ق}} \times \frac{\text{ک}^2 + 1}{\text{۲ ک}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

ن₁ کے بدلنے کی حد ے × $\frac{\text{صہ}}{\text{ق}}$ سے لے کر جو ایک بے انتہا پتلے قبے کی صورت میں ہوتی ہے $\frac{1}{2}$ ے × $\frac{\text{صہ}}{\text{ق}}$ تک ہے جو ایک بے انتہا موٹے قبے کی صورت میں ہوتی ہے۔

یہ صورت بہت اہم ہے کہ قبہ ڈھلے لوہے کا اور ڈھرا فولادی ہو۔ اس کے لیے ے = ۲ ےَ = ۳۰ × ۱۰⁶ پونڈ فی مربع انچ اور م = مَ = ۴ لینے سے (۱۲ ا) سے حاصل ہوگا :—

$$\text{ن}_1 = 30 \times 10^6 \times \frac{\text{صہ}}{\text{ق}} \times \frac{\text{۲ ع}^2 + \text{۲ ع} + 1}{\text{۵٫۶ ع}^2 + \text{۵٫۶ ع} + 2} \text{ یا } \text{ے} \times \frac{\text{صہ}}{\text{ق}} \times \frac{\text{۴ (ک}^2 + 1)}{\text{۱۳ ک}^2 + 3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

جو $\text{سے} \times \frac{\text{صہ}}{\text{ق}}$ سے لے کر (جو بے انتہا پتلے قبے کے لیے ہے) اس کے ۶۲، گنے تک (جو بے انتہا موٹے قبے کے لیے ہے) بدلتا ہے۔

دی ہوئی تنگیوں کے لیے اعظم حلقہ زور $ز_۱$ کی قیمتیں فولادی دُھروں پر ڈھلے لوہے اور فولاد کے قبوں کے لیے شکل ۱۶۲ م میں دکھائی گئی ہیں۔ تجویز کی اغراض کے لیے اس طرح کا نقشہ مساوات (۱۴) اور (۱۵) سے کسی بڑے پیمانے پر قبے کی موٹائی کی اُن حدود کے اندر کھینچا جا سکتا ہے جو کسی خاص دستور میں مستعمل ہوں۔ $\frac{\text{صہ}}{\text{ق}}$ کی کسی دی ہوئی قیمت صفحہ ۳۵۸
کے لیے نقشے سے ظاہر ہے کہ قبے کی موٹائی کے قابل لحاظ اضافے سے $ز_۱$ کی کمی مقابلۃً کتنی کم ہوتی ہے۔ لیکن دی ہوئی تنگی $\frac{\text{صہ}}{\text{ق}}$ کے لیے قبے کی موٹائی کے اضافے سے گرفت کے دباؤ $ف_۱$ میں قابل لحاظ اضافہ عمل میں آتا ہے۔ کیونکہ جس صورت میں قبہ اور دُھرا ایک ہی شے کے ہوں (۱۱) سے :-

$$ف_۱ = \text{سے} \times \frac{\text{صہ}}{\text{ق}} \times \frac{۲\,\text{عہ}\,(\text{عہ}+۱)}{۴\,\text{عہ}^۲+۴\,\text{عہ}+۱} \;\text{یا}\; \text{سے} \times \frac{\text{صہ}}{\text{ق}} \times \frac{ک^۲-۱}{۲\,ک^۲} \quad \cdots (۱۶)$$

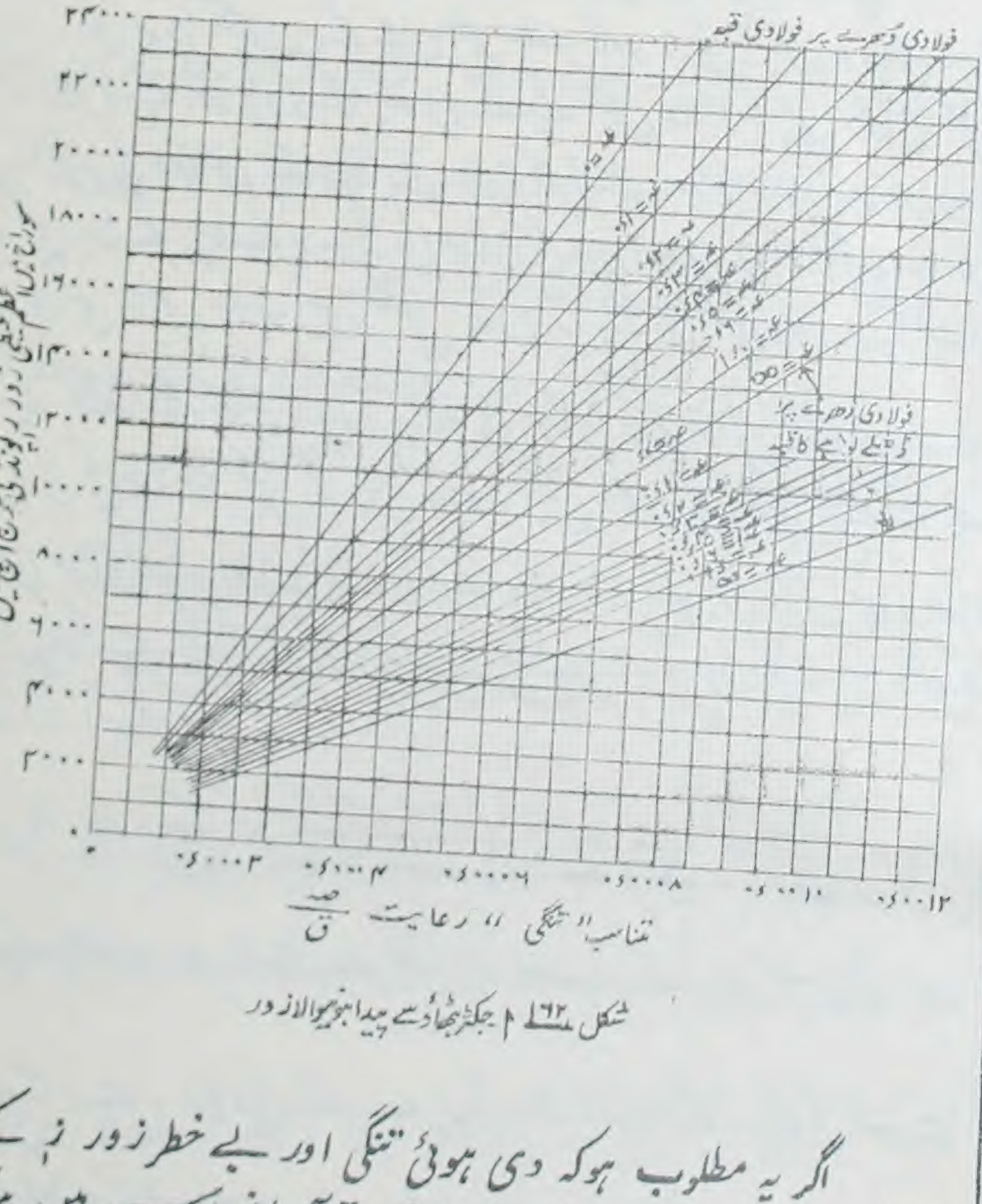
یہ عہ کے بڑھنے سے بڑھتا ہے لیکن عہ $= \infty$ کے لیے اس کی حد

$\frac{۱}{۲}\,\text{سے} \times \frac{\text{صہ}}{\text{ق}}$ ہے۔ فولادی دُھرے پر ڈھلے لوہے کے قبے کی صورت $\text{ق}\,\text{سے} = ۲\,\text{سے}$ اور $م = م$ لینے سے

$$ف_۱ = \text{سے} \times \frac{\text{صہ}}{\text{ق}} \times \frac{۲\,\text{عہ}\,(\text{عہ}+۱)}{۲ + \text{عہ}\,۴،۵ + \text{عہ}^۲\,۶،۵} \quad \cdots\cdots (۱۷)$$

یہ عہ کے بڑھنے سے بڑھتا ہے لیکن اس کی ایک بالائی حد ہے جو

تقریباً ۱۳ء ۱ سے × $\frac{\text{صہ}}{\text{ق}}$ ہے۔



شکل ۱۶۲ م جکڑ بٹھاؤ سے پیدا ہونے والا زور

صفحہ ۳۵۹ اگر یہ مطلوب ہو کہ دی ہوئی تنگی اور بے خطر زور ز کے لیے قبے کی موٹائی بالراست پڑھ لی جائے تو آسانی اس میں ہوگی کہ $\frac{\text{صہ}}{\text{ق}}$ کے اساس پر عہ کا منحنی کھینچا جائے۔

زور کا اعظم فرق —— جن صورتوں میں قبے کی لچکدار مضبوطی کو اعظم جزی زور سے ناپا ہو اُن میں زور کے اعظم جبری فرق پر غور کرنا

ضروری ہے جو موجودہ صورت میں $ز_ا + ف_ا$ کے مساوی ہے - اگر قبہ اور دُھرا ایک ہی شے کے ہوں تو (۱۴) اور (۱۶) سے

$$ز_ا + ف_ا = ے \times \frac{صہ}{ق} \quad \text{.................} \quad (18)$$

یہ عہ پر منحصر نہیں اور اس طرح قبے کی موٹائی پر منحصر نہیں اور صرف "تنگی" پر اور شے کے خواص پر منحصر ہے - فولادی دُھرے پر فولادی قبے کے لیے اِس صورت میں یہ قاعدہ استعمال کیا جاسکتا ہے - فولادی دُھرے پر ڈھلے لوہے کے قبے کی صورت میں (۱۵) اور (۱۷) سے:

$$ز_ا + ف_ا = ے \times \frac{صہ}{ق} \times \frac{۴ عہ^۲ + ۴ عہ + ۱}{۶ء۵ عہ^۲ + ۶ء۵ عہ + ۴} \quad \text{.........} \quad (19)$$

اس میں جو جزوِ ضربی عہ پر منحصر ہے وہ صرف ۵ء۰ سے ۶۱۵ء۰ تک بڑھتا ہے کیونکہ عہ = ۰ پر اس کی قیمت ۵ء۰ ہے اور عہ = ∞ پر ۶۱۵ء۰ - اس طرح زور کا فرق قبے کی موٹائی کے بڑھنے سے کسی قدر بڑھتا ہے لیکن اعظم جزی زور کو ڈھلے لوہے جیسی پھوٹک شے کے لیے مضبوطی کا معیار نہیں قرار دیا جاسکتا - دیگر صورتوں کے لیے $ز_ا + ف_ا$ کی قیمت (۱۱) اور (۱۲) سے معلوم ہوسکتی ہے -

مثال ۱ - اگر ایک ڈھلے لوہے کے پہیئے کے قبے کی موٹائی سُوراخ کے قطر کی ۴ء گنی ہو اور پھٹاؤ کے زور کو ۳۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ نہیں ہونا ہے تو ایک فولادی دُھرے کو پہنانے کے لیے کتنی رعایت رکھی جاسکتی ہے -

(۱۵) میں $ز_ا = ۳۰۰۰$ ، اور عہ = ۴ء لکھنے سے

$$۳۰۰۰ = ۳۰ \times ۱۰^۶ \times \frac{صہ}{ق} \times ۳۷۶ء$$

$$\frac{صہ}{ق} = \frac{۱}{۳۷۶۰} = ۰۰۰۲۶۶ء$$

یا

$$ص = ۲۶۶ ، ۰۰۰ \times \text{ڈھرے کا قطر}$$

اگر شکل ۱۶۲ ا کافی بڑے پیمانے پر کھینچی جائے تو اس نتیجے کو اس سے بالراست پڑھ لیا جاسکتا ہے۔

مثال ۲ ـــ اگر ایک فولادی ڈھرے کو فولادی قبے میں پہنانے میں ڈھرے کے قطر کے $\frac{۱}{۱۶۰۰}$ کی رعایت رکھی جائے تو قبے کی ضروری موٹائی معلوم کرو کہ پھٹاؤ کا زور ۱۲۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو۔

(۱۸) میں ز = ۱۲۰۰۰، ے = ۳۰ × ۱۰^۶ اور $\frac{ص}{ق} = \frac{۱}{۱۶۰۰}$ رکھنے سے صفحہ ۳۶۰

$$۱۲۰۰۰ = ۳۰ \times ۱۰^{۶} \times \frac{۱}{۱۶۰۰} \times \frac{۳عہ^{۲} + ۲عہ + ۱}{۴عہ^{۲} + ۴عہ + ۱}$$

یا ۴۱عہ^۲ + ۴۱عہ − ۹ = ۰

عہ = ۰.۲۴۵ یعنی ٹ = ڈھرے کے قطر کا ۰.۲۴۵ گنا۔

مثال ۳ ـــ ایک فولادی قبے میں فولادی ڈھرے کو پہنانے میں اعظم رعایت کیا رکھی جا سکتی ہے کہ زور کا اعظم فرق ۱۲۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو۔

(۱۸) سے ـــ

$$\frac{ص}{ق} = \frac{۱۲۰۰۰}{۳۰ \times ۱۰^{۶}} = \frac{۱}{۲۵۰۰} \text{ یا } ۰.۰۰۰۴$$

بمقابلہ $\frac{۱}{۱۶۰۰}$ یا ۰.۰۰۰۶۲۵ کے جو مثال ۲ میں تھا۔

۱۲۴ ب - بیرونی لپیٹن کے ذریعے محکم کیے ہوئے اُستوانے اور نلیاں ـــ

دفعہ ۱۲۴ میں اُن مرکب اُستوانوں سے بحث کی جا چکی ہے جن کو اندرونی دباؤ کی باکفایت مزاحمت کے لیے اس طرح تیار کیا جاتا ہے کہ ایک بیرونی کھوکھلے اُستوانے کو ایک اندرونی اُستوانے پر

بزور چڑھایا جاتا ہے یا چڑھا کر سکڑایا جاتا ہے جس کی وجہ سے اندرونی اُستوانہ اندرونی دباؤ کے آنے سے پہلے فشار میں ہوتا ہے۔ اس عمل میں توسیع کی جاسکتی ہے یعنی متعدد اُستوانے ایک دوسرے پر چڑھائے جا سکتے ہیں اور ان کے ابعاد اور سکڑاؤ کو اس طرح ترتیب دیا جاسکتا ہے کہ ہر حصے میں آخری زور ایک معینہ اعظم قیمت کو پہنچے۔ اس عمل پر نظری اعتراض یہ ہے کہ سارے مادے میں زور اعظم قیمت کو نہیں پہنچتا اور اس سے بڑا عملی اعتراض یہ ہے کہ کسی اُستوانے کے بیرونی قطر اور اس کے اُوپر کے اُستوانے کے اندرونی قطر میں جو بہت خفیف سا فرق رکھا جاتا ہے اس کو محسوب کرنا تو آسان ہے لیکن ملبے اسطوانوں کو خرادنے اور ان میں سُوراخ کرنے میں اس کی عملی پابندی مشکل ہے۔

ایک متبادل طریقہ جس کا سب میں اہم استعمال بندوق سازی میں کیا گیا ہے یہ ہے کہ ایک اندرونی استوانہ یا نلی استعمال کی جائے جس کا تراشی رقبہ اتنا ہو کہ اگر محوری سمت میں کوئی زور ہوں تو اُن کو برداشت کرلے اور اس کے گرد مستطیلی تراش کے "تار" یا پٹیاں تناؤ کے تحت لپیٹی جائیں۔

لپیٹن کا تناؤ، کم از کم نظری طور پر، اس طرح ترتیب دیا جاسکتا ہے کہ آخر میں اُستوانے کے اندرونی دباؤ کے تحت ساری لپیٹن میں ایک مستقل زور یا فشار دیا زور کا فرق اور اُستوانے کی اندرونی سطح میں یہی یا کوئی اور دیا ہوا زور (یا دیا ہوا "معادل زور") پیدا کرے۔ دیے ہوئے اُستوانے اور دیے ہوئے دباؤ اور زور کی حدود کے لیے لپیٹن کی ضروری گہرائی محسوب ہوسکتی ہے۔

ذیل میں یہ فرض کیا جائیگا کہ استوانے کے محور کے متوازی قوتوں کی مزاحمت کرنے کو چھوڑ کر اور ہر لحاظ سے لپیٹن اُستوانے کے اندرونی دباؤ کے تحت اُسی طرح کا عمل کرتی ہے جس طرح کا کہ سکڑا کر بٹھائی ہوئی نلیوں سے مرکب استوانے کی مسلسل دھات کرتی ہے۔

صفحہ ۳۶۱ ترقیم دفعات ۱۲۲ اور ۱۲۴ کی استعمال کی جائیگی - $\text{ف}_{\text{ل}}$ اور $\text{ف}_{\text{ہا}}$ علی الترتیب نیم قطری فشاری اور محیطی تنشی زور اندرونی نلی پر لپیٹن لپیٹنے کے بعد کے ہیں اور $\text{فَ}_{\text{ل}}$ اور $\text{فَ}_{\text{ہا}}$ وہ زور ہیں جو دھماکو سے یا کسی اَور اندرونی دباؤ سے پیدا ہوں اور جن کو دفعہ ۱۲۲ کی طرح محسوب کیا جائیگا۔

صورت (۱) - تار اور نلی میں حاصل اعظم زور کے فرق کی ایک مقررہ حد زً -

تب سارے تار میں

$$\text{ف}_{\text{ل}} + \text{ف}_{\text{ہا}} + \text{فَ}_{\text{ل}} + \text{فَ}_{\text{ہا}} = \text{زً} \quad \ldots\ldots (۱)$$

فرض کرو کہ اندرونی دباؤ ("بارود" کا یا اَور کسی چیز کا) $\text{فَ}_{۲}$ ہے۔ اور دفعہ ۱۲۴ کی طرح $\text{س}_{۲}$، $\text{س}_{۳}$ اور $\text{س}_{۱}$ علی الترتیب مرکب استوانے کے بیرونی، اندرونی اور درمیانی نصف قطر ہیں۔

مساوات (۷ ا) دفعہ ۱۲۲ کی رو سے نلی اور لپیٹن میں ہر جگہ

$$\text{فَ}_{\text{ل}} + \text{فَ}_{\text{ہا}} = \frac{۲\,\text{فَ}_{۲}}{\text{لا}^{۲}} \times \frac{\text{س}_{۳}^{۲}\,\text{س}_{۲}^{۲}}{\text{س}_{۲}^{۲} - \text{س}_{۳}^{۲}} = \text{ج}\,\frac{\text{س}_{۲}^{۲}}{\text{لا}^{۲}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

جہاں

$$\text{ج} = ۲\,\text{فَ}_{۲}\,\frac{\text{س}_{۳}^{۲}}{\text{س}_{۲}^{۲} - \text{س}_{۳}^{۲}}$$

(۲) کو (۱) میں سے تفریق کرنے سے لپیٹن میں

$$\text{ف}_{\text{ل}} + \text{ف}_{\text{ہا}} = \text{زً} - \text{ج}\,\frac{\text{س}_{۲}^{۲}}{\text{لا}^{۲}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور مساوات (۱) دفعہ ۱۲۲ سے

$$\text{ف}_{\text{ہا}} = -\,\text{ف}_{\text{ل}} - \text{لا}\,\frac{\text{فرف}_{\text{ل}}}{\text{فرلا}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اس لیے لپیٹن میں

ف_ما + ف_لا = - لا (فرف_لا / فرلا) = ز'' - ج سما_۲² / لا² .... (۵)

یا (ج سما_۲² / لا³ - ز'' / لا) فرلا = فرف_لا .... (۶)

یا ف_لا = - ج سما_۲² / ۲ لا² - ز'' لوک لا + ا (مستقل) .... (۷)

لا = سما_۲ پر ف_لا = ۰ رکھنے سے

ا = ج سما_۲² / ۲ سما_۲² + ز'' لوک سما_۲ .... (۸)

اور ف_لا = (ج سما_۲² / ۲) (۱ / سما_۲² - ۱ / لا²) + ز'' لوک سما_۲ / لا .... (۹)

صفحہ ۳۶۲

اور لپیٹن اور نلی کی مشترک سطح لا = سما_۱ پر

ف_۱ = (ج سما_۲² / ۲) (۱ / سما_۲² - ۱ / سما_۱²) + ز'' لوک سما_۲ / سما_۱ .... (۱۰)

اس سے مساوات (۱۱) اور (۱۲) دفعہ ۱۲۲ کی مدد سے نلی میں ہر جگہ ف_لا اور ف_ما معلوم ہو سکتے ہیں - خاص طور پر مساوات (۱۳) دفعہ ۱۲۲ سے

ف_ما۲ = - ۲ ف_۱ سما_۱² / (سما_۲² - سما_۱²) .... (۱۱)

اور ف_لا۲ = ۰ .... (۱۲)

اور (۲) سے ف_لا۲ + ف_ما۲ = ج .... (۱۳)

اس لیے (۱۱)، (۱۲) اور (۱۳) کو جمع کرنے سے اور اندرونی سطح پر بھی زور کے مجموعی فرق کو ز'' کے مساوی رکھنے سے (اگرچہ کسی مختلف دھات کے لیے کوئی اور مناسب قیمت بھی لی جاسکتی ہے) —

$$ف_{س_۲} + ف_{لا_۲} + ف'_۲ = ز'' = ج - \frac{۲ ف_۱ س_۱^۲}{س_۲^۲ - س_۱^۲} \quad ......(۱۴)$$

اور (۱۰) سے $ف_۱$ کی قیمت درج کرنے سے

$$ز'' = ج - \frac{۲ س_۱^۲}{س_۲^۲ - س_۱^۲}\left\{ \frac{ج س_۲^۲}{۲}\left(\frac{۱}{س_۲^۲} - \frac{۱}{س_۱^۲}\right) + ز'' لوک \frac{س_۲}{س_۱} \right\} \quad ......(۱۵)$$

اس کو مختصر کرکے ج کی قیمت درج کرنے سے

$$ز''\left(\frac{س_۲^۲ - س_۱^۲}{۲ س_۲^۲} + لوک \frac{س_۲}{س_۱}\right) = ف'_۲$$

$$لوک \frac{س_۲}{س_۱} = \frac{ف'_۲}{ز''} - \frac{س_۲^۲ - س_۱^۲}{۲ س_۲^۲} \quad ....(۱۶)$$

یا

$$س_۲ = س_۱ ہ^{\left(\frac{ف'_۲}{ز''} - \frac{س_۲^۲ - س_۱^۲}{۲ س_۲^۲}\right)} \quad ....(۱۷)$$

جس سے ایک دی ہوئی اندرونی نلی، دیے ہوئے اندرونی دباؤ اور ز'' کی دی ہوئی قیمت کے لیے لپیٹن کا بیرونی نصف قطر حاصل ہوتا ہے۔

لپیٹن کا تناؤ دوسرے مقامات پر معلوم کرنا ہو تو چونکہ مساوات (۱۵) دفعہ ۱۲۲ کی رُو سے $ف_۱$ کی قیمت ت سے بقدر کھچاؤ فشار

$$ف_{لا} \frac{لا^۲ + س_۲^۲}{لا^۲ - س_۲^۲}$$

کے کم ہوگی یا (۳) سے

$$\text{ف}_{١} = \text{ت} - \text{ف}_{١} \frac{\text{لا}^{٢} + \text{ر}_{٢}^{٢}}{\text{لا}^{٢} - \text{ر}_{٢}^{٢}} = - \text{ف}_{١} + \text{ز}'' - \text{ج} \frac{\text{ر}_{٢}^{٢}}{\text{لا}^{٢}} \quad \ldots\ldots (١٨)$$

صفحہ ۳۶۳

$$\text{ت} = \text{ز}'' - \text{ج} \frac{\text{ر}_{٢}^{٢}}{\text{لا}^{٢}} + \frac{٢\,\text{ف}_{١}\,\text{ر}_{٢}^{٢}}{\text{لا}^{٢} - \text{ر}_{٢}^{٢}} \quad \ldots\ldots (١٩)$$

(۹) سے ف₁ کی قیمت درج کر کے مختصر کرنے سے

$$\text{ت} = \text{ز}'' + \frac{٢\,\text{ر}_{٢}^{٢}}{\text{لا}^{٢} - \text{ر}_{٢}^{٢}} \cdot \text{ز}''\,\text{لوک} \frac{\text{ر}_{٣}}{\text{لا}} - ٢\,\text{فَ}_{٢} \frac{\text{ر}_{٢}^{٢}}{\text{لا}^{٢} - \text{ر}_{٢}^{٢}} \quad \ldots\ldots (٢٠)$$

اور خاص کر لپیٹن کے اندر، یعنی لا = ر₁ پر—

$$\text{ت}_{١} = \text{ز}'' + \frac{٢\,\text{ر}_{٢}^{٢}}{\text{ر}_{١}^{٢} - \text{ر}_{٢}^{٢}} \left(\text{ز}''\,\text{لوک} \frac{\text{ر}_{٣}}{\text{ر}_{١}} - \text{فَ}_{٢} \right) \quad \ldots\ldots (٢١)$$

اور (۱۶) سے لوک $\frac{\text{ر}_{٣}}{\text{ر}_{١}}$ کی قیمت درج کرنے سے

$$\text{ت}_{١} = \text{ز}'' \left(١ - \frac{\text{ر}_{٢}^{٢}}{\text{ر}_{١}^{٢}} \right) \quad \ldots\ldots (٢٢)$$

باہر لا = ر₂ پر

$$\text{ت}_{٢} = \text{ز}'' - ٢\,\text{فَ}_{٢} \frac{\text{ر}_{١}^{٢}}{\text{ر}_{١}^{٢} - \text{ر}_{٢}^{٢}} \quad \ldots\ldots (٢٣)$$

ان ضابطوں کی مدد سے نلی اور لپیٹن میں ہر جگہ کے زور معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

صورت ۲ — اعظم خاص زور ف₁ + فَ₂ کی ایک مقررہ حد ز۔

تب لپیٹن میں ہر جگہ

$$\text{ف}_{\text{ہا}} + \text{ف}'_{\text{ہا}} = \text{ز} \qquad (۲۴)$$

اور مساوات (۶) دفعہ ۱۲۲ سے نلی اور لپیٹن میں ہر جگہ

$$\text{ف}'_{\text{ہا}} = \text{ف}'_{۲} \frac{\text{سہ}_{۲}^{۲}}{\text{سہ}_{۳}^{۲} - \text{سہ}_{۲}^{۲}} \left(\frac{\text{سہ}_{۳}^{۲}}{\text{لا}^{۲}} + ۱ \right) \qquad (۲۵)$$

اس لیے (۲۵) کو (۲۴) میں سے تفریق کرنے سے لپیٹن میں

$$\text{ف}_{\text{ہا}} = \text{ز} - \frac{\text{ف}'_{۲}\,\text{سہ}_{۲}^{۲}}{\text{سہ}_{۳}^{۲} - \text{سہ}_{۲}^{۲}} \left(\frac{\text{سہ}_{۳}^{۲}}{\text{لا}^{۲}} + ۱ \right) \qquad (۲۶)$$

اور مساوات (۱) دفعہ ۱۲۲ سے

$$\text{ف}_{\text{ہا}} = -\frac{\text{د}}{\text{دلا}} (\text{لا} \times \text{ف}_{\text{لا}}) = \text{ز} - \text{ف}'_{۲} \frac{\text{سہ}_{۲}^{۲}}{\text{سہ}_{۳}^{۲} - \text{سہ}_{۲}^{۲}}$$

$$- \text{ف}'_{۲} \frac{\text{سہ}_{۲}^{۲}\,\text{سہ}_{۳}^{۲}}{\text{سہ}_{۳}^{۲} - \text{سہ}_{۲}^{۲}} \times \frac{۱}{\text{لا}^{۲}} \qquad (۲۷)$$

اس لیے تکمل کرنے اور علامتیں بدلنے سے

$$\text{لا} \times \text{ف}_{\text{لا}} = \left(-\text{ز} + \text{ف}'_{۲} \frac{\text{سہ}_{۲}^{۲}}{\text{سہ}_{۳}^{۲} - \text{سہ}_{۲}^{۲}} \right) \text{لا} - \text{ف}'_{۲} \frac{\text{سہ}_{۲}^{۲}\,\text{سہ}_{۳}^{۲}}{\text{سہ}_{۳}^{۲} - \text{سہ}_{۲}^{۲}} \frac{۱}{\text{لا}} + \text{ا} \qquad (۲۸)$$

$\text{لا} = \text{سہ}_{۳}$ پر $\text{ف}_{\text{لا}} = ۰$ رکھنے سے $\text{ا} = \text{سہ}_{۳}\,\text{ز}$

اس لیے لپیٹن میں صفحہ ۳۶۴

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \left(\frac{\text{سہ}_{۳}}{\text{لا}} - ۱ \right) \text{ز} - \frac{\text{سہ}_{۲}^{۲}}{\text{سہ}_{۳}^{۲} - \text{سہ}_{۲}^{۲}} \left(\frac{\text{سہ}_{۳}^{۲}}{\text{لا}^{۲}} - ۱ \right) \text{ف}'_{۲} \qquad (۲۹)$$

اور لا = س_1 پر

$$\text{ف}_1 = \left(\frac{\text{س}_3}{\text{س}_1} - 1\right)\text{ز} - \frac{\text{س}_2^2}{\text{س}_1^2 - \text{س}_2^2}\left(\frac{\text{س}_3^2}{\text{س}_1^2} - 1\right)\text{فَ}_2 \quad \text{.....}(۳۰)$$

مساوات (۱۳) دفعہ ۱۲۲ کے استعمال سے نلی میں لا = س_2 پر

$$\text{ف}_{\text{م}_2} = -\frac{2\,\text{ف}_1\,\text{س}_1^2}{\text{س}_1^2 - \text{س}_2^2} = -\frac{2\,\text{س}_1(\text{س}_3 - \text{س}_1)}{\text{س}_1^2 - \text{س}_2^2} \times \text{ز}$$

$$+ \frac{2\,\text{س}_2^2(\text{س}_3^2 - \text{س}_1^2)}{(\text{س}_3^2 - \text{س}_2^2)(\text{س}_1^2 - \text{س}_2^2)}\,\text{فَ}_2 \quad \text{.........}(۳۱)$$

اور (۲) سے

$$\text{فَ}_{\text{م}_2} = \text{فَ}_2\,\frac{\text{س}_3^2 + \text{س}_2^2}{\text{س}_3^2 - \text{س}_2^2} \quad \text{..............}(۳۲)$$

اس لیے جمع کرنے سے اور اندرونی سطح پر اعظم زور کو کسی قیمت ز_1 کے مساوی رکھنے سے

$$\text{ف}_{\text{م}_2} + \text{فَ}_{\text{م}_2} = -\frac{2\,\text{س}_1(\text{س}_3 - \text{س}_1)}{\text{س}_1^2 - \text{س}_2^2}\,\text{ز} + \frac{\text{س}_1^2 + \text{س}_2^2}{\text{س}_1^2 - \text{س}_2^2}\,\text{فَ}_2 = \text{ز}_1 \quad \text{...}(۳۳)$$

یہ ایک خطی مساوات ہے جس سے س_3 کسی دیے ہوئے دباؤ فَ_2 اور زور کی دی ہوئی حدود کے لیے معلوم ہو سکتا ہے۔ یعنی

$$\text{س}_3 = \text{س}_1\left(1 - \frac{\text{ز}_1}{\text{ز}}\right) + \frac{\text{س}_1^2 + \text{س}_2^2}{2\,\text{س}_1} \times \frac{\text{فَ}_2 + \text{ز}_1}{\text{ز}} \quad \text{.........}(۳۴)$$

اگر ز_1 کو ز کے مساوی لیا جائے تو

$$\text{س}_3 = \frac{\text{س}_1^2 + \text{س}_2^2}{2\,\text{س}_1} \times \frac{\text{فَ}_2 + \text{ز}}{\text{ز}} \quad \text{..........}(۹۳۴)$$

سابقہ صورت کی طرح، پیبٹن کا تناؤ $\text{ف}_\text{ہ}$ سے بقدر حسبِ ذیل مقدار کے زیادہ ہوگا:-

$$\text{ف}_\text{لا} \frac{\text{لا}^2 + \text{سا}_2^2}{\text{لا}^2 - \text{سا}_2^2}$$

اس لیے چونکہ $\text{ف}_\text{ہ}$ (۲۶) سے معلوم ہے اور $\text{ف}_\text{لا}$ (۲۹) سے اس لیے

$$\text{ت} = \text{ف}_\text{ہ} + \text{ف}_\text{لا} \frac{\text{لا}^2 + \text{سا}_2^2}{\text{لا}^2 - \text{سا}_2^2} \qquad (۳۵)$$

یا

$$\text{ت} = \frac{\frac{\text{سا}_3}{\text{لا}} (\text{لا}^2 + \text{سا}_2^2)\,\text{ز} - ۲\,\text{سا}_2^2 (\text{ز} + \text{ف}_3)}{\text{لا}^2 - \text{سا}_2^2}$$

اب اوپر کے ضابطوں اور دفعہ ۱۲۲ کے ضابطوں کی مدد سے ہر جگہ کا تناؤ اور تمام زور لکھے جا سکتے ہیں۔ نلی ابتداءً بیرونی دباؤ کے تحت ہوگی جو (۳۰) میں دیا گیا ہے اور بعد میں نلی اور پیبٹن ہر اندرونی زور ف_2 عمل کریگا۔

صورت ۳ - پیبٹن میں مستقل تناؤ ت۔ صفحہ ۳۶۵

مساوات (۱۸) کی طرح

$$\text{ف}_\text{ہ} = \text{ت} - \text{ف}_\text{لا} \frac{\text{لا}^2 + \text{سا}_2^2}{\text{لا}^2 - \text{سا}_2^2} \qquad (۳۶)$$

اس کو دفعہ ۱۲۲ کی مساوات (۱) میں درج کرنے سے

$$\text{ت} - \frac{۲\,\text{سا}_2^2}{\text{لا}^2 - \text{سا}_2^2}\,\text{ف}_\text{لا} + \text{لا} \frac{\text{فرف}_\text{لا}}{\text{فرلا}} = ۰ \qquad (۳۷)$$

یا

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \left(\frac{\text{لا}^2}{\text{لا}^2 - \text{سا}_2^2} \times \text{ف}_\text{لا} \right) = - \frac{\text{ت لا}}{\text{لا}^2 - \text{سا}_2^2} \qquad (۳۸)$$

تکمل کرنے سے $\frac{لا^2 ف_{لا}}{لا^2 - سر_2^2} = - \frac{ت}{2} لوک (لا^2 - سر_2^2) + ا$ .... (۳۹)

$لا = سر_1$ پر $ف_{لا} = ۰$ رکھنے سے $ا = \frac{ت}{2} لوک (سر_1^2 - سر_2^2)$

اور اس طرح (۳۹) سے لپیٹن ہیں

$ف_{لا} = \frac{ت}{2} \frac{لا^2 - سر_2^2}{لا^2} لوک \frac{سر_1^2 - سر_2^2}{لا^2 - سر_2^2}$ .... (۴۰)

$ف_{لا}$ کی اس قیمت کو (۳۶) میں درج کرنے سے لپیٹن کے لیے

$ف_{ہ} = ت \left(ا - \frac{لا^2 + سر_2^2}{2 لا^2} لوک \frac{سر_1^2 - سر_2^2}{لا^2 - سر_2^2} \right)$ .... (۴۱)

لپیٹن میں ہر جگہ $ف_{ہ}$ اور $ف_{لا}$ کی قیمتیں (۴۱) اور (۴۰) سے حاصل ہونگی - پھر نلی میں لپیٹن سے پیدا ہونے والے یعنی ابتدائی زور (۴۰) میں $لا = سر_1$ لکھ کر نلی پر بیرونی دباؤ معلوم کرنے سے حاصل ہونگے یعنی —

$ف_{ا} = \frac{ت}{2} \frac{سر_1^2 - سر_2^2}{سر_1^2} لوک \frac{سر_3^2 - سر_2^2}{سر_1^2 - سر_2^2}$ .... (۴۲)

جس کو دفعہ ۱۲۲ کی مساوات (۱۱) اور (۱۲) میں درج کیا جاسکتا ہے - اندرونی دباؤ سے پیدا ہونے والے مزید دباؤ دفعہ ۱۲۲ کی مساوات (۵) اور (۶) سے لکھے جاسکتے ہیں (ان میں $سر_1$ کی بجائے $سر$ لکھنا ہوگا) - (۴۰) اور (۴۱) سے ظاہر ہے کہ اعظم ابتدائی محیطی زور $ف_{ہ}$ اور اعظم ابتدائی زور کے فرق $ف_{ہ}$ اور $ف_{لا}$ کی قیمت باہر $لا = سر_3$ پر $ت$ ہوتی ہے اور لپیٹن میں اندرونی سطح $لا = سر_1$ کی طرف گھٹتے ہیں - لیکن اندرونی دباؤ سے پیدا

ہونے والے زور اور زور کے فرق اس کے برخلاف (دیکھو شکل ۱۹۱ یا مساواتیں (۲۵) اور (۲)) اندر کی طرف بڑھتے ہیں اور اس طرح لپیٹن کے اندر آخری زور یا زور کے فرق کو تقریباً یکساں یا اندرونی اور بیرونی نصف قطروں پر مساوی بنانا ممکن ہے۔ (۴۰) اور (۴۱) کو جمع کرنے سے لپیٹن میں

$$\text{ف}_{\text{لا}} + \text{ف}_{\text{ہا}} = \text{ت}\left(۱ - \frac{\text{سا}_۲^۲}{\text{لا}^۲}\ \text{لوک}\ \frac{\text{سا}_۳^۲ - \text{سا}_۲^۲}{\text{لا}^۲ - \text{سا}_۲^۲}\right) \quad ......(۴۴)$$

آخری زور یا زور کے فرق کے اس جملے کو لا = سا اور لا = سا۲ پر استعمال کیا جائے تو ایک دی ہوئی نلی اور کامی زور کے لیے سا۲ معلوم ہوسکتا ہے اگر ت اختیاری طور پر معین کیا جائے یا ت معلوم ہوسکتا ہے اگر سا۲ معین ہو۔ ان مساواتوں میں لوگارتم شریک ہوتا ہے اور ان کو آزمایش کے ذریعے حل کیا جاسکتا ہے۔ اگر یہ مطلوب ہو کہ آخری زور یا زور کا فرق نلی کی اندرونی سطح پر لپیٹن کی اندرونی اور بیرونی سطح کے مساوی ہو تو ضروری تینوں مقداروں کو مساوی رکھنے سے ت اور سا۲ کے لیے ہمزاد مساواتیں حاصل ہونگی۔ لیکن تجویز میں عملی عددی استعمال کے لیے آزمایشی قیمتیں زیادہ کارآمد ہونگی۔ صفحہ ۳۶۶

گزشتہ صورتوں میں سے ہر ایک میں اس کا اطمینان کرلینا چاہیے کہ نلی کی تراش اتنی بڑی ہو کہ محوری تناؤ آخری محیطی تناؤ سے کم رہے۔

مثال ۱ ۔ ایک فولادی استوانے کے گرد جس کا اندرونی قطر ۱۲ انچ اور بیرونی قطر ۲۱ انچ ہے تار لپیٹنا ہے تاکہ ۸ ٹن فی مربع انچ کا اندرونی دباؤ برداشت ہوسکے۔ لپیٹن کی کم سے کم گہرائی اور ضروری تناؤ معلوم کرو تاکہ اُستوانے یا لپیٹن میں زور کا اعظم فرق ۱۲ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو۔

سا۲ = ۶، سا = ۱۰٫۵، ز = ۱۲، ف۲ = ۸

(۱۶) سے

$$\text{لوک}_{۱۰}\frac{\text{سا}_{۳}}{۱۰،۵} = \frac{۱}{۲،۳۰۳}\left(\frac{۸}{۱۲} - \frac{۱۰،۵^{۲} - ۳۶}{۲ \times ۱۰،۵^{۲}}\right) = ۰،۱۴۳۴$$

$$= \text{لوک}_{۱۰}\,۱،۳۹۱$$

$$\text{سا}_{۳} = ۱۰،۵ \times ۱،۳۹۱ = ۱۴،۶۱''\text{،}\quad \text{سا}_{۳}^{۲} = ۲۱۳$$

(۲۲) سے لا = ۱۰،۵'' پر

$$\text{ت}_{۱} = ۱۲\left(۱ - \frac{۳۶}{۱۰،۵^{۲}}\right) = ۸،۰۸ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

(۲۳) سے $\text{ت}_{۳} = ۱۲ - ۱۶ \times \frac{۳۶}{۲۱۳ - ۳۶} = ۸،۷۴ \text{ ٹن فی مربع انچ}$

(۲) سے $\text{ج} = ۱۶ \times \frac{۲۱۳}{۱۷۷} = ۱۹،۲۵$

اس لیے (۱۰) سے

$$\text{ف}_{۱} = -\frac{۱۰۳ \times ۳۶ \times ۱۹،۲۵}{۲ \times ۲۱۳ \times ۱۱۰} + ۱۲ \times ۲،۳۰۳ \times ۰،۱۴۳۴ = ۲،۴۴ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

اس لیے (۱۱) اور (۱۲) دفعہ ۱۲۲ سے نلی میں اندرونی دباؤ سے پہلے

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{۲،۴۴ \times ۱۱۰}{۱۱۰ - ۳۶}\left(۱ - \frac{۳۶}{\text{لا}^{۲}}\right) = ۳،۶۳\left(۱ - \frac{۳۶}{\text{لا}^{۲}}\right)$$

$$\text{ف}_{۱} = -۳،۶۳\left(۱ + \frac{۳۶}{\text{لا}^{۲}}\right)$$

صفحہ ۳۶۷ اندرونی دباؤ کی وجہ سے نلی اور لپیٹن میں (۶) اور (۵) دفعہ ۱۲۲ کی رُو سے حسبِ ذیل "بارونی زور" پیدا ہونگے :-

$$\text{فَ}_{\text{ا}} = \frac{\text{۸} \times \text{۳۶}}{\text{۱۷۷}} \left(\text{۱} + \frac{\text{۲۱۳}}{\text{لا}^{\text{۲}}} \right) = \text{۱٫۶۲} \left(\text{۱} + \frac{\text{۲۱۳}}{\text{لا}^{\text{۲}}} \right)$$

$$\text{فَ}_{\text{لا}} = \text{۱٫۶۲} \left(\text{۱} - \frac{\text{۲۱۳}}{\text{لا}^{\text{۲}}} \right)$$

پلیٹن میں ابتداً :-

(۹) سے $$\text{ف}_{\text{لا}} = - \frac{\text{۱۸} \times \text{۱۹٫۲۵} \left(\text{۲۱۳} - \text{لا}^{\text{۲}} \right)}{\text{۲۱۳ لا}^{\text{۲}}} + \text{۱۲ لوک}_{\text{ہ}} \frac{\text{۱۴٫۶۱}}{\text{لا}}$$

$$= \text{۲۷٫۶۴ لوک}_{\text{۱۰}} \frac{\text{۱۴٫۶۱}}{\text{لا}} - \frac{\text{۳۴۶٫۵} \left(\text{۲۱۳} - \text{لا}^{\text{۲}} \right)}{\text{۲۱۳ لا}^{\text{۲}}}$$

(۴) اور (۵) سے $$\text{ف}_{\text{ا}} = - \text{ف}_{\text{لا}} - \frac{\text{۳۶} \times \text{۱۹٫۲۵}}{\text{لا}^{\text{۲}}} + \text{۱۲}$$

$$= - \text{ف}_{\text{لا}} - \frac{\text{۶۹۳}}{\text{لا}^{\text{۲}}} + \text{۱۲}$$

اس طرح آخر کار (۱۹) اور (۲۰) سے پلیٹن کا ابتدائی تناؤ

$$\text{ت} = \text{۱۲} - \frac{\text{۶۹۳}}{\text{لا}^{\text{۲}}} + \frac{\text{۷۲}}{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۳۶}} \text{ف}_{\text{لا}} = \text{۱۲} + \frac{\text{۸۶۴}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۳۶}} \text{لوک} \frac{\text{۱۴٫۶۱}}{\text{لا}} - \frac{\text{۵۷۶}}{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۳۶}}$$

یا زیادہ کارآمد طور پہ (۱۸) سے

$$\text{ت} = \text{ف}_{\text{ا}} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۳۶}}{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۳۶}} \text{ف}_{\text{لا}}$$

اوپر کے جملے سے $\text{ف}_{\text{لا}}$، $\text{ف}_{\text{ا}}$، $\text{فَ}_{\text{لا}}$ اور ت اور جمع کرنے سے $(\text{ف}_{\text{لا}} + \text{ف}_{\text{ا}} + \text{فَ}_{\text{لا}} + \text{فَ}_{\text{ا}})$ اور $\text{ف}_{\text{ا}} + \text{فَ}_{\text{ا}}$ محسوب کیے گئے ہیں اور ذیل کی جدول میں دکھائے گئے ہیں:-

	محور سے فاصلہ	ابتدائی زور		مزید زور اندرونی دباؤ کی وجہ سے		حاصل زور کا فرق	حاصل محیطی تناؤ	لپیٹن کا تناؤ
		نیم قطری فشار	محیطی تناؤ	نیم قطری فشار	محیطی تناؤ			
	ل	فن	فم	ف'ن	ف'م	فن + فم + ف'ن + ف'م	فم + ف'م	ت
نلی	۶	۰	۷٫۲۶ –	۸	۱۱٫۲۶	۱۲٫۶۰	۴٫۰۰ –	
	۷	۰٫۹۶	۶٫۲۹ –	۵٫۳۸	۸٫۶۳	۸٫۶۸	۲٫۳۴ –	
	۹	۲٫۰۲	۵٫۲۴ –	۲٫۶۴	۵٫۸۸	۵٫۳۰	۰٫۶۴ –	
	۱۰٫۵	۲٫۴۴	۴٫۸۲ –	۱٫۵۲	۴٫۷۷	۳٫۹۱	۰٫۰۶ –	
لپیٹن	۱۰٫۵	۲٫۴۴	۳٫۲۸	۱٫۵۲	۴٫۷۷	۱۲٫۶۰	۸٫۰۵	۸٫۰۸
	۱۲	۱٫۵۸	۵٫۶۱	۰٫۷۸	۴٫۰۲	۱۱٫۹۹	۹٫۶۳	۸٫۲۴
	۱۴	۰٫۳۷	۸٫۱۰	۰٫۱۴	۳٫۳۸	۱۱٫۹۹	۱۱٫۴۸	۸٫۶۴
	۱۴٫۶۱	۰	۸٫۷۶	۰	۳٫۲۴	۱۲٫۶۰	۱۲٫۶۰	۸٫۷۵

طالب علم کے لیے یہ فائدے سے خالی نہ ہوگا کہ جدول کی مقداروں کو لا کے اساس پر اشکال ۱۶۱ اور ۱۶۲ کے نمونے پر ترسیم کرے۔ مگر اس کے لیے لا کی چند درمیانی قیمتوں کے لیے بھی زور محسوب کیے جائیں تو بہتر ہوگا۔

مثال ۲ — ایک فولادی اُستوانے کا اندرونی قطر ۱۲ انچ اور بیرونی قطر ۲۱ انچ ہے۔ لپیٹن کی ضروری گہرائی معلوم کرو تاکہ اندرونی دباؤ ۸ ٹن فی مربع انچ ہو تو استوانے اور لپیٹن میں آخری محیطی تناؤ ۶ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو۔ نیز ابتدائی اور آخری زور معلوم کرو۔

$$ر_۲ = ۶،\ ر_۱ = ۱۰٫۵،\ ز = ۶،\ ف'_۲ = ۸$$

(۳۴ و) سے $\quad \text{م}_{۳} = \frac{۳۶ + ۱۱۰٫۲۵}{۲۱} \times \frac{۱۳}{۶} = ۱۶٫۲۵$ انچ

اور اس طرح $\quad \text{م}_{۲}^{۲} = ۲۶۴$

پیسٹن میں :-

(۲۶) سے $\quad \text{ف}_{ا} = ۶ - \frac{۳۶ \times ۸}{۲۲۸}\left(۱ + \frac{۲۶۴}{\text{ل}^{۲}}\right) = ۶ - ۱٫۲۶۳\left(\frac{۲۶۴ + \text{ل}^{۲}}{\text{ل}^{۲}}\right)$

(۲۹) سے $\quad \text{ف}_{ل} = ۶\left(۱ - \frac{۱۶٫۲۵}{\text{ل}}\right) - \frac{۸ \times ۳۶}{۲۲۸}\left(\frac{\text{ل}^{۲} - ۲۶۴}{\text{ل}^{۲}}\right)$

$$= ۴٫۷۳۷ - \frac{۹۷٫۵}{\text{ل}} + \frac{۳۳۳٫۵}{\text{ل}^{۲}}$$

اور (۳۰) سے $\quad \text{ف}_{ا} = \frac{۹۷٫۵}{۱۰٫۵} - ۶ - \frac{۱۵۳٫۷۵ \times ۸ \times ۳۶}{۱۱۰٫۲۵ \times ۲۲۸} = ۱٫۵۲۵$

نلی اور لیپیٹن میں (۶) اور (۵) دفعہ ۱۲۲ سے :-

$$\text{ف}'_{ا} = ۸ \times \frac{۳۶}{۲۲۸}\left(۱ + \frac{۲۶۴}{\text{ل}^{۲}}\right) = ۱٫۲۶۳\left(\frac{۲۶۴ + \text{ل}^{۲}}{\text{ل}^{۲}}\right)$$

$$\text{ف}'_{ل} = ۸ \times \frac{۳۶}{۲۲۸}\left(۱ - \frac{۲۶۴}{\text{ل}^{۲}}\right) = ۱٫۲۶۳\left(\frac{\text{ل}^{۲} - ۲۶۴}{\text{ل}^{۲}}\right)$$

نلی میں (۱۲) اور (۱۱) دفعہ ۱۲۲ سے

$$\text{ف}_{ہ} = -\frac{۱٫۵۲۵ \times ۱۱۰ \times (۳۶ + \text{ل}^{۲})}{۷۴\,\text{ل}^{۲}} = -۲٫۲۶۵\,\frac{۳۶ + \text{ل}^{۲}}{\text{ل}^{۲}}$$

$$\text{ف}_{ل} = ۲٫۲۶۵\,\frac{۳۶ - \text{ل}^{۲}}{\text{ل}^{۲}}$$

اور (۳۵) سے لینیٹن کا تناؤ

$$\text{ت} = \text{ف}_{۱} + \frac{\text{لا}^{۲} + ۳۶}{\text{لا}^{۲} - ۳۶} \times \text{ف}_{\text{لا}}$$

ان جملوں سے زوروں کو محسوب کر کے ذیل کی جدول میں دکھایا گیا ہے - ان کو ترسیم کر لیا جائے تو زوروں کے تغیرات زیادہ واضح ہو جائینگے :- صفحہ ۳۶۹

	محور سے فاصلہ	ابتدائی زور		اندرونی دباؤ کی وجہ سے مزید زور		حاصل محیطی تناؤ	حاصل زور کا فرق	لینیٹن کا تناؤ
		نیم قطری فشار	محیطی تناؤ	نیم قطری فشار	محیطی تناؤ			
	لا	فلا	ف۱	فلا۲	ف۲	ف۱ + ف۲	فلا + ف۱ + فلا۲ + ف۲	ت
نلی	۶	۰	۳٫۵۳-	۸	۱۰٫۵۳	۶٫۰۰	۱۳٫۰۰	—
	۷٫۵	٫۸۲	۳٫۷۱-	۴٫۶۷	۷٫۱۹	۳٫۴۸	۸٫۹۷	—
	۹	۱٫۲۶	۳٫۲۷-	۲٫۸۵	۵٫۳۸	۲٫۱۱	۶٫۲۲	—
	۱۰٫۵	۱٫۵۳	۳٫۰۱-	۱٫۶۹	۴٫۲۹	۱٫۲۷	۴٫۵۵	—
لینیٹن	۱۰٫۵	۱٫۵۲	۱٫۷۱	۱٫۶۷	۴٫۲۹	۶٫۰۰	۹٫۲۸	۳٫۷۰
	۱۲	۱٫۰۷	۲٫۴۲	۱٫۲۳	۳٫۵۸	۶٫۰۰	۸٫۳۰	۴٫۲۰
	۱۴	٫۵۲	۳٫۰۴	٫۴۴	۲٫۹۶	۶٫۰۰	۶٫۹۶	۳٫۸۰
	۱۶٫۲۵	۰	۳٫۴۷	۰	۲٫۵۳	۶٫۰۰	۶٫۰۰	۳٫۴۷

مثال ۳ - مثال ۱ کے ابعاد اور اندرونی دباؤ استعمال کر کے مستقل تناؤ ت معلوم کرو جو لینیٹن کے اندرونی اور بیرونی پہلوؤں پر زور کے فرق کو مساوی کرنے کے لیے درکار ہوگا -

(۴۳) کی رُو سے لا = ۱۰٫۵″ پر

$$ف_{لا} + ف_{ما} = ت \left(۱ - \frac{۳۶}{۱۱۰} \text{ لوک}_{و} \frac{۱۷۷}{۷۴٫۲۵} \right) = ۰٫۷۱۶ \text{ ت}$$

نیز (۷۱) دفعہ ۱۲۲ سے لا = ۱۰٫۵″ پر (سہ کی جگہ سہ۳ استعمال کرنے سے)

$$فَ_{لا} + فَ_{ما} = \frac{۳۶ \times ۲۱۳ \times ۸ \times ۲}{۱۱۰ \times ۱۷۷} = ۶٫۳۰$$

لا = ۱۰٫۵″ پر آخری زور کا فرق

$$= ۶٫۳۰ + ۰٫۷۱۶ \text{ ت}$$

اور لا = ۱۶٫۴۱″ پر ف$_{لا}$ + ف$_{ما}$ = ت

اور $$فَ_{لا} + فَ_{ما} = \frac{۳۶ \times ۸ \times ۲}{۱۷۷} = ۳٫۲۵$$

اس لیے لا = ۱۶٫۴۱″ پر آخری زور کا فرق

$$= ۳٫۲۵ + \text{ت}$$

اس لیے پیٹن کے اندر اور باہر مساوی ہونے کے لیے صفحہ ۳۷۰

$$۶٫۳۰ + ۰٫۷۱۶ \text{ ت} = ۳٫۲۵ + \text{ت}$$

یا ت = ۱۰٫۷۵ ٹن فی مربع انچ

اس طرح ان مقامات پر مجموعی زور کا فرق

= ۳٫۲۵ + ت = ۱۴٫۰۰ ٹن فی مربع انچ

(۴۲) سے $ف_{۱} = \frac{۱۰٫۷۵}{۲} \times \frac{۷۴}{۱۱۰} \text{ لوک}_{و} \frac{۱۷۷}{۷۴} = ۳٫۱۴$ ٹن فی مربع انچ

نلی میں لا = ۶" پر (۱۴) اور (۷ ا) دفعہ ۱۲۲ سے

فِ + فِ = — (۱۱۰ × ۳٫۱۴ × ۲) / ۷۴ = — ۹٫۳۵ ٹن فی مربع انچ

فِ + فِ = (۲۱۳ × ۸ × ۲) / ۱۷۷ = ۱۹٫۲۶

اس طرح آخری زور کا فرق = ۱۹٫۲۶ - ۹٫۳۵ = ۹٫۹۱ ٹن فی مربع انچ
مثال ۱ سے مقابلہ کرنے پر ظاہر ہوگا کہ لا = ۶ پر کے زور کے فرق کو لبیٹن کے اندرون اور بیرون کے مساوی رکھنے کے لیے اس سے پتلی نلی درکار ہوگی (اور ت کی قیمت مختلف ہوگی) لیکن موجودہ صورت میں لا = ۶ پر کا زور کا فرق محوری تناؤ سے متاثر ہوگا جو حسبِ ذیل ہوگا:—

۳۶ / (۱۱۰ - ۳۶) × ۸ = ۳٫۸۸ ٹن فی مربع انچ

جس کی وجہ سے زور کا فرق حسبِ ذیل ہوگا:—

۳٫۸۸ + ۸ = ۱۱٫۸۸ ٹن فی مربع انچ

اس آزمائشی نتیجے سے اچھی طرح معلوم ہوگا کہ لبیٹن کے ایک مستقل تناؤ کو اختیار کرنے کی جو سہل تدبیر ہے اُس کو اختیار کرکے ایک عملی تقریبی نتیجہ حاصل کرنا کتنا کارآمد ہے۔ ت = ۱۰٫۷۵ سے لا = ۶ اور لا = ۶ پر آخری زور کا فرق ۱۴٫۰۰ ٹن فی مربع انچ اور لا = ۶ پر صرف ۹٫۹۱ ٹن فی مربع انچ حاصل ہوا ہے۔ اس لیے اب ت کو گھٹا کر کوئی قیمت مثلاً ۸ ٹن فی مربع انچ دو۔ اس سے نتائج میں حسبِ ذیل سادہ ترمیم ہوگی:—

لا = ۱۰٫۵" پر لبیٹن میں

زور کا فرق = ۴٫۳۰ + ۱۴٫۷۲ × ۸ = ۱۲٫۰۲۸ ٹن فی مربع انچ

اور لا = ۱۳٫۶۱ پر

زور کا فرق = ۳٫۲۵ + ۸ = ۱۱٫۲۵ ٹن فی مربع انچ

اور نلی میں لا = ۶″ پر

ف‌لا + ف‌ب = − ۹٫۳۵ × ۸/۱۰٫۷۵ = − ۶٫۹۵

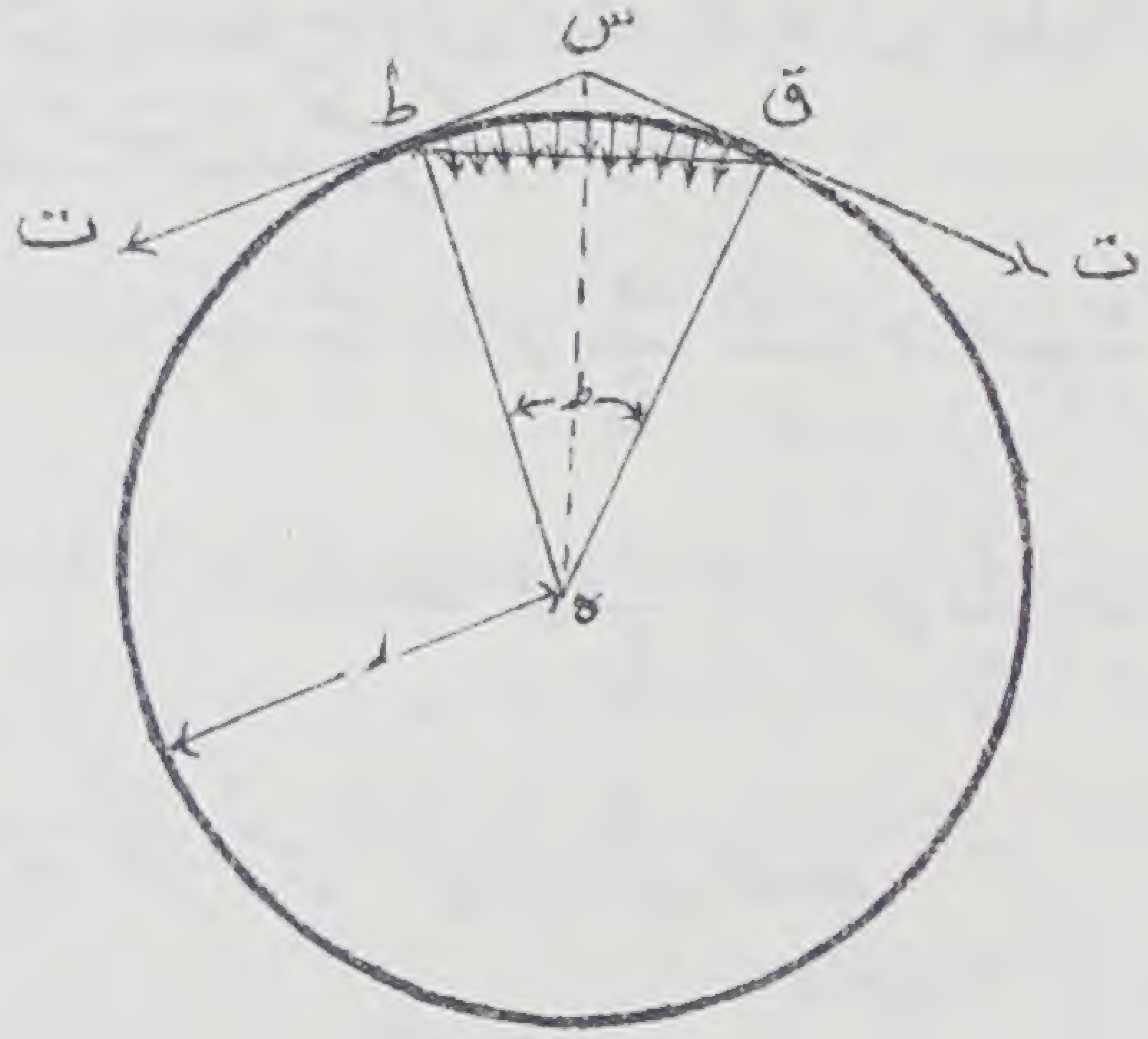
آخری زور کا فرق لا = ۶″ پر

= ۱۹٫۲۶ − ۶٫۹۵ = ۱۲٫۳۱ ٹن فی مربع انچ

اب دیکھو لا = ۱۰٫۵″، ۱۶٫۱۴″، اور ۶″ پر آخری زور کے فرق صفحہ ۳۷۱
(۱۲٫۰۲۸، ۱۱٫۲۵ اور ۱۲٫۳۱) تقریباً مساوی ہوگئے ہیں۔ ت کی قیمت اس سے ذرا زیادہ لی جائے تو اس سے زیادہ مساوات حاصل ہوگی۔ ان نتائج کو تقریبی طور پر مثال ۱ کے جدولی نتائج سے اخذ کیا جاسکتا تھا۔ اس میں ت کی قیمت ۸٫۰۸ سے ۸٫۷۵ ٹن فی مربع انچ تک بدلتی ہے جس سے زور کا فرق لپیٹن میں ہر جگہ اور نلی کی اندرونی سطح پر ۱۲ ٹن فی مربع انچ حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے ظاہر ہے کہ اگر مستقل تناؤ ت کو آزمائش کے ذریعے موزوں قیمت دی جائے تو زور کی تقسیم خاصی اچھی حاصل ہوگی۔

۱۲۵۔ گھومتا حلقہ یا پہیے کی لگر ــــ اگر ایک حلقہ ایک محور کے گرد گھومے جو اس کے مرکزِ جاذبہ میں سے گزرے اور اس کے مرکزی مستوی کے علی القوائم ہو تو حلقے میں اس کے جمود کی وجہ سے ایک تناؤ پیدا ہوگا، اور اگر تراشی ابعاد نصف قطر کے مقابلے میں چھوٹے ہوں تو یہ حلقہ تناؤ تقریباً یکساں ہوگا جیسا کہ اندرونی دباؤ کے زیرِ عمل ایک پتلے اسطوانی خول میں ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ حلقے کا نصف قطر انچوں میں ر ہے۔ یکساں زاویئی رفتار سہ یا خطی رفتار

۰ انچ فی ثانیہ سے گھومنے کے لیے گگر کے ہر نقطے کی نیم قطری اندر کی جانب



شکل ۱۶۳

اسراع س۲ ر یا ر/ی۲ انچ فی ثانیہ ہونی چاہیے - اگر تراش کا رقبہ
مربع انچوں میں سہ ہو اور حلقے کے مادے کا وزن فی مکعب انچ و پونڈ ہو تو
گگر کے طول مف س انچ پر نیم قطری اندر وار قوت

$$\frac{و}{ج}\ \frac{ی^2}{ر}\ سہ\ مف\ س\ پونڈ$$

ہوگی جہاں ج تقریباً ۲ء۳۲ × ۱۲ انچ فی ثانیہ ہے عمادی قوت قوس کے
فی اکائی طول

$$= \frac{و}{ج}\ \frac{ی^2}{ر}\ سہ\ پونڈ$$

طول رطہ کی قوس ط ق (شکل ۱۶۳) پر حاصل نیم قطری صفحہ ۲۷۲
اندر وار قوت س ہ کے متوازی

$$= \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{ر}^{2}\,\text{س} \times \text{وتر ط ق} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{ر}^{2}\,\text{س} \times ۲\,\text{ر جب}\,\frac{\text{ط}}{۲}$$

یہ قوت ط اور ق پر کے تناؤں ت کا حاصل ہوگی، اس لیے ان تناؤں کو س ہ کی سمت میں تحلیل کرنے سے

$$۲\,\text{ت جب}\,\frac{\text{ط}}{۲} = \text{س}\,\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{ر}^{2} \times ۲\,\text{ر جب}\,\frac{\text{ط}}{۲}$$

یا

$$\text{ت} = \text{س}\,\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{ی}^{2} \quad \text{یا} \quad \text{س}\,\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{سہ}^{2}\,\text{ر}^{2}$$

اس لیے گگر میں تنشی زور کی حدت

$$\text{ف} = \frac{\text{ت}}{\text{س}} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{ی}^{2} = \frac{\text{و ی}^{2}}{۳۲٫۲ \times ۱۲} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

یہ نتیجہ ایک چرخی پر چلنے والے پٹے[ہ] کے "مرکز گریز تناؤ" کے لیے بھی صحیح ہے -

اگر ایک پہیّے کی گگر کے لیے بے خطر زور کی حد ز ہو تو گھیرے کی رفتار کی حد حسبِ ذیل ہوگی :-

$$\text{ز} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{ی}^{2}$$

$$\text{ی} = \sqrt{\frac{\text{ز ج}}{\text{و}}} = \sqrt{\frac{\text{ز} \times ۱۲ \times ۳۲٫۲}{\text{و}}} \ \text{انچ فی ثانیہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

دیکھو اوپر کے تمام ضابطوں میں اگر و وزن فی مکعب انچ ہو اور حدت فی مربع انچ ناپی جائے تو ر اور ج بھی انچوں میں ہونے چاہییں -

اگر ی اور ج فٹ کی اکائی میں ہوں تو (۱) حسبِ ذیل ہو جائیگی :-

ہ belt

$$ف = \frac{۱۲ و ی^2}{ج} = \frac{۱۲ و ی^2}{۳۲٫۲} = ۰٫۳۷۲۷ و ی^2 \text{ پونڈ فی مربع انچ} \quad .... (۳)$$

اگر کسی پہیے کی گگر یا اُستوانے کے اندر کوئی سیال یا ڈھیلا ٹھوس بھرا ہوا ہو جو مرکز گریز قوت کی مزاحمت میں کوئی حصہ نہ لے تو ایسی صورت میں صرف یہ کرنا ہوگا کہ ت کے لیے اُوپر جو مساواتیں ہیں اُن میں بائیں جانب ایک رقم کا اضافہ کرنا ہوگا جو زائد کمیت کی مرکز گریز قوت کو تعبیر کرے۔ اکثر اس میں آسانی ہوگی کہ طہ=۱۸۰° لے کر نصف اُستوانے پر غور کیا جائے۔

اگر ایک قبے پر پتلی لپیٹن لپیٹی جائے یا دابی جائے یا سُکڑائی جائے جس کی وجہ سے لپیٹن ابتدائً تناؤ اور قبہ فشار کی حالت میں ہو تو مرکز گریز عمل کے واقع ہونے پر لپیٹن کے تناؤ میں اضافہ اور قبے کے فشار میں کمی ہوگی اور ان کی مقدار ان کی اضافی لچکوں[۱] پر منحصر ہوگی۔

مثال۔ اگر ایک ڈھلے لوہے کے پہیے کی گگر میں بے خطر تنشی زور ۱۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہو تو گھیرے کی رفتار کی حد معلوم کرو۔ ڈھلے لوہے کا وزن ۰٫۲۶ پونڈ فی مکعب انچ لیا جائے۔

اوپر کی مساوات (۲) سے

$$ی = \sqrt{\frac{۱۲ \times ۳۲٫۲ \times ۱۰۰۰}{۰٫۲۶}} \text{ انچ فی ثانیہ}$$

یا ۱۰۲ فٹ فی ثانیہ (تقریباً)

۱۲۶۔ گھومتے قُرص[۲] ـــ گھومتے ہوئے مدوّر قرصوں اور اُستوانوں میں زور سادہ مفروضات کے ذریعے تقریبی طور پر معلوم کیے جا سکتے ہیں اور شے کے کسی حصے پر ان کے تقریبی اطلاق کو جائز ثابت کیا جا سکتا ہے۔ مدوّر قرص کی صورت میں جو اپنے محور کے گرد گھوم رہا ہو فرض کیا جاتا ہے کہ قرص کی موٹائی یکساں ہے اور قطر کے مقابلے میں بہت کم ہے۔ اس طرح قرص کی کسی مدوّر تراش کے لیے جو زور معلوم کیے جائیں وہ

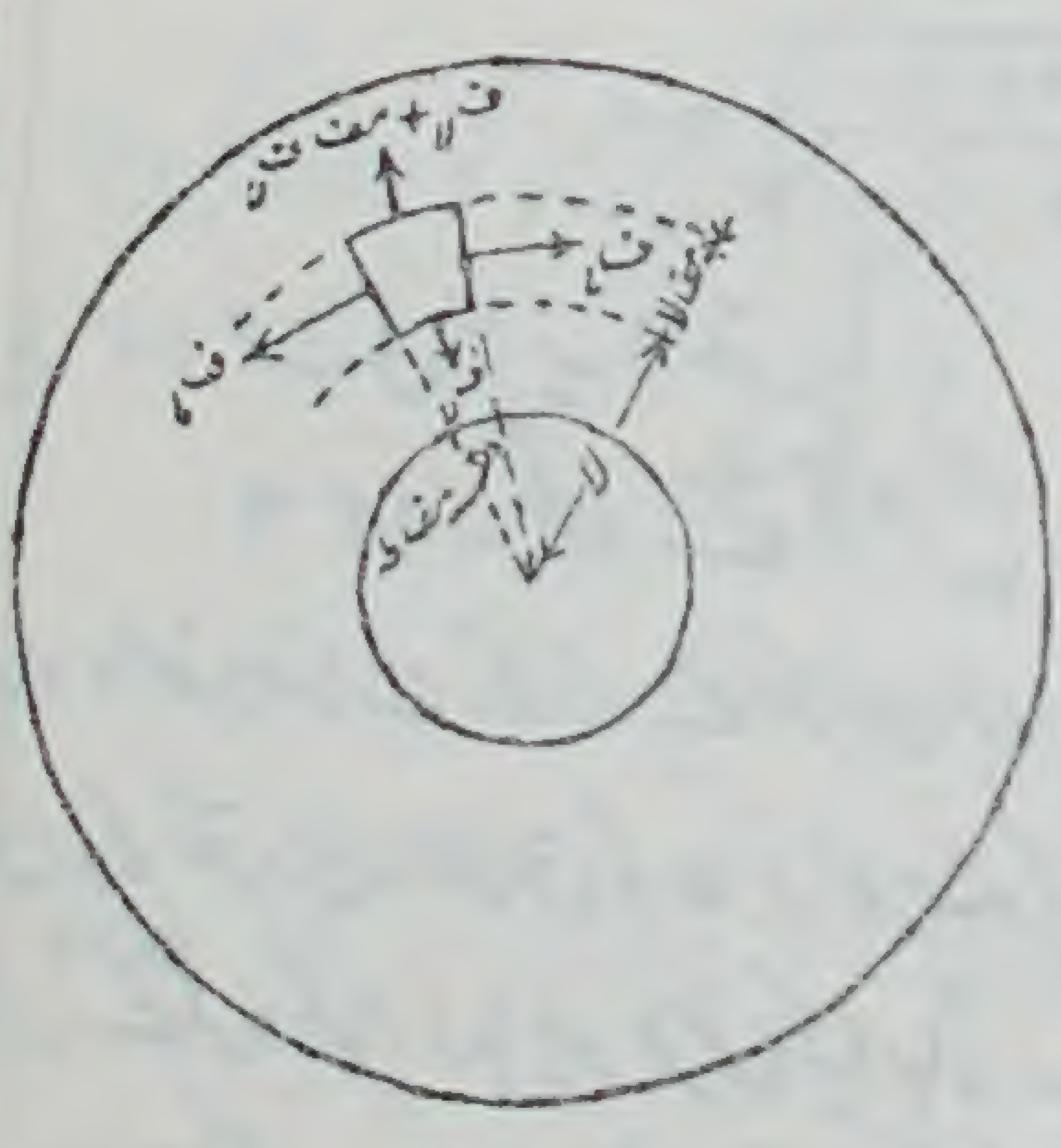
[۱] اس کی ایک مثال مصنف کے مضمون "دواروں کے بندھنوں کے زور" میں ملے گی جو رسالہ انجینیرنگ مورخہ ۱۸ دسمبر ۱۹۱۲ء میں شائع ہوا ہے۔

[۲] یہاں قرص کے مسئلے کا جو حل دیا گیا ہے وہ گراسمن Grossman کا ہے۔ فشاروں کی ریاضیاتی تحلیل کے ذریعے اس مسئلے کی باقاعدہ بحث معلوم کرنے کے لیے اور مزید حوالوں کے لیے دیکھو ڈاکٹر چری (Chree) کا مضمون جو کیمبرج فلوسافیکل سوسائٹی کی روداد" جلد ہفتم حصہ چہارم ۱۸۹۱ء میں شائع ہوا ہے۔ نیز دیکھو رسالہ نیچر ۱۹۰۶ء میں شائع شدہ مراسلت۔

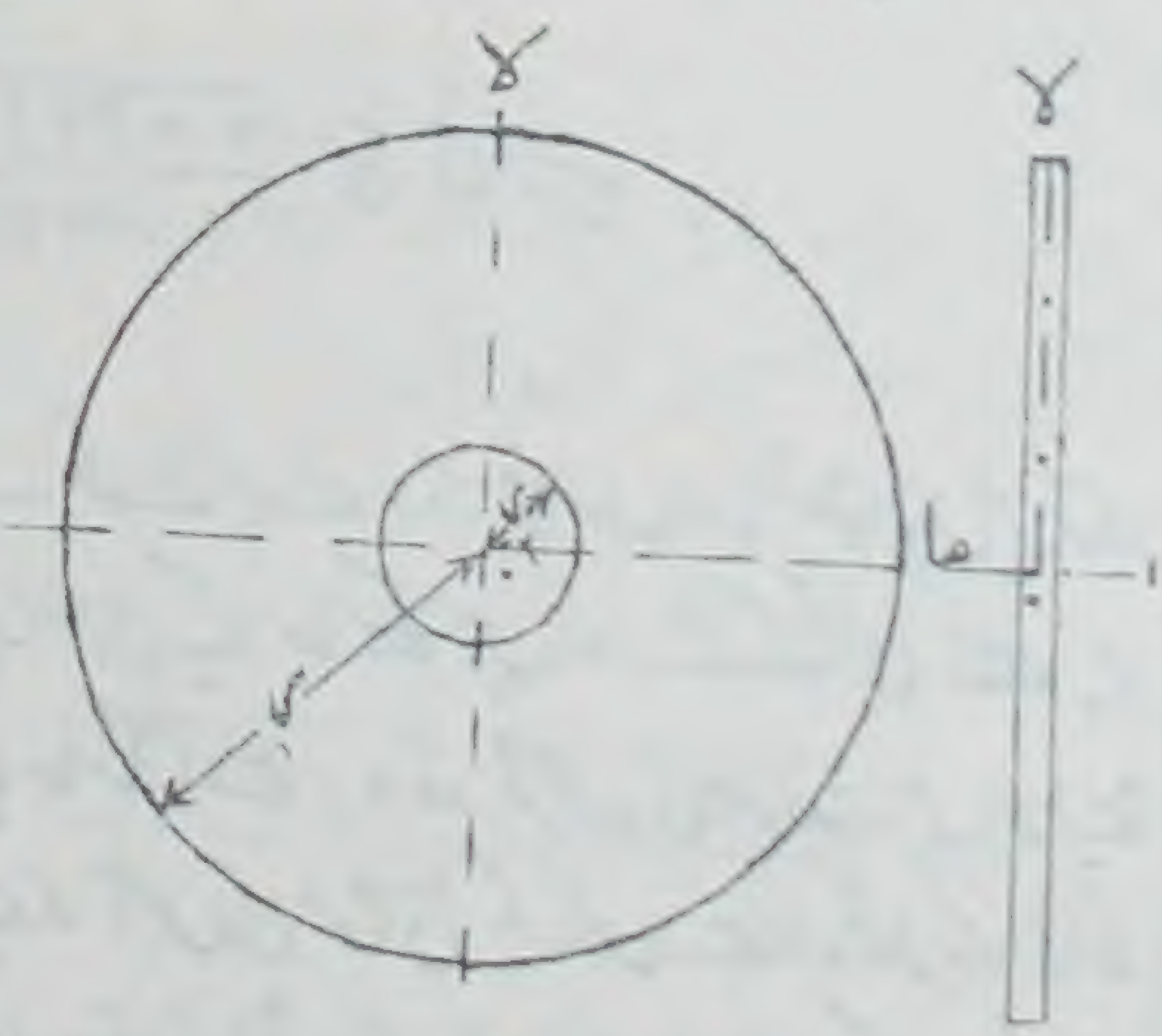
ایسی تمام تراشوں کے لیے تقریبی طور پر صحیح ہونگے۔

ہر بحالِ آزاد جیسے چہروں پر کوئی زور ان پر عمادی نہیں ہوسکتا اور نہ ان چہروں پر یا ان کے علی القوائم کوئی جزی زور ہوسکتا ہے۔ اس لیے دونوں ابتدائی چپٹی سطحوں کے تمام نقاط پر محور کی سمت بہت تقریباً ایک صفر مقدار کے خاص زور کے محور کی سمت ہے۔ اس طرح نیم قطری اور محیطی زور بھی خاص زور ہونگے۔ (یہ بات وسطی مستوی کے لیے بھی کسی نقطے کے فساد کے تشاکل سے ظاہر ہے کیونکہ فساد کی وجہ سے ہٹاؤ تشاکل کی وجہ سے نیم قطری سمت میں ہونا چاہیے)۔

فرض کرو کہ نیم قطری خاص زور کی حدت ف۱ اور محیطی زور کی حدت ف۲ ہے۔ دونوں تناؤ کے لیے مثبت شمار کیے جائینگے۔ فرض کرو کہ قرص کی یکساں محوری موٹائی ٹ ہے اور فرض کرو کہ بیرونی اور اندرونی نصف قطر ر۱ اور ر۲ ہیں (شکل ۱۶۴)۔ فرض کرو کہ شے کا وزن فی اکائی حجم و ہے اور گردش کی یکساں زاویئی رفتار سہ ہے۔



شکل ۱۶۵



شکل ۱۶۴

قرص کے ایک چھوٹے حصے پر کی قوتوں پر غور کرو جس کا فاصلہ مرکز سے لا ہے اور جو مرکز پر زاویہ سف طہ بناتا ہے اور جس کا

صفحہ ۳۰۲

نیم قطری عرض مف لا ہے (شکل ۱۶۵) - اس کا حجم لا مف طہ × مف لا × ٹ ہوگا اور نیم قطری اندر دار قوت (دوسرے رتبے کی چھوٹی مقداروں کو نظر انداز کرتے ہوئے) جاذبی اکائیوں میں حسبِ ذیل ہوگی:-

و/ج سہ۲ لا × ٹ × لا مف طہ × مف لا .... (۱)

یہ اس حاصل اندرودار قوت کے مساوی ہونی چاہیے جو اس ٹکڑے پر نیم قطری اور محیطی (متغیر) زوروں فہ اور فا کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے اور جو دفعہ گزشتہ کی طرح تحلیل کرنے سے حسبِ ذیل ہوگی:-

ٹ { فہ × مف لا × ۲ جب (مف طہ / ۲) + فہ × ۲ لا جب (مف طہ / ۲)

− (فا + مف فا) ۲ (لا + مف لا) جب (مف طہ / ۲) }

یا چھوٹی مقداروں کے پہلے رتبے تک

ٹ (فہ مف لا − فا مف لا − لا مف فا) مف طہ ...... (۲)

(۱) اور (۲) کو مساوی رکھ کر مف طہ کو بے انتہا چھوٹا کرنے سے

فہ = و/ج سہ۲ لا۲ + فا + لا (فر فا / فر لا) یا و/ج سہ۲ لا۲ + (فر / فر لا) (لا فا)
.... (۳)

اب فسادوں پر غور کرو - اگر وسطی مدور تراش میں نقاط کے خاص نیم قطری ہٹاؤ کی وجہ سے نصف قطر لا بڑھ کر لا + ء ہوجائے تو محیطی فساد صریحاً حسبِ ذیل ہوگا:-

$$\frac{۲\pi(لا+ء) - ۲\pi لا}{۲\pi لا} = \frac{ء}{لا} \quad .... (۴)$$

اس ٹکڑے کا نیم قطری عرض فساد کے بعد صریحاً

$$= \text{لا} + \text{مف لا} + \text{ء} + \text{مف ء} - (\text{لا} + \text{ء}) = \text{مف لا} + \text{مف ء}$$

اور نیم قطری فساد (جو تنش ہو تو مثبت ہوگا) ذیل کی انتہائی قیمت کے مساوی ہوگا:-

$$\frac{\text{مف لا} + \text{مف ء} - \text{مف لا}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

اس لیے دفعہ ۱۹ کی مساوات (۱) اور اوپر کی مساوات (۴) اور (۵) سے اور محور کی سمت میں خاص زور صفر ہونے کی وجہ سے $\text{ف}_{\text{ا}}$ کی (یعنی محیطی) سمت میں

$$\frac{\text{ء}}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{ے}}\left(\text{ف}_{\text{ا}} - \frac{\text{ف}_{\text{لا}}}{\text{م}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

جہاں $\frac{1}{\text{م}}$ پوائی سن کی نسبت ہے۔

اور $\text{ف}_{\text{لا}}$ کی (یعنی نیم قطری) سمت میں

$$\frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ے}}\left(\text{ف}_{\text{لا}} - \frac{\text{ف}_{\text{ا}}}{\text{م}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

سادہ ہمزاد مساواتوں (۶) اور (۷) کو حل کرنے سے صفحہ ۴۲۵

$$\text{ف}_{\text{ا}} = \frac{\text{ے م}}{\text{م}^2 - 1}\left(\text{م}\frac{\text{ء}}{\text{لا}} + \frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{\text{ے م}}{\text{م}^2 - 1}\left(\frac{\text{ء}}{\text{لا}} + \text{م}\frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

ان قیمتوں کو (۳) میں درج کرنے سے

$$\text{لا}\frac{\text{فر}^2\text{ء}}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{ء}}{\text{لا}} = -\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{سہ}^2\,\frac{\text{م}^2 - 1}{\text{م}^2\,\text{ے}}\,\text{لا}^2 \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

یا $\frac{\text{فر}^2 \text{ر}}{\text{فرلا}^2} + \frac{1}{\text{لا}}\frac{\text{فرر}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{ر}}{\text{لا}^2} = -\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{س}^2\,\frac{\text{م}^2-1}{\text{م}^2}\,\text{لا}$ ......(۱۱)

(۱۱) کا متمم تفاعل حسب ذیل مساوات کا حل ہوگا :-

$$\frac{\text{فر}^2 \text{ر}}{\text{فرلا}^2} + \frac{1}{\text{لا}}\frac{\text{فرر}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{ر}}{\text{لا}^2} = \frac{\text{فر}^2 \text{ر}}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\text{ر}}{\text{لا}}\right) = 0$$

جس کو تکمل کرنے سے

$\frac{\text{فرر}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ر}}{\text{لا}} = \text{مستقل} = 2\text{ا}$ (فرض کرو) ......(۱۲)

یا $\text{لا}\frac{\text{فرر}}{\text{فرلا}} + \text{ر} = 2\text{ا}\,\text{لا}$

دوبارہ تکمل کرنے سے —

$$\text{ر}\,\text{لا} = \text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}$$

اس لیے $\frac{\text{ر}}{\text{لا}} = \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}^2}$ ......(۱۳)

اور (۱۲) یا (۱۳) سے —

$\frac{\text{فرر}}{\text{فرلا}} = \text{ا} - \frac{\text{ب}}{\text{لا}^2}$ ......(۱۴)

مساوات (۱۰) کا خاص تکمل معلوم کرنے کے لیے فرض کرو

$$\text{ر} = \text{س}\,\text{لا}^3$$

اس کو دوبار تفرق کر کے (۱۰) میں درج کرنے سے

$$\text{س} = -\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^{2}}{\text{ہ ے}}\,\frac{\text{م}^{2}-1}{\text{م}^{2}}$$

اور چونکہ $\frac{\text{ر}}{\text{لا}} = \text{س لا}^{2}$ اور $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} = ۳\,\text{س لا}^{2}$، اس لیے (۱۰) کا مکمل حل حسبِ ذیل ہے :-

$$\frac{\text{ر}}{\text{لا}} = \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}^{2}} - \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^{2}}{\text{ہ ے}}\,\frac{\text{م}^{2}-1}{\text{م}^{2}}\,\text{لا}^{2} \quad \ldots\ldots (۱۵)$$

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} = \text{ا} - \frac{\text{ب}}{\text{لا}^{2}} - \frac{۳\,\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^{2}}{\text{ہ ے}} \times \frac{\text{م}^{2}-1}{\text{م}^{2}}\,\text{لا}^{2} \quad \ldots\ldots (۱۶)$$

ان قیمتوں کو (۹) میں درج کرنے سے صفحہ ۳۲۶

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{\text{ے م}}{\text{م}^{2}-1}\left\{(\text{م}+1)\,\text{ا} - (\text{م}-1)\frac{\text{ب}}{\text{لا}^{2}} - (۳\text{م}+1)\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^{2}}{\text{ہ ے}}\,\frac{\text{م}^{2}-1}{\text{م}^{2}}\,\text{لا}^{2}\right\} \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

جس سے ا اور ب معلوم ہو سکتے ہیں اگر $\text{ف}_{\text{لا}}$ کی قیمت دو نصف قطروں پر معلوم ہو -

قرص مرکزی سوراخ کے ساتھ — قرص میں مرکزی سوراخ ہو تو ا اور ب معلوم کرنے کے لیے شرائط حسب ذیل ہونگے :- $\text{لا} = \text{سہ}_{1}$ پر $\text{ف}_{\text{لا}} = ۰$ اور $\text{لا} = \text{سہ}_{2}$ پر $\text{ف}_{\text{لا}} = ۰$ - ان قیمتوں کو (۱۷) میں درج کرکے ا اور ب کی سادہ مساواتوں کو حل کرنے سے

$$\text{ا} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^{2}}{\text{ہ ے}}\,\frac{(۳\text{م}+1)(\text{م}-1)}{\text{م}^{2}}\left(\text{سہ}_{1}^{2}+\text{سہ}_{2}^{2}\right)$$

$$\text{ب} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^{۲}}{۸\,\text{ے}}\,\frac{(۳\text{م}+۱)(\text{م}+۱)}{\text{م}^{۲}}\,\text{سا}_{۱}^{۲}\,\text{سا}_{۲}^{۲}$$

اِن کو (۱۷) میں درج کرنے سے

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^{۲}}{۸\text{م}}\,(۳\text{م}+۱)\left\{\text{سا}_{۱}^{۲}+\text{سا}_{۲}^{۲}-\frac{\text{سا}_{۱}^{۲}\,\text{سا}_{۲}^{۲}}{\text{لا}^{۲}}-\text{لا}^{۲}\right\} \quad \text{....(۱۸)}$$

اور (۱۵) اور (۱۶) سے $\frac{\text{ی}}{\text{لا}}$ اور $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ کی قیمتیں (۸) میں درج کرنے سے

$$\text{ف}_{\text{ما}} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^{۲}}{۸\text{م}}\left\{(۳\text{م}+۱)\left(\text{سا}_{۱}^{۲}+\text{سا}_{۲}^{۲}+\frac{\text{سا}_{۱}^{۲}\,\text{سا}_{۲}^{۲}}{\text{لا}^{۲}}\right)-(\text{م}+۳)\,\text{لا}^{۲}\right\} \quad \text{............(۱۹)}$$

$\text{ف}_{\text{ما}}$ ہمیشہ مثبت رہتا ہے اور لا کے بڑھنے سے مسلسل گھٹتا ہے۔ اس کی سب میں بڑی قیمت جو لا = $\text{سا}_{۱}$ پر ہوتی ہے حسب ذیل ہے:-

$$\text{ف}_{\text{ما}}\,(\text{اعظم}) = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^{۲}}{۴\text{م}}\left\{(۳\text{م}+۱)\,\text{سا}_{۲}^{۲}+(\text{م}-۱)\,\text{سا}_{۱}^{۲}\right\} \quad \text{............(۲۰)}$$

اگر $\text{سا}_{۱}$ بہت چھوٹا ہو تو یہ ذیل کی قیمت کے قریب آتی ہے:-

$$\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^{۲}}{۴\text{م}}\,(۳\text{م}+۱)\,\text{سا}_{۲}^{۲} \quad \text{............(۲۱)}$$

اور اگر $\text{سا}_{۱}$، $\text{سا}_{۲}$ کے قریب آئے تو یہ مساوات (۱) دفعہ ۱۲۵ میں دی ہوئی قیمت کے قریب آتی ہے۔

$\text{ف}_{\text{ا}}$ جو لا = $\text{سا}_{۱}$ اور لا = $\text{سا}_{۲}$ پر صفر ہوتا ہے $\text{سا}_{۱}$ اور $\text{سا}_{۲}$ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے مثبت (یعنی تنشی) رہتا ہے۔

$$\frac{\text{فرف}_{\text{ل}}}{\text{فرلا}} \propto \left(\frac{۲\,\text{ر}_۱^۲\,\text{ر}_۲^۲}{\text{لا}^۳} - ۲\text{لا}\right)$$ جو $\text{لا} = \sqrt{\text{ر}_۱\,\text{ر}_۲}$ پر صفر ہوتا ہے

اس لیے اس نصف قطر پر نیم قطری تناؤ اعظم ہوگا اور حسب ذیل ہوگا:-

$$\text{ف}_{\text{ل}}\,(\text{اعظم}) = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^۲}{۸\,\text{م}}\,(۳\text{م}+۱)\,(\text{ر}_۱-\text{ر}_۲)^۲$$

ٹھوس قرص ـــــ اگر قرص میں مرکزی سوراخ نہ ہو تو (۱۵) میں ا اور ب کو معلوم کرنے کے لیے شرائط یہ ہونگے - لا = ر۱ پر ف$_{\text{ل}}$ = ۰ اور لا = ۰ پر ی = ۰ ـ دوسری شرط سے اور (۱۵) سے ب = ۰ اور اس طرح پہلی شرط کو (۱۷) میں درج کرنے سے صفحہ ۳۷

$$\text{ا} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^۲}{۸\,\text{ک}}\,\frac{(۳\text{م}+۱)(\text{م}-۱)}{\text{م}^۲}\,\text{ر}_۱^۲$$

اس لیے (۸) سے

$$\text{ف}_{\text{ل}} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^۲}{۸\,\text{م}}\left\{(۳\text{م}+۱)\,\text{ر}_۱^۲ - (\text{م}+۳)\,\text{لا}^۲\right\} \quad \ldots\ldots(۲۲)$$

یہ مرکز لا = ۰ پر اعظم ہوگا اور حسب ذیل ہوگا:-

$$\text{ف}_{\text{ل}}\,(\text{اعظم}) = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^۲}{۸\,\text{م}}\,(۳\text{م}+۱)\,\text{ر}_۱^۲ \;\text{یا}\; \frac{۳\text{م}+۱}{۸\,\text{م}}\,\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,(\text{سہ}\,\text{ر}_۱)^۲ \quad \ldots\ldots\ldots(۲۳)$$

یہ مرکز پر ایک بہت چھوٹے سوراخ والے قرص کی قیمت (۲۱) کا ٹھیک ٹھیک نصف، اور ایک پتلے گگر کی قیمت (دیکھو مساوات (۱) دفعہ ۱۲۵) کا $\frac{۳\text{م}+۱}{۸\,\text{م}}$ گنا ہے -

(۹) سے نیم قطری زور کی حدت

$$ف_{لا} = \frac{و}{ج}\,\frac{سہ^{۲}}{۸م}\,(۳م+۱)\,(ر_{۲}^{۲}-لا^{۲}) \quad \text{..........(۲۴)}$$

یہ ہمیشہ مثبت ہے، اور مرکز سے بیرونی کنارے کی طرف مسلسل گھٹتی ہے۔ اس کی اعظم قیمت مرکز پر ہوگی اور حسب ذیل ہوگی:

$$ف_{لا}\,(اعظم) = \frac{و}{ج}\,\frac{سہ^{۲}}{۸م}\,(۳م+۱)\,ر_{۲}^{۲}$$

جو اعظم محیطی تناؤ کے مساوی ہے۔ (۲۲) اور (۲۴) کے جملوں کو (۱۹) اور (۱۸) میں $ر_{۱}$ کی رقموں کو حذف کرکے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

گھومتے قرص میں خاص زوروں $ف_{ا}$ اور $ف_{لا}$ کی حدت کا عام تغیر گھومتے استوانے کے بہت مشابہ ہے جس کے متناظر زوروں کا تغیر اشکال ۱۶۶ء اور ۱۶۷ء میں دکھایا گیا ہے۔

عددی قیمتیں — عددی قیمتوں کے حساب میں، دفعہ گزشتہ کی طرح، ایک احتیاط ضروری ہے اور وہ یہ کہ اگر ابعاد، زور کی حدتوں اور وزن فی اکائی حجم کے لیے انچ کی اکائی اختیار کی گئی ہے تو ج کی قیمت تقریباً ۲ء۳۲ × ۱۲ (انچ فی ثانیہ فی ثانیہ) لینی چاہیے۔

م کی قیمت، جیسا کہ دفعہ ۱۲ میں بیان کیا گیا ہے، اکثر دھاتوں کے لیے ۳ سے ۴ تک ہوتی ہے۔ اوپر کے ضابطوں سے زوروں کی حدتوں کا حساب لگانے میں اگر م = ۳ اختیار کیا جائے تو غلطی سلامتی کی جانب رہیگی۔ یہ قیمت ڈھلے لوہے کے لیے تقریباً صحیح ہے۔ فولاد کے لیے غالباً م = ۴ زیادہ صحیح ہے۔

اگر زیرِ بحث دھات فولاد ہے تو انچ کی اکائی اختیار کر کے
و = ۲۸ء، پونڈ فی مکعب انچ، م = ۴ء اور ن = چکر فی منٹ لینے
سے (۲۰) حسبِ ذیل ہو جاتی ہے :-

$$ف_ی (اعظم) = (۶۴۴ء۶\ س_۱^۲ + ۹۴۱ء۱\ س_۲^۲) \times ن^۲ \times ۱۰^{-۶}$$ پونڈ فی مربع انچ ... (۲۵)

اور (۲۳) یہ ہو جاتی ہے :-

$$ف_ما (اعظم) = ۳۲۳ء۳\ ن^۲\ س_۱^۲ \times ۱۰^{-۶}$$ پونڈ فی مربع انچ ...... (۲۶)

۱۲۷ — گھومتا اُستوانہ —— ایک اُستوانے میں جو اپنے صفحہ ۲۶۸
محور کے گرد گھوم رہا ہو زوروں کی حدت کے مسئلے کا تقریبی حل چند
سادہ مفروضات کے ذریعے حاصل ہو سکتا ہے۔ ہم اس بحث کو
مرکزی (یعنی وسطی) دائری مستوی کے قریب کے حصے تک محدود
رکھینگے اور فرض کرینگے کہ محور کا طول نصف قطر کے مقابلے میں بڑا ہے۔
وسطی تراش کے کسی نقطے پر فرض کرو کہ لا کی سمت محور سے نیم قطراً
باہر کی طرف ہے، ی کی سمت اُستوانے کے محور کے متوازی اور
ما کی سمت ان دونوں کے علی القوائم اور فرض کرو کہ لا، ما اور ی کی
سمتوں میں طبعی زور علی الترتیب $ف_{لا}$، $ف_{ما}$ اور $ف_{ی}$ ہیں۔ اُستوانے کے محور کے
وسط پر ایک عمودی تراشی پتلے قرص پر غور کیا جائے تو تشاکل کی
وجہ سے اس کے کسی حصے پر کوئی جزی زور نہیں ہوگا جس کے
متمم حصوں میں سے کوئی حصہ (دفعہ ۸) کسی محور (لا یا ما یا ی) کے
گرد ایک جفت بنائے۔ اس طرح نیم قطری، محیطی، اور محوری زور سب
خاص زور ہونگے۔ ان سب صدر زوروں کو تنشی ہونے کی صورت میں مثبت
سمجھا جائیگا۔ ہم فرض کرینگے کہ ابتدا میں محور کے علی القوائم جو مستوی تراشیں
ہیں وہ استوانے کی گردش کے فسادی عمل کے بعد بھی مستوی رہتی ہیں یا

تناکل کی وجہ سے یہ مفروضہ کم از کم وسطی تراش کے لیے درست ہے اور لمبے اُستوانے میں سروں کے قریب کے حصّے کو چھوڑ کر اور ہر جگہ تقریباً صحیح ہوگا۔

اُستوانے کے ایک ٹکڑے (شکل ۱۶۵) پر نیم قطراً اندر وار عمل کرنے والی قوتوں کی مساوات وہی ہوگی جو دفعہ گزشتہ میں قرص کی صورت میں حاصل ہوئی یعنی

$$\text{ف}_{\text{ہا}} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{سہ}^{2}\,\text{لا}^{2} + \text{ف}_{\text{لا}} + \text{لا}\,\frac{\text{فرف}_{\text{لا}}}{\text{فرلا}} \quad \text{.........(۱)}$$

نیز نصف قطر لا پر کے نقطے کا ہٹاؤ لا + د پر عمل میں آئیگا جیسا کہ قرص کی صورت میں ہوا ہے اس لیے دفعہ ۱۹ کی رُو سے سمتوں لا، ہا، ی میں خاص فساد حسبِ ذیل ہونگے :-

نیم قطراً $$\text{س}_{\text{لا}} = \frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ے}}\left(\text{ف}_{\text{لا}} - \frac{\text{ف}_{\text{ہا}} + \text{ف}_{\text{ی}}}{\text{م}}\right) \quad \text{.........(۲)}$$

محیط میں $$\text{س}_{\text{ہا}} = \frac{\text{د}}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{ے}}\left(\text{ف}_{\text{ہا}} - \frac{\text{ف}_{\text{لا}} + \text{ف}_{\text{ی}}}{\text{م}}\right) \quad \text{.........(۳)}$$

محور میں $$\text{س}_{\text{ی}} = \frac{1}{\text{ے}}\left(\text{ف}_{\text{ی}} - \frac{\text{ف}_{\text{لا}} + \text{ف}_{\text{ہا}}}{\text{م}}\right) \quad \text{.........(۴)}$$

اور اگر مستوی تراشیں مستوی رہیں تو صریحاً س~ی~ بلحاظ لا کے مستقل ہوگا۔

$$\text{(۴) سے}\quad \text{ف}_{\text{ی}} = \frac{\text{ف}_{\text{لا}} + \text{ف}_{\text{ہا}}}{\text{م}} + \text{ے}\,\text{س}_{\text{ی}} \quad \text{.........(۵)}$$

اس قیمت کو (۲) اور (۳) میں درج کرنے سے

$$\text{ف}_{\text{ہا}} = \frac{\text{ے}\,\text{م}}{(\text{م}-2)(\text{م}+1)}\left\{(\text{م}-1)\frac{\text{د}}{\text{لا}} + \frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} + \text{س}_{\text{ی}}\right\} \quad \text{...(۶)}$$

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{\text{ے}\,\text{م}}{(\text{م}-2)(\text{م}+1)}\left\{(\text{م}-1)\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{د}}{\text{لا}} + \text{س}_{\text{ی}}\right\} \quad \text{...(۷)}$$

ان قیمتوں کو (۱)، میں درج کرنے سے بالکل دفعہ گزشتہ کے قرص کے مسئلے کی طرح صفحہ ۳۷۹

$$\text{لا}\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{ی}}{\text{لا}} = -\frac{\text{و}}{\text{ج}}\text{سہ}^2\frac{(\text{م}+1)(\text{م}-2)}{\text{سے م}(\text{م}-1)}\text{لا}^2 \quad ......(8)$$

مکمل حل تقریباً حسبِ سابق حسبِ ذیل ہوگا:۔

$$\frac{\text{ی}}{\text{لا}} = \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}^2} - \frac{\text{و}}{\text{ج}}\text{سہ}^2\frac{(\text{م}+1)(\text{م}-2)}{8\,\text{سے م}(\text{م}-1)}\text{لا}^2 \quad ......(9)$$

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{ا} - \frac{\text{ب}}{\text{لا}^2} - \frac{3\text{و}}{\text{ج}}\text{سہ}^2\frac{(\text{م}+1)(\text{م}-2)}{8\,\text{سے م}(\text{م}-1)}\text{لا}^2 \quad ......(10)$$

کھوکھلا اُستوانہ — مرکزی سوراخ والے قرص کی طرح شرائط یہ ہونگی، لا = بیرونی نصف قطر ر_1 پر $\text{ف}_{\text{لا}} = 0$ اور لا = اندرونی نصف قطر ر_2 پر $\text{ف}_{\text{لا}} = 0$۔ مستقل ا اور ب اس طرح حاصل ہونگے کہ (۹) اور (۱۰) سے $\frac{\text{ی}}{\text{لا}}$ اور $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ کی قیمتیں (۷) میں درج کریں جس سے

$$\text{ب} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\frac{\text{سہ}^2}{8}\frac{(\text{م}+1)(3\text{م}-2)}{\text{سے م}(\text{م}-1)}\text{ر}_1^2\text{ر}_2^2 \quad ......(11)$$

$$\text{ا} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\frac{\text{سہ}^2}{8}\frac{(\text{م}+1)(\text{م}-2)(3\text{م}-2)}{\text{سے م}^2(\text{م}-1)}(\text{ر}_1^2+\text{ر}_2^2) - \frac{\text{س}_{\text{ی}}}{\text{م}} \quad ......(12)$$

مستقل $\text{س}_{\text{ی}}$ معلوم کرنا — اگر محور کے علی القوائم وسطی تراش سے اُستوانے کو دو نصفوں میں تقسیم کیا جائے تو چونکہ ان دونوں ٹکڑوں میں سے کوئی بھی محور کے متوازی حرکت نہیں کرتا اور دونوں کے آزاد سروں پر کوئی بیرونی قوت محور کے متوازی عمل نہیں کرتی اس لیے وسطی تراش کے آرپار محوری سمت میں کوئی حاصل دھکیل یا کھینچ نہیں ہونی چاہیے یعنی

$$\text{۲}\pi \int_{\text{ر}_\text{۲}}^{\text{ر}_\text{۱}} \text{س}_\text{ی}\ \text{لا}\ \text{فرلا} = \text{۰} \qquad \ldots\ldots (\text{۱۳})$$

(۶) اور (۷) میں (۹) اور (۱۰) کی قیمتیں درج کرکے $\text{ف}_\text{ا}$ اور $\text{ف}_\text{ی}$ کی قیمتیں (۵) میں درج کرنے سے

$$\text{ف}_\text{ی} = \frac{\text{ے م}}{(\text{م}-\text{۲})(\text{م}+\text{۱})}\left\{\text{۲ا} - \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^\text{۲}}{\text{۲}}\,\frac{(\text{م}+\text{۱})(\text{م}-\text{۲})}{\text{ے م}(\text{م}-\text{۱})}\text{لا}^\text{۲} + \frac{\text{۲س}_\text{ی}}{\text{م}}\right\} + \text{ے س}_\text{ی} \qquad \ldots\ldots (\text{۱۴})$$

اس میں (۱۲) سے ا کی قیمت درج کرکے لا سے ضرب دینے سے

$$\text{ف}_\text{ی}\,\text{لا} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^\text{۲}}{\text{۴}}\left\{\frac{\text{۳م}-\text{۲}}{\text{م}(\text{م}-\text{۱})}(\text{ر}_\text{۱}^\text{۲}+\text{ر}_\text{۲}^\text{۲})\,\text{لا} - \frac{\text{۲لا}^\text{۳}}{\text{م}-\text{۱}}\right\} + \text{ے س}_\text{ی}\,\text{لا} \ldots (\text{۱۵})$$

اس لیے حدود $\text{ر}_\text{۱}$ اور $\text{ر}_\text{۲}$ کے درمیان تکمل کرکے شرط (۱۳) کو استعمال کرنے سے

$$\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^\text{۲}}{\text{۴}}\left\{\frac{\text{۳م}-\text{۲}}{\text{م}(\text{م}-\text{۱})} \times \frac{\text{ر}_\text{۱}^\text{۴}-\text{ر}_\text{۲}^\text{۴}}{\text{۲}} - \frac{\text{ر}_\text{۱}^\text{۴}-\text{ر}_\text{۲}^\text{۴}}{\text{۲}(\text{م}-\text{۱})}\right\} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{ے س}_\text{ی}(\text{ر}_\text{۱}^\text{۲}-\text{ر}_\text{۲}^\text{۲}) = \text{۰}$$

یا

$$\text{س}_\text{ی} = -\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^\text{۲}}{\text{۲}}\,\frac{\text{ر}_\text{۱}^\text{۲}+\text{ر}_\text{۲}^\text{۲}}{\text{م ے}} \qquad \ldots\ldots (\text{۱۶})$$

اس قیمت کو (۱۲) میں درج کرنے سے

صفحہ ۳۸۰

$$\text{ا} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^\text{۲}}{\text{ے}}(\text{ر}_\text{۱}^\text{۲}+\text{ر}_\text{۲}^\text{۲})\,\frac{\text{۳م}-\text{۵}}{\text{۸}(\text{م}-\text{۱})} \qquad \ldots\ldots (\text{۱۷})$$

محیطی فساد —

$$\frac{\text{اُ}}{\text{لا}} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^\text{۲}}{\text{۸ ے}}\left\{\frac{\text{۳م}-\text{۵}}{\text{م}-\text{۱}}(\text{ر}_\text{۱}^\text{۲}+\text{ر}_\text{۲}^\text{۲}) + \frac{(\text{م}+\text{۱})(\text{۳م}-\text{۲})}{\text{م}(\text{م}-\text{۱})}\right.$$

$$\left.\frac{\text{ر}_\text{۱}^\text{۲}\,\text{ر}_\text{۲}^\text{۲}}{\text{لا}^\text{۲}} - \frac{(\text{م}+\text{۱})(\text{م}-\text{۲})}{\text{م}(\text{م}-\text{۱})}\text{لا}^\text{۲}\right\} \qquad \ldots\ldots (\text{۱۸})$$

نیم قطری فساد ——

$$\frac{فر_ر}{فر_{لا}} = \frac{و}{ج}\,\frac{س^{۲}}{۸}\left\{\frac{۳م-۵}{م-۱}\left(س_۱^{۲}+س_۲^{۲}\right) - \frac{(م+۱)(۳م-۲)}{م(م-۱)}\,\frac{س_۱^{۲}س_۲^{۲}}{لا^{۲}} - ۳\,\frac{(م+۱)(م-۲)}{م(م-۱)}\,لا^{۲}\right\} \quad\ldots\ldots(۱۹)$$

محیطی تناؤ ——

$$ف_ہ = \frac{و}{ج}\,\frac{س^{۲}}{۸}\left\{\frac{۳م-۲}{م-۱}\left(س_۱^{۲}+س_۲^{۲}+\frac{س_۱^{۲}س_۲^{۲}}{لا^{۲}}\right) - \frac{م+۲}{م-۱}\,لا^{۲}\right\} \quad\ldots\ldots(۲۰)$$

نیم قطری تناؤ ——

$$ف_{لا} = \frac{و}{ج}\,\frac{س^{۲}}{۸}\,\frac{۳م-۲}{م-۱}\left(س_۱^{۲}+س_۲^{۲}-\frac{س_۱^{۲}س_۲^{۲}}{لا^{۲}}-لا^{۲}\right) \quad\ldots(۲۱)$$

محوری زور کی حدت ——

$$ف_ی = \frac{و}{ج}\,\frac{س^{۲}}{۴}\left(س_۱^{۲}+س_۲^{۲}-۲لا^{۲}\right)\frac{۱}{م-۱} \quad\ldots\ldots(۲۲)$$

محیطی تناؤ $ف_ہ$ صریحاً ہمیشہ مثبت ہے اور اس کی اعظم قیمت $لا = س_۱$ پر ہوتی ہے جو حسب ذیل ہے :—

$$ف_ہ\ (اعظم) = \frac{و}{ج}\,\frac{س^{۲}}{۴}\left(\frac{۳م-۲}{م-۱}\,س_۱^{۲}+\frac{م-۲}{م-۱}\,س_۲^{۲}\right) \quad\ldots(۲۳)$$

دیکھو اگر $س_۱$ بہت چھوٹا ہو تو یہ حسب ذیل قیمت کے قریب آتا ہے:—

$$\frac{و}{ج}\,\frac{س^{۲}}{۴}\,.\,\frac{۳م-۲}{م-۱}\,س_۱^{۲} \quad\ldots\ldots(۲۴)$$

ایک چھوٹے مرکزی سُوراخ والے اُستوانے کا اعظم محیطی تناؤ ہوگا - اور اگر ر_2 صفر کے قریب آئے تو $\text{ف}_{\text{ہا}}$ کی قیمت $\frac{\text{و}}{\text{ج}}(\text{سہ}\ \text{ر}_1)^2$ کے قریب آتی ہے جو مساوات (۱) دفعہ ۱۲۵ میں حاصل ہوئی ہے۔

نیم قطری زور $\text{ف}_{\text{لا}}$ جو کبھی منفی نہیں ہوتا اور $\text{لا} = \text{ر}_1$ اور $\text{لا} = \text{ر}_2$ پر صفر ہوتا ہے صریحاً $\text{لا} = \sqrt{\text{ر}_1\,\text{ر}_2}$ پر اعظم ہوتا ہے کیونکہ اس قیمت کے لیے $\frac{\text{دف}_{\text{لا}}}{\text{دلا}}$ صفر ہوتا ہے۔ اس نصف قطر پر صفحہ ۲۸۱

$$\text{ف}_{\text{لا}}(\text{اعظم}) = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^2}{۸}\,\frac{۳\text{م}-۲}{\text{م}-۱}\,(\text{ر}_1-\text{ر}_2)^2 \quad \ldots\ldots (۲۵)$$

محوری زور $\text{ف}_{\text{ی}}$ اندرونی سطح $\text{لا} = \text{ر}_2$ پر اعظم ہوتا ہے اور لا کے بڑھنے سے مسلسل گھٹتا ہے اور صفر ہوتا ہے جب کہ

$$\text{لا} = \sqrt{\frac{\text{ر}_1^2 + \text{ر}_2^2}{۲}}$$

اور لا کی اس سے بڑی قیمتوں کے لیے منفی ہوتا ہے۔ اس طرح اعظم فشاری زور بیرونی منحنی سطح پر ہوگا اور حسب ذیل ہوگا:-

$$\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^2}{۸}\,(\text{ر}_1^2-\text{ر}_2^2)$$

ان تینوں خاص زوروں کے بدلنے کا طور شکل نمبر ۱۹۶ میں دکھایا گیا ہے (دیکھو ذیل کی مثال ۱) - اس شکل میں وہ فساد بھی دکھایا گیا ہے جو "اعظم فساد" کے نظریے (دفعہ ۲۵) کی رُو سے لچکدار مضبوطی کا ناپ ہے۔ اے $\frac{\text{ی}}{\text{لا}}$ کی اعظم قیمت جو اندرونی منحنی سطح پر ہوتی ہے اور

بیرونی سطح کے قریب تک اس کی تمام قیمتیں محیطی زور فہا کی متناظر قیمتوں سے کم ہوتی ہیں - "اعظم زور کا فرق" جو "جزئی زور" کے نظریے (دفعہ ۲۵) کی رُو سے لچکدار مضبوطی کا ناپ ہے اندرونی منحنی سطح پر فہا - فلا ہے اور اس سے ذرا باہر کی طرف فہا - فی ہے - اس کی اعظم قیمت اندرونی سطح پر ہوتی ہے اور فہا کے مساوی ہے - اس طرح "اعظم فساد" کے نظریے کی رُو سے اُستوانے میں محوری زور سے مضبوطی بڑھتی ہے اور "اعظم زور کے فرق" کی رُو سے لچکدار مضبوطی وہی ہوتی ہے جو اعظم خاص زور ہوتا ہے -

ٹھوس اُستوانہ —— اگر اُستوانے میں مرکزی سوراخ نہ ہو تو ٹھوس قرص کی طرح شرائط یہ ہونگی :- لا = ہا پر فلا = ۰ اور لا = ۰ پر ی = ۰ - اس لیے مساواتوں (۹)، (۱۰) اور (۷) سے

$$\left.\begin{aligned} &\text{ب} = ۰ \\ &\text{ا} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^{۲}}{۸\,\text{ے}}\,\frac{(\text{م}+۱)(\text{م}-۲)(۳\text{م}-۲)}{\text{م}^{۲}(\text{م}-۱)}\,\text{ہا}^{۲} - \frac{\text{سای}}{\text{م}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(۲۶)$$

اور (۱۳) کے متناظر شرط

$$۲\pi \int_{۰}^{\text{ہا}} \text{فی}\;\text{لا}\;\text{فرلا} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots(۲۷)$$

کو استعمال کرنے سے

$$\text{سای} = -\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^{۲}}{۲}\,\frac{\text{ہا}^{۲}}{\text{م}\,\text{ے}} \quad \ldots\ldots\ldots(۲۸)$$

اور اس طرح (۲۶) سے

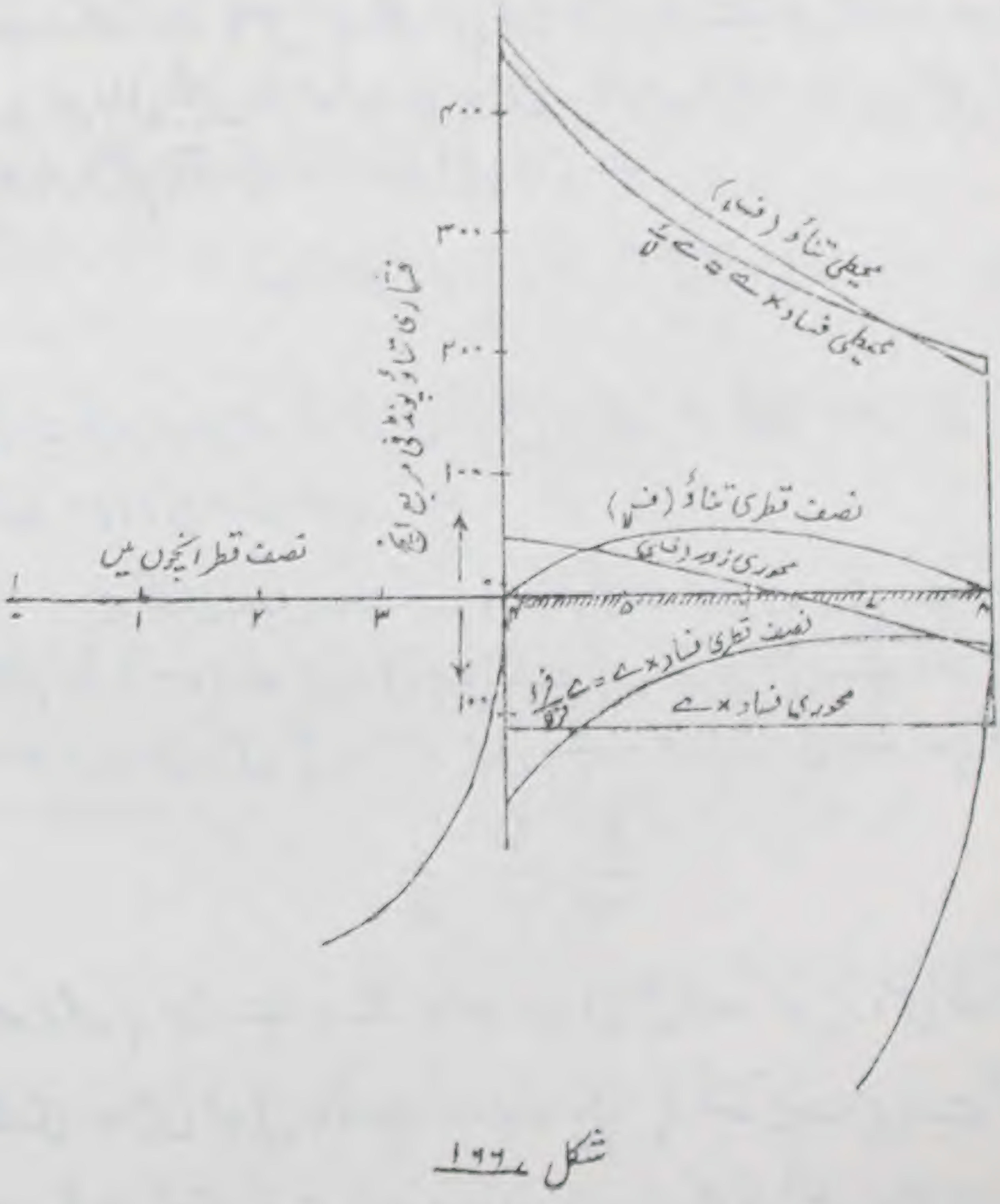
$$\text{ا} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^{۲}}{۸\,\text{ے}}\,\frac{۳\text{م}-۵}{\text{م}-۱}\,\text{ہا}^{۲} \quad \ldots\ldots\ldots(۲۹)$$

صفحہ ۳۸۲

ا اور ب کی ان قیمتوں کو (۹) اور (۱۰) میں درج کرکے $\frac{\text{ی}}{\text{لا}}$ اور $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ کی قیمتوں کو (۶) اور (۷) میں درج کرنے سے

$$\text{ف}_{\text{ر}} = \frac{\text{و}}{\text{ج}} \cdot \frac{\text{سہ}^2}{8} \left(\frac{3\text{م}-2}{\text{م}-1}\,\text{ر}_1^2 - \frac{\text{م}+2}{\text{م}-1}\,\text{لا}^2 \right) \quad \ldots\ldots\ldots (30)$$

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{\text{و}}{\text{ج}} \cdot \frac{\text{سہ}^2}{8} \cdot \frac{3\text{م}-2}{\text{م}-1} \left(\text{ر}_1^2 - \text{لا}^2 \right) \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$



شکل ۱۶۶

اور محوری زور

$$\text{ف}_{\text{ی}} = \frac{\text{و}}{\text{ج}} \frac{\text{س}^{۲}}{۴} \left(\text{ر}_{۱}^{۲} - ۲\,\text{لا}^{۲} \right) \frac{۱}{\text{م}-۱} \quad \text{.........} (۳۲)$$

نتائج (۳۰)، (۳۱) اور (۳۲) اس طرح بھی حاصل ہوسکتے ہیں

کہ (۲۰)، (۲۱) اور (۲۲) میں ر۲ والی تمام رقمیں حذف کردی جائیں - صفحہ ۲۸۳

اور فساد $\frac{\text{ی}}{\text{لا}}$ اور $\frac{\text{فر ی}}{\text{فرلا}}$ بھی جو (۹) اور (۱۰) میں ا اور ب کی قیمتیں (۲۶)

سے رکھنے سے حاصل ہونگے اس طرح حاصل ہوسکتے ہیں کہ (۱۸) اور (۱۹)

میں ر۲ والی رقمیں حذف کردی جائیں - ٹھوس اُستوانے میں محیطی تناؤ

محور پر اعظم ہوتا ہے اور حسبِ ذیل ہوتا ہے :-

$$\text{ف}_{\text{لا}} (\text{اعظم}) = \frac{\text{و}}{\text{ج}} \cdot \frac{\text{س}^{۲}}{۸} \cdot \frac{۳\text{م}-۲}{\text{م}-۱} \text{ر}_{۱}^{۲} \quad \text{.........} (۳۳)$$

یہ قیمت ایک بہت چھوٹے مرکزی سوراخ والے "کھوکھلے" اُستوانے کی

قیمت (۲۴) کی صرف نصف ہے -

نیم قطری زور کی حدت فلا کی اعظم قیمت محور پر ہوتی ہے اور

محیطی تناؤ (۳۳) کے مساوی ہوتی ہے - یہ ہر جگہ تنشی ہے اور مسلسل

گھٹ کر بیرونی منحنی سطح پر صفر ہوتی ہے - محوری زور کی حدت فی اعظم تناؤ

$$\frac{\text{و}}{\text{ج}} \cdot \frac{\text{س}^{۲}}{۴} \cdot \frac{\text{ر}_{۱}^{۲}}{\text{م}-۱}$$

سے جو محور پر ہوتا ہے بدلتے ہوئے بیرونی سطح لا = ر۱ پر اسی مقدار کے

فشاری زور میں تبدیل ہوتا ہے اور لا = $\frac{\text{ر}_{۱}}{\sqrt{۲}}$ پر صفر قیمت میں سے گزرتا

ہے - ٹھوس اُستوانے میں زوروں اور فسادوں کا تغیر شکل ۱۹۷ میں دکھایا

گیا ہے (دیکھو ذیل کی مثال ۲) - نقطہ دار منحنی اِسی اُستوانے کی اس صورت کو تعبیر کرتے ہیں کہ استوانے میں ایک چھوٹا مرکزی سوراخ ہو - ٹھوس اُستوانے میں "اعظم زور کا فرق" ہر جگہ $ف_ا - ف_ی$ ہے اور اس کی اعظم قیمت جو محور پر ہوتی ہے اعظم خاص زور سے خاصی کم ہوتی ہے لیکن اعظم خاص فساد کے معادل سادہ زور $\left(ے \frac{ی}{لا}\right)$ سے زیادہ ہوتی ہے کیونکہ اعظم خاص فساد نیم قطری اور محوری ثبت زوروں کی وجہ سے گھٹ جاتا ہے -

اُستوانے اور قُرص کا مُقابلہ ــــ اُستوانے اور قرص میں محیطی اور نیم قطری زوروں کی قیمتیں زیادہ مختلف نہیں ہوتیں جیسا کہ دفعہ ہذا کی مساواتوں (۲۰) اور (۲۱) کا دفعہ ۱۲۶ کی مساواتوں (۱۹) اور (۱۸) سے مقابلہ کرنے سے نظر آسکتا ہے - م کی قیمت دھاتوں میں ۳ سے ۴ تک لی جاسکتی ہے - پہلی قیمت ڈھلے لوہے کی قیمت کے قریب ہے اور دوسری نرم فولاد کے - زوروں کے حساب میں م کی کم قیمت سے غلطی سلامتی کی جانب ہوتی ہے یعنی زور کی حدت زیادہ حاصل ہوتی ہے - قرص اور استوانے کے مقابلے کے لیے م کی کوئی قیمت مثلاً ۳ لینے سے

قرص میں :-

محیطی زور کی حدت

$$ف_ا = \frac{و}{ج}\,\frac{سہ^۲}{۸}\left\{۳ء۳\left(ر_۱^۲ + ر_۲^۲ + \frac{ر_۱^۲ ر_۲^۲}{لا^۲}\right) - ۲\,لا^۲\right\} \quad \ldots(۳۴)$$

نیم قطری زور کی حدت

$$ف_{لا} = \frac{و}{ج}\,\frac{سہ^۲}{۸}\left(ر_۱^۲ + ر_۲^۲ - \frac{ر_۱^۲ ر_۲^۲}{لا^۲} - لا^۲\right) ۳ء۳ \quad \ldots\ldots(۳۵)$$

صفحہ ۳۸۴

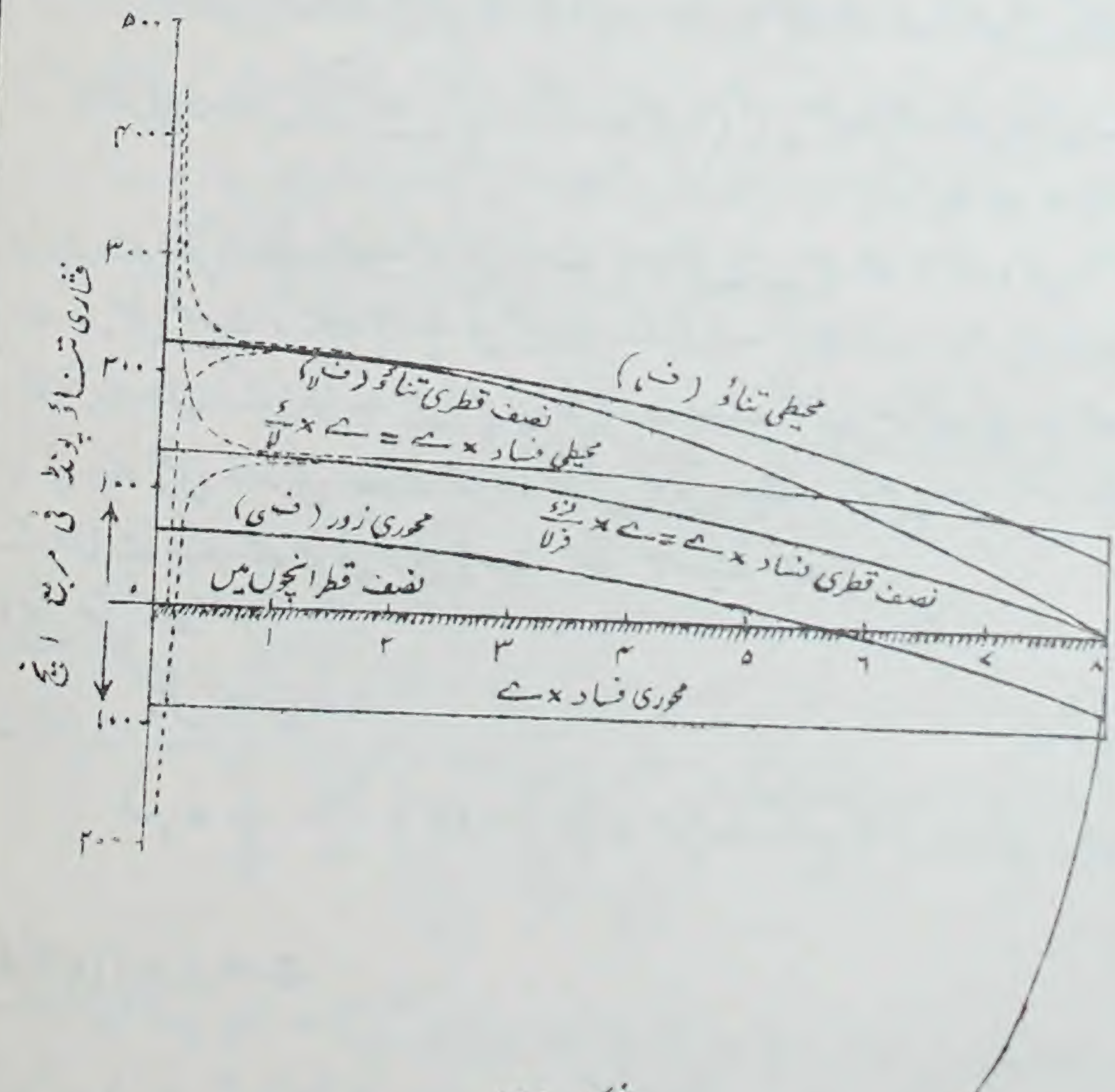
اُستوانے میں :-

محیطی زور کی حدت

$$ف_{م} = \frac{و}{ج}\,\frac{س^{۲}}{۸}\left\{۳٫۵\left(ر_{۱}^{۲} + ر_{۲}^{۲} + \frac{ر_{۱}^{۲}ر_{۲}^{۲}}{لا^{۲}}\right) - ۲٫۵\,لا^{۲}\right\} \quad ....(۳۶)$$

نیم قطری زور کی حدت

$$ف_{ل} = \frac{و}{ج}\,\frac{س^{۲}}{۸}\left(ر_{۱}^{۲} + ر_{۲}^{۲} - \frac{ر_{۱}^{۲}ر_{۲}^{۲}}{لا^{۲}} - لا^{۲}\right) ۳٫۵ \quad ....(۳۷)$$



شکل ۱۶۷

اس طرح اگر قرص یا بہت چھوٹے اُستوانے میں آزاد محوری پھیلاؤ یا سکڑاؤ فرض کرنے پر جو زور حاصل ہوتے ہیں وہ اُن زوروں سے زیادہ مختلف نہیں ہوتے جو لمبے اُستوانے میں "مستوی عمودی تراشیں مستوی رہتی ہیں" کے مفروضے سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح لمبے استوانے کے نتائج کو ایسے اُستوانوں کے لیے تقریبی طور پر صحیح سمجھنا جائز ہے جو بہت لمبے نہیں۔

یہ دیکھنا دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ اگر ہم اُستوانے کے سروں پر ایسی قوتیں عمل کرتی ہوئی فرض کریں جن سے محوری فساد ہر جگہ رُک جائے (یعنی س$_{ہا}$ = ۰ بنایا جائے) تو محیطی اور نیم قطری زوروں پر کچھ اثر نہیں پڑتا صفحہ ۳۸۵
اور ان کی قیمتوں کا محسوب کرنا بہت آسان ہوجاتا ہے۔

اُستوانوں کے لیے عددی قیمتیں ــــ انچ کو اکائی لیں تو

ج = ۳۲،۲ × ۱۲ انچ فی ثانیہ، ن = چکروں کی تعداد فی منٹ

ڈھلا لوہا ــــ و = ۰،۲۶ پونڈ فی مکعب انچ اور م = ۴ لینے سے کھوکھلے اُستوانے کے لیے (۲۳) یہ ہوجاتی ہے :-

ف$_{ہا}$ (اعظم) = ن^{۲} (۶۴۸،۶۱ س$_{۱}^{۲}$ + ۹۲،۰ س$_{۲}^{۲}$) × ۱۰$^{-۶}$ پونڈ فی مربع انچ ...(۳۸)

ٹھوس اُستوانے کے لیے (۳۳) یہ ہوجاتی ہے :-

ف$_{ہا}$ (اعظم) = ۳،۲۳ ن^{۲} س$_{۱}^{۲}$ × ۱۰$^{-۶}$ پونڈ فی مربع انچ ......(۳۹)

نرم فولاد ــــ و = ۰،۲۸ پونڈ فی مکعب انچ اور م = ۴ لینے سے کھوکھلے اُستوانے کے لیے (۲۳) یہ ہوجاتی ہے :-

ف$_{ہا}$ (اعظم) = ن^{۲} (۶،۶۲ س$_{۱}^{۲}$ + ۱،۳۲ س$_{۲}^{۲}$) × ۱۰$^{-۶}$ پونڈ فی مربع انچ ... (۴۰)

ٹھوس اُستوانے کے لیے (۳۳) یہ ہوجاتی ہے :-

ف$_{ما}$ (اعظم) = ۱۳۱٫۳ ن^{۲} ر$_{۱}^{۲}$ × ۱۰$^{-۶}$ پونڈ فی مربع انچ .... (۴۱)

اس نتیجہ (۴۱) کا دفعہ ۱۲۶ کے نتیجہ (۲۶) سے مقابلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ٹھوس قرص اور اُستوانے کے اعظم محیطی زور میں صرف تقریباً ۳ فی صدی کا فرق ہے۔

مثال ۱ — ایک ڈھلے لوہے کا اُستوانہ جس کا بیرونی قطر ۱۶ انچ اور اندرونی قطر ۸ انچ ہے ۱۰۴۰ چکر فی منٹ پر گردش کر رہا ہے۔ وزن ۲۶٫ پونڈ فی مکعب انچ اور پوائی سن کی نسبت $\frac{۱}{۴}$ لے کر حلقہ زور کی حدت معلوم کرو۔

ضابطہ (۳۰) دفعہ ۱۲۷ میں ر$_{۱}$ = ۸ انچ، ر$_{۲}$ = ۴ انچ اور ج = ۲٫۳۲ × ۱۲ رکھنے سے

$$ف_{ما} = \frac{۲۶٫}{۱۲ × ۳۲٫۲} × \left(\frac{۱۰۴۰ × π۲}{۶۰}\right)^{۲} × \frac{۱}{۸}\left\{\frac{۷}{۲}\left(۸۰ + \frac{۱۰۲۴}{لا^{۲}}\right) - \frac{۵}{۲} لا^{۲}\right\}$$

$$= ۳٫۵\left(۸۰ + \frac{۱۰۲۴}{لا^{۲}}\right) - ۲٫۵ لا^{۲}$$ پونڈ فی مربع انچ

ف$_{ما}$ کی مختلف قیمتیں شکل ۱۶۶ میں دکھائی گئی ہیں۔ اعظم قیمت جو لا = ۴ پر ہے حسبِ ذیل ہے :—

۳٫۵ × ۱۴۴ − ۴۰ = ۴۶۴ پونڈ فی مربع انچ

جس کی تنقیح ضابطہ (۳۸) کے ذریعے کی جاسکتی ہے۔

مثال ۲ — ڈھلے لوہے کے ایک ٹھوس استوانے میں جس کا قطر ۱۶ انچ ہے اور جو اپنے محور کے گرد ۱۰۴۰ چکر فی منٹ کر رہا ہے حلقہ زور کی حدت معلوم کرو۔

مستقلوں کی قیمت مثال ۱ کی طرح لینے سے ضابطہ (۳۰) دفعہ ۱۲۷ سے

$$ف_{ہا} = \frac{۷}{۲} \times ۳۴۶ - \frac{۵}{۲} لا^۲ = ۱۲۱۱ - ۲٫۵ لا^۲ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

جس کی اعظم قیمت لا = ۰ پر ہے اور ۱۲۱۱ ہے۔

اگر مرکز پر ایک سُوراخ $\frac{۱}{۵}$ انچ قطر کا ہو تو (۲۰) میں $ب = \frac{۱}{۱۰}$ لکھنے سے

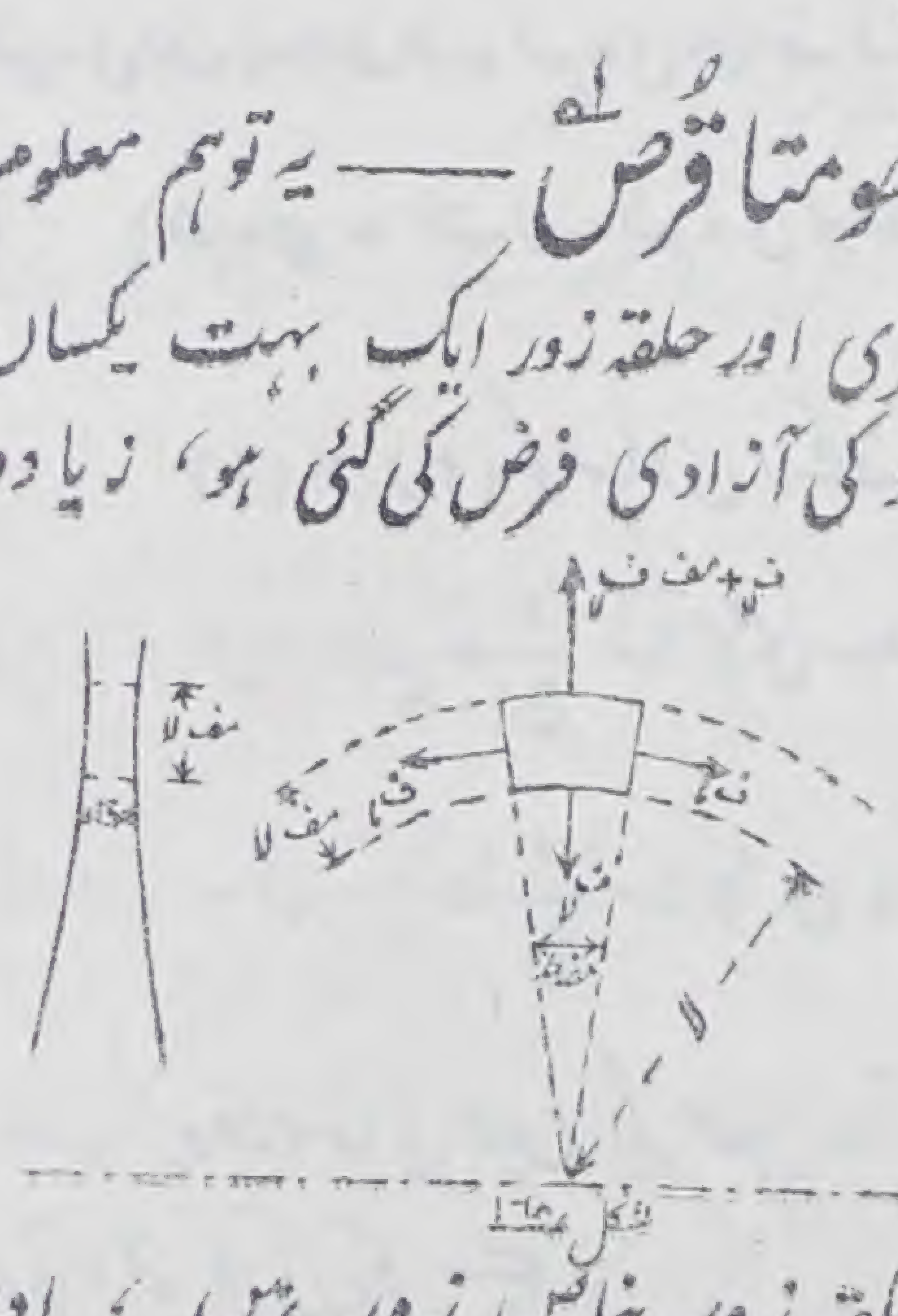
$$ف_{ہا} = \frac{۷}{۲}\left(۳۴۶٫۰۱ + \frac{۳٫۴۶}{لا^۲}\right) - \frac{۵}{۲} لا^۲$$

صفحہ ۳۸۶ $لا = \frac{۱}{۱۰}$ انچ پر اس سے

$$ف_{ہا}(\text{اعظم}) = ۳٫۵ \times ۶۹۲٫۰۱ - ۲٫۵ \times ۰٫۰۱ = ۲۴۲۲٫۰۱ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

یعنی ٹھوس اُستوانے کی قیمت ۱۲۱۱ کا دوگنا۔ دونوں صورتوں کے لیے فہا کی قیمتیں شکل ۱۶۷ میں دکھائی گئی ہیں۔

۱۲۸۔ متغیر موٹائی کا گھومتا قُرص[۱] ـــــ یہ تو ہم معلوم کر چکے ہیں کہ لمبے اُستوانے میں نیم قطری اور حلقہ زور ایک بہت یکساں پتلے قرص سے جس میں محوری فساد کی آزادی فرض کی گئی ہو، زیادہ مختلف نہیں ہوتے۔



شکل ۱۶۸

اب ہم بطور تقریب کے ایک پتلے لیکن متغیر موٹائی کے قرص کے زور دفعہ ۱۲۶ کے طریقے سے معلوم کرینگے۔ ہم یہ فرض کرینگے کہ نیم قطری اور حلقہ زور خاص زور ہیں، اور

[۱] رسالہ انجینیرنگ ۹ مئی ۱۹۱۳ء کے ایک مضمون "ٹربین کے پہیوں میں مرکز گریز زور کی وجہ سے بگاڑ" میں اور امریکن سوسائٹی آف میکانکل انجینیرز کی روداد مورخہ ۱۷ مئی ۱۹۱۲ء میں ایس۔ اے۔ ماس S. A. Moss کے ایک مضمون "مرکز گریز دوروں سے تیز رفتار پہیوں کے قطر کا اضافہ" میں مصنف کے اندرونی قطر کے اضافے کو ناپ کر ٹربین کے پہیوں کے زوروں کے نظریہ کی دلچسپ تجرباتی جانچ کی گئی ہے۔

محوری خاص زور صفر ہے - فرض کرو کہ دفعہ گزشتہ کی طرح لا، ما اور ی علی الترتیب نیم قطر، مماس، محور کی سمت میں ناپے جاتے ہیں - ی قرص کی متغیر موٹائی نصف قطر لا پر ہے - یکساں قرص کی طرح یہاں بھی قرص کے ایک ٹکڑے کی قوتوں پر غور کرو جس کی نیم قطری موٹائی مف لا ہے اور جو مرکز پر زاویہ مف طہ بناتا ہے (شکل ۱۶۸) - اگر یکساں زاویئی رفتار سہ ہو تو سابق کی ترقیم استعمال کرتے ہوئے نیم قطری اندروار قوت حسبِ ذیل ہونی چاہیے —

$\frac{و}{ج}$ سہ^2 لا × لا مف طہ × مف لا × ی .... (۱)

اور اس رقبے کی چھوٹی مقداروں تک اندرونی نیم قطری اندروار قوتیں حسبِ ذیل ہونگی :—

ف$_{ما}$ × ی مف لا × مف طہ + ف$_{ما}$ × ی × لا مف طہ - (ف$_{لا}$ + مف ف$_{لا}$) (لا + مف لا) مف طہ (ی + مف لا)

یا (ف$_{ما}$ × ی × مف لا - ف$_{ما}$ × ی × مف لا - لا ی مف ف$_{لا}$ - ف$_{لا}$ لا مف ی) مف طہ
.... (۲)

(۱) اور (۲) کو مساوی رکھنے سے

$$ی × ف_{ما} = \frac{و}{ج} سہ^2 لا^2 ی + ف_{ما} ی + ف_{لا} لا \frac{فری}{فرلا} + لا ی \frac{فرف_{لا}}{فرلا} ...(۳)$$

$$= \frac{و}{ج} سہ^2 لا^2 ی + \frac{فر}{فرلا} (لا ی ف_{لا}) .... (۳)$$

دفعہ ۱۲۶ کی طرح اگر ف$_{ی}$ = ۰ اور نصف قطر لا پر نیم قطری ہٹاؤ ء ہو تو دفعہ ۱۹ کی رُو سے

$$حلقہ فساد = \frac{ء}{لا} = \frac{۱}{ے} (ف_{ما} - \frac{ف_{لا}}{م})$$

$$\text{نیم قطری فساد} = \frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ے}}\left(\text{ف}_{\text{لا}} - \frac{\text{ف}_{\text{ا}}}{\text{م}}\right)$$

صفحہ ۳۸۷ اس لیے حسبِ سابق

$$\text{ف}_{\text{ا}} = \frac{\text{ے م}}{\text{م}^2 - 1}\left(\text{م}\,\frac{\text{د}}{\text{لا}} + \frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}}\right) \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{\text{ے م}}{\text{م}^2 - 1}\left(\frac{\text{د}}{\text{لا}} + \text{م}\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}}\right) \quad \ldots\ldots (5)$$

ان قیمتوں کو (۳) میں درج کرکے تحویل کرنے سے ــ

$$\frac{\text{فر}^2\text{د}}{\text{فرلا}^2} + \left(\frac{1}{\text{ی}}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + \frac{1}{\text{لا}}\right)\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} + \left(\frac{1}{\text{م لا ی}}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} - \frac{1}{\text{لا}^2}\right)\text{د}$$

$$= -\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{سہ}^2\,\frac{\text{م}^2 - 1}{\text{ے م}^2}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots (6)$$

اس مساوات کا تکمل ی کی شکل پر منحصر ہے ۔ مثلاً اگر $\text{ی} = \text{ک لا}^{\text{ن}}$ تو (۶) حسبِ ذیل ہو جاتی ہے :—

$$\frac{\text{فر}^2\text{د}}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{ن} + 1}{\text{لا}}\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ن} - \text{م}}{\text{م لا}^2} \times \text{د} = -\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{سہ}^2\,\frac{\text{م}^2 - 1}{\text{م}^2\text{ے}}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots (7)$$

$$\text{یا}\quad \text{لا}^2\,\frac{\text{فر}^2\text{د}}{\text{فرلا}^2} + (\text{ن} + 1)\,\text{لا}\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ن} - \text{م}}{\text{م}} \times \text{د} = -\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{سہ}^2\,\frac{\text{م}^2 - 1}{\text{ے م}^2}\,\text{لا}^3 \quad \ldots\ldots (8)$$

جو ایک متجانس خطی مساوات ہے ۔ متمم تفاعل $\text{د} = \text{س لا}^{\text{ک}}$ فرض کرنے سے حاصل ہوگا ۔ اس سے د، $\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}}$ اور $\frac{\text{فر}^2\text{د}}{\text{فرلا}^2}$ کی قیمت مساوات کی دائیں جانب درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ ک حسبِ ذیل شرط کو

پورا کریگا

$$\text{له}^{2} + \text{ن}\,\text{له} + \frac{\text{ن}}{\text{م}} - 1 = 0$$

یعنی له اس مساوات درجہ دوم کی اصلوں له₁، له₂ کے مساوی ہونا چاہیے اور اس طرح متمم تفاعل یہ ہوگا :-

$$\text{و} = \text{س}_{1}\,\text{لا}^{\text{له}_{1}} + \text{س}_{2}\,\text{لا}^{\text{له}_{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

(۸) کا ایک خاص تکمل $\text{و} = \text{ب}\,\text{لا}^{3}$ فرض کرنے سے حاصل ہوگا - اس کو (۸) میں درج کرنے سے

$$\text{ب} = -\frac{\text{و}}{\text{ج}} \times \frac{\text{سہ}^{2}}{\text{ے}} \times \frac{\text{م}^{2} - 1}{\text{م}\,(3\,\text{م}\,\text{ن} + 8\,\text{م} + \text{ن})} \quad \ldots\ldots (10)$$

اس طرح مکمل حل حسبِ ذیل ہوا :-

$$\text{و} = \text{س}_{1}\,\text{لا}^{\text{له}_{1}} + \text{س}_{2}\,\text{لا}^{\text{له}_{2}} - \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{سہ}^{2}}{\text{ے}}\,\frac{\text{م}^{2} - 1}{\text{م}\,(3\,\text{م}\,\text{ن} + 8\,\text{م} + \text{ن})}\,\text{لا}^{3} \quad \ldots (11)$$

$\frac{\text{و}}{\text{لا}}$ اور $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت (۴) اور (۵) میں درج کریں تو مستقل س_{1} اور س_{2} دی ہوئی شرائطِ سوال سے معین ہونگے - اگر قرص کسی پہیے کا جزو ہو تو زور یا فساد $\frac{\text{و}}{\text{لا}}$ کی معلومہ شرائط گگر سے اور قبے یا ناف سے حاصل ہونگے - مثلاً قرص اور گگر کے ملاپ پر دونوں کے حلقہ فساد مساوی ہونے چاہییں اور ملاپ کے قریب گگر اور قرص میں نیم قطری زور کی اوسط حدیں موٹائی کے بالعکس متناسب ہونے چاہییں - غالباً حدتیں خود موٹائی کے اندر بھی متغیر ہوتی ہیں اور یہ تغیر اُس وقت صفحہ ۳۸۸ زیادہ ہوتا ہے جب کہ موٹائی کی تبدیلی ایک دم (یعنی غیر تدریجی) ہو -

یکساں مضبوطی کا قرص —— ایک دلچسپ صورت یہ ہے کہ نیم قطری اور حلقہ زور کی حدتیں ہر جگہ باہم مساوی ہوں اور مستقل ہوں یعنی $\text{ف}_{\text{ا}} = \text{ف}_{\text{ہا}} = \text{ز} =$ مستقل - اس کو (۳) میں درج کرنے سے

$$\text{ز} \times \text{ی} = \frac{\text{و}}{\text{ج}}\, \text{سہ}^{2} \times \text{ی} \times \text{لا}^{2} + \text{ز}\, \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} (\text{لا ی})$$

یا،

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{و}}{\text{ج}}\, \frac{\text{سہ}^{2}}{\text{ز}} \times \text{لا} \times \text{ی} = ۰$$

متکمل جزوِ ضربی $\text{و}^{\frac{\text{و}}{\text{ج}} \frac{\text{سہ}^{2}}{۲\text{ز}} \text{لا}^{2}}$ سے ضرب دینے سے ——

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \left(\text{ی}\, \text{و}^{\frac{\text{و}}{\text{ج}} \frac{\text{سہ}^{2}}{۲\text{ز}} \text{لا}^{2}} \right) = ۰$$

تکمل کرنے سے

$$\text{ی} = \text{ا}\, \text{و}^{-\frac{\text{و}}{\text{ج}} \frac{\text{سہ}^{2}}{۲\text{ز}} \text{لا}^{2}}$$

جہاں ا ایک مستقل ہے اور لا = ۰ پر ی = ا یعنی یہ مستقل قرص کی موٹائی محور پر ہے اگر قرص کی کمیت محور تک ہو۔

سوالات نمبر ۱۱

۱- ایک ۴ انچ قطر کے بغیر جوڑ کے نل کی ضروری موٹائی کیا ہے تاکہ جب اس میں ایک سیال ۲۰۰ پونڈ فی مربع انچ کے دباؤ کے تحت ہو تو زور کی اعظم حدت ۱۲۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو۔

۲- ایک اسطوانی جوشارے میں جس کا اندرونی قطر ۶ فٹ ہے اور جس کی تختیاں $\frac{۵}{۸}$ انچ موٹی ہیں کتنا کامی دباؤ جائز رکھا جاسکتا ہے اگر ٹھوس

تختی میں کامی تناؤ ۱۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے ۔

۳ ۔ ایک ڈھلے لوہے کے نل میں جس کا اندرونی قطر ۱۰ انچ ہے اور موٹائی $\frac{1}{4}$ انچ ہے ۔ ۵۰ پونڈ فی مربع انچ کے اندرونی دباؤ کے تحت زور کی حدت معلوم کرو ۔ اگر نل کے اوپر $\frac{1}{8}$ انچ قطر کے فولادی تار کی ایک اکہری تہ ۱۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کے تناؤ کے تحت لپیٹی جائے تو زور کی اسی حدت کے ساتھ نل کتنا اندرونی دباؤ برداشت کرسکیگا ؟ اس دباؤ کے زیر عمل تار میں تناؤ کی حدت کیا ہوگی ؟ راست لچک کا مقیاس فولاد کے لیے ڈھلے لوہے کا دو گنا لیا جائے اور پوائی سن کی نسبت ٫۳ لو ۔

۴ ۔ ایک ۱۵ انچہ ماتوائی نل کی ضروری موٹائی معلوم کرو جس کو ۱۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کا دباؤ برداشت کرنا ہے اور جس کے مادے کے اندر زور ۱۵۰۰ پونڈ فی مربع انچ تک محدود رہنا چاہیے ۔ نل کی بیرونی سطح پر زور کی حدت کیا ہوگی ۔

۵ ۔ ایک ماتوائی نل کا قطر ۴ انچ اور موٹائی ۱ انچ ہے ۔ جائز اندرونی دباؤ کیا ہوگا اگر نل کے مادے کے اندر زور ۴۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے ۔

۶ ۔ ایک ۱۲ انچ قطر کے ماتوائی استوانے کی دھات کی ضروری موٹائی معلوم کرو اگر اس کو ۱۲۰۰ پونڈ فی مربع انچ کا دباؤ برداشت کرنا ہو اور دھات کے اندر اعظم تناؤ ۴۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے ۔

۷ ۔ ۲۰ انچ قطر کے ایک کروی خول میں ۲۰۰ پونڈ فی مربع انچ کا اندرونی دباؤ ہے ۔ دھات کی موٹائی کیا ہونی چاہیے کہ زور کی اعظم حدت ۵۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو ۔

۸ ۔ ایک مرکب استوانہ ۶ انچ بیرونی اور $4\frac{1}{2}$ انچ اندرونی قطر کے ایک نل کو ایک اور نل کے اوپر سکڑا کر بنایا گیا ہے جس کا اندرونی قطر ۳ انچ ہے ۔ اگر سکڑانے کے بعد مشترک سطح پر نیم قطری فشار ۴۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہو تو اندرونی بیرونی اور مشترک سطح پر محیطی زور معلوم کرو ۔ صفحہ ۳۸۹

۹ ۔ گزشتہ سوال میں سکڑاؤ کے لیے قطر کا ضروری فرق معلوم کرو جس سے

ضروری نیم قطری دباؤ پیدا ہو - (ے = ۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ) -

۱۰ - اگر سوال ۸ کے مرکب استوانے پر ۱۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کا اندرونی دباؤ عمل کرے تو بیرونی اور اندرونی سطح پر حلقہ تناؤ اور اعظم حلقہ تناؤ معلوم کرو۔

۱۱ - ایک ۳ فٹ قطر کے پہیئے کی گگر فولاد کی ہے جس کا وزن ۰٫۲۸ پونڈ فی مکعب انچ ہے - آرّوں (spokes) کے اثر کو نظر انداز کر کے معلوم کرو کہ پہیئہ کتنے چکر فی منٹ کر سکتا ہے بغیر اس کے کہ زور ۱۰ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ ہو اور اس سے پہیئے کا قطر کتنا بڑھ جائیگا - (ے = ۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ) -

۱۲ - زور کی ایک ہی اعظم حدت کے لیے (۱) ٹھوس استوانے (۲) ٹھوس پتلے قرص (۳) پتلے حلقے کی محیطی رفتاروں کا مقابلہ کرو۔ حلقے کی رفتار کو اکائی مانو اور م = ۳٫۵ لو۔

۱۳ - ایک رگڑ گرفت (friction clutch) کے ڈھلے لوہے کے اُستوانی غلاف کا اندرونی قطر ۱۹ انچ اور موٹائی $\frac{۷}{۸}$ انچ ہے۔ رگڑ بلاکوں کا غلاف پر دباؤ ۸۰ پونڈ فی مربع انچ ہے اور غلاف اپنے محور کے گرد ۵۰۰ چکر فی منٹ کرتا ہے - غلاف کو ایک پتلا خول مان کر اس کے مادے کے اندر تنشی زور کی اعظم حدت کا تخمینہ کرو۔ ڈھلے لوہے کا وزن ۰٫۲۶ پونڈ فی مکعب انچ لو۔

بارھواں باب

منحنی سلاخوں کا خماؤ

۱۲۹- خماؤ کا نظریہ ــــــ سیدھے شہتیر کے لیے "سادہ خماؤ" میں پیدا ہونے والے زوروں اور فسادوں اور فسادی عملوں کے ربط چند بنیادی مفروضات کے تحت دفعات ٦٠ تا ٦٤ میں قائم کیے گئے تھے - یہ ربط اُن صورتوں میں بھی کافی صحت کے ساتھ استعمال کیے جا سکتے ہیں جن میں شہتیر میں انحنا ہے لیکن خفیف سا ہے، یعنی مرکزی طولی محور کا نصف قطرِ انحنا شہتیر کے تراشی ابعاد کے مقابلے میں بڑا ہے - اگر مرکزی طولی محور کا نصف قطرِ انحنا ابتدا میں را ہو اور آخر میں رَا ہو جائے تو مساوات (۱) دفعہ ٦١ سے اسی ترقیم کے ساتھ

$$\text{ف} = \text{ے}\,\text{ما}\left(\frac{1}{\bar{\text{ر}}_{\text{ا}}} - \frac{1}{\text{ر}_{\text{ا}}}\right)$$

اور مساوات (۴) دفعہ ٦٣ سے

$$\text{م} = \text{ے}\,\bar{\text{آ}}\left(\frac{1}{\bar{\text{ر}}_{\text{ا}}} - \frac{1}{\text{ر}_{\text{ا}}}\right)$$

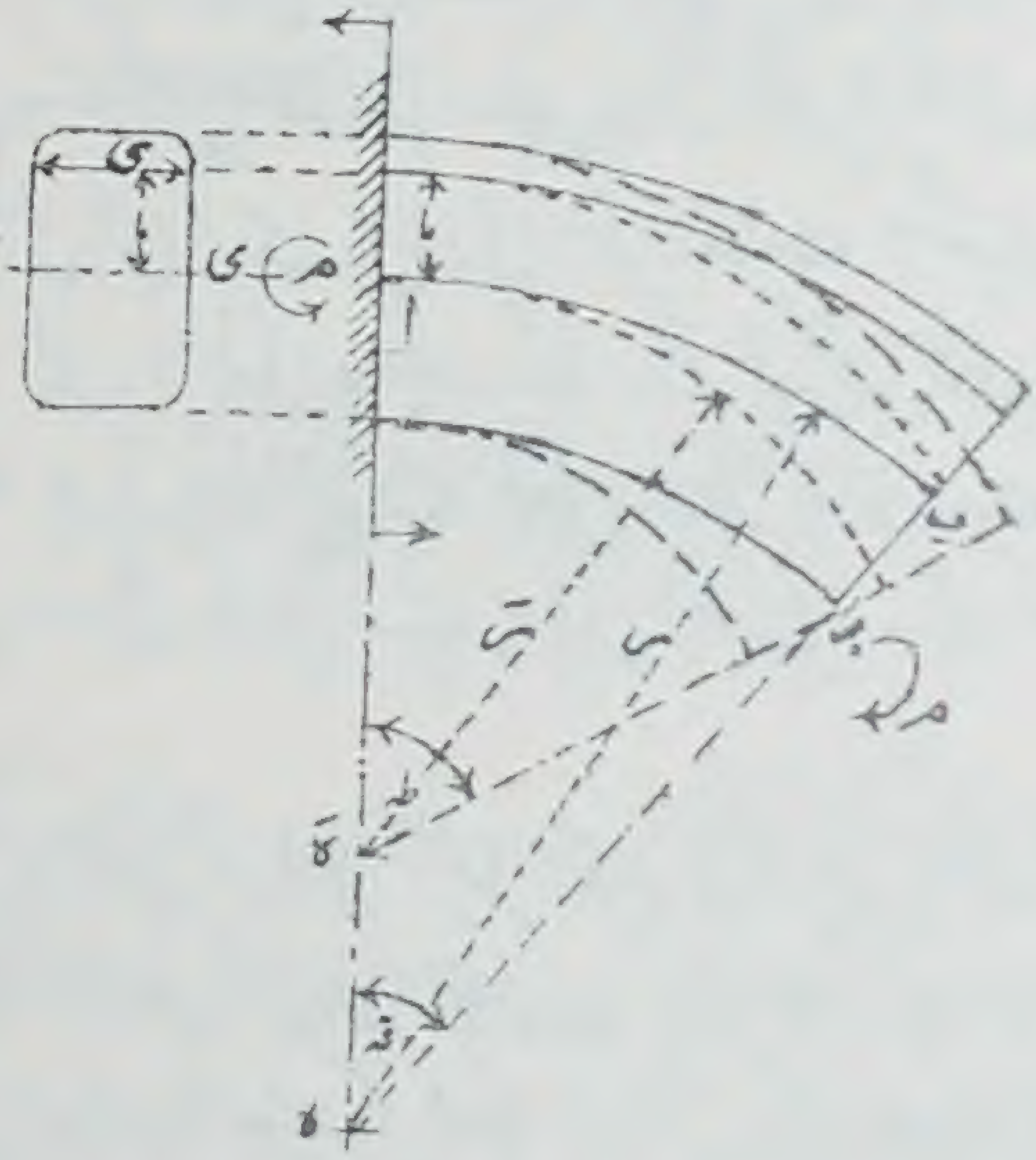
اور ان دونوں کو اکٹھا لکھنے سے

$$\frac{ف}{ا} = \frac{م}{آ} = ے \left(\frac{۱}{ر} - \frac{۱}{ر}\right)$$

اِس تقریب کی رُو سے جو دفعہ ۷۱ میں استعمال کیا گیا ہے زور کی حدت تراش کے اُس مرکزی محور کے فاصلے کے متناسب ہوتی ہے جو خماؤ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔ اگر سلاخ ابتدائً سیدھی نہ ہو اور اس صورت میں بھی وہی بنیادی مفروضات اختیار کیے جائیں جو دفعات ۶۰ تا ۶۲ میں اختیار کیے گئے تھے تو نتیجہ مختلف حاصل ہوتا ہے اور انحنا بڑا ہو تو یہ اختلاف قابلِ لحاظ ہوتا ہے۔ اور یہ بات اکثر صورتوں میں واقع ہوتی ہے جہاں مضبوطی کے حسابات کی اہمیت ہو۔

سادہ نظریہ یعنی برنولی آئیلر نظریہ کی ترمیم یافتہ شکل کا بڑے انحنا کی سلاخوں مثلاً آنکڑوں کڑیوں اور چھلوں کے خماؤ پر اطلاق کرنے میں اس بات کا خیال رہنا چاہیے کہ عموماً تراش کے ابعاد نصف قطر انحنا یا سلاخ کے طول دونوں میں سے کسی کے مقابلے میں بھی بہت کم نہیں ہوتے۔ اس طرح ہم اس نظریے کو اُن حدود سے باہر گھسیٹ رہے ہیں جو سیدھی سلاخوں کی صورت میں فرض کی گئی تھیں۔ اِس لیے اِن نتائج کو بالکل باضابطہ صحیح نہیں سمجھنا چاہیے بلکہ مضبوطی کے حساب میں بہترین کامی تقریب جو ممکن ہے۔ ہم یہ فرض کرینگے کہ نیم قطری تراشوں کے مراکزِ ہندسی میں سے گزرنے والا مرکزی خط خماؤ سے پہلے اور بعد یعنی ہمیشہ سارا کا سارا ایک ہی مستوی میں رہتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک سلاخ کے سروں پر مساوی اور مخالف
صفحہ ۴۹۱ جفت عمل کر رہے ہیں اور اس کا ابتدائی نصف قطرِ انحنا ر ہے اور آخری نصف قطرِ انحنا ر ہے (شکل ۱۶۹)۔ نیم قطری تراشوں میں ایک محور ی یَ لو جو مرکز ہندسی میں سے گزرے اور نصف قطرِ انحنا کے علی القوائم ہو اور اس محور سے تراش کے کسی نقطے کے

فاصلے کو ما سے تعبیر کرو اور اس کو مرکزِ انحنا کی مخالف سمت میں مثبت اور مرکزِ انحنا کی طرف منفی سمجھو ۔ تراش کے عرض کو ما کے علی القوائم



شکل ۱۶۹

ی سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ سلاخ کا مستقل تراشی رقبہ ب ہے جو ∑ (ی فرما) یا ∑ (مف ب) کے مساوی ہوگا جہاں مف ب رقبے کا ایک ٹکڑا ہے ۔

ایک چھوٹے طول پر غور کرو جس کا مرکزی محور ا ب ابتداءً اپنے مرکزِ انحنا ه پر زاویہ فه بناتا ہے اور خماؤ کے بعد اپنے نئے مرکزِ انحناه پر زاویہ طه بناتا ہے ۔ ابتداءً مرکزی محور سے فاصلہ ما پر کے پرت کا طول

(مرا + ما) فه

ہوگا اور آخر میں طول

(رَ + مَا) طہ

ہوجائیگا جہاں مَا فساد کے بعد ما کی قیمت ہے۔اس طرح اس پرت کا محیطی فساد

س = (رَ + مَا) طہ / (ر + ما) فہ − ۱ .... (۱)

نیز مرکزی خط کا آخری طول

رَ طہ = ر فہ (۱ + س.) .... (۲)

جہاں س. محیطی فساد مرکزی خط ما = ۰ پر ہے - اس طرح

طہ / فہ = (۱ + س.) ر / رَ

اس کو (۱) میں درج کرنے سے

س = (رَ + مَا) / (ر + ما) × ر / رَ (۱ + س.) − ۱

= (۱ + مَا / رَ) / (۱ + ما / ر) (۱ + س.) − ۱ .... (۳)

صفحہ ۳۹۲ آگے کا عمل بہت آسان ہوجائیگا اگر مَا اور ما کے فرق کو نظر انداز کردیا جائے اور تقریبی طور پر حسبِ ذیل مساوات کو لے لیں:۔

س = (۱ + ما / رَ) / (۱ + ما / ر) (۱ + س.) − ۱

= ما (۱ + س.) (۱ / رَ − ۱ / ر) / (۱ + ما / رَ) + س. ..... (۴)

اور محیطی فساد کو سادہ اور یکساں راست زور کے فساد کی طرح آزاد مانیں تو مرکزی خط سے فاصلہ ا پر کے پرت پر زور کی حدت

$$\text{ف} = \text{ے} \times \text{س} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

نیز دفعہ ۶۲ کی طرح —

$$\sum(\text{ف مف ب}) = ۰ = \text{ے} \sum(\text{س} \times \text{مف ب}) \quad \ldots\ldots (۶)$$

ے سے تقسیم کرکے (۴) سے متغیر س کی قیمت درج کریں تو

$$(۱ + \text{س}_۔)\left(\frac{۱}{\text{ر}_۔} - \frac{۱}{\text{ر}}\right) \sum\left(\frac{\text{ا}}{۱ + \frac{\text{ا}}{\text{ر}}} \times \text{مف ب}\right) + \text{س}_۔ \text{ب} = ۰ \quad \ldots (۷)$$

$$\text{یا } \text{ر}(۱ + \text{س}_۔)\left(\frac{۱}{\text{ر}_۔} - \frac{۱}{\text{ر}}\right) \sum\left(\frac{\text{ا}}{\text{ا} + \text{ر}} \times \text{مف ب}\right) + \text{س}_۔ \text{ب} = ۰ \quad \ldots (۸)$$

اب دفعہ ۶۲ کی طرح خاؤ کے معیار کو مزاحمت کے معیار کے مساوی رکھیں اور ف کی قیمت حسب سابق (۵) اور (۴) سے لیں تو

$$\text{م} = \sum(\text{ا ف} \times \text{مف ب})$$

$$= \text{ے}\left\{\text{س}_۔ \sum(\text{ا مف ب}) + (۱ + \text{س}_۔)\left(\frac{۱}{\text{ر}_۔} - \frac{۱}{\text{ر}}\right) \sum\left(\frac{\text{ا}^۲ \text{مف ب}}{۱ + \frac{\text{ا}}{\text{ر}}}\right)\right\}$$

لیکن $\sum(\text{ا مف ب}) = ۰$ کیونکہ ا مرکزِ ہندسی میں سے گزرنے والے محور سے ناپا جاتا ہے، اس لیے

$$\frac{\text{م}}{\text{ے}} = \text{ر}(۱ + \text{س}_۔)\left(\frac{۱}{\text{ر}_۔} - \frac{۱}{\text{ر}}\right) \sum \frac{\text{ا}^۲ \text{مف ب}}{\text{ا} + \text{ر}} \quad \ldots\ldots (۹)$$

(۸) اور (۹) سے نامعلوم مقداریں س۔ اور ر معلوم ہوسکتی ہیں۔

اور پھر (۴) اور (۵) سے ما کی کسی قیمت کے لیے ف معلوم ہو سکتا ہے۔

س اور سا کی قیمتوں میں جملے $\text{ع}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ما}+\text{سا}}\times\text{مف ب}\right)$ اور $\text{ع}\left(\frac{\text{ما}^2}{\text{ما}+\text{سا}}\times\text{مف ب}\right)$ شریک ہونگے جن کی قیمت معمولی تکمل یا ترسیم کے ذریعے معلوم کی جا سکتی ہے۔ تاہم (۸) اور (۹) کو س اور سا کے لیے حل کرنے سے پہلے ان حاصل جمعوں کو آسانی کے لیے تحویل کیا جا سکتا ہے:-

$$\text{ع}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ما}+\text{سا}}\times\text{مف ب}\right)=\text{ع}\left\{\left(1-\frac{\text{سا}}{\text{ما}+\text{سا}}\right)\text{مف ب}\right\}$$

$$=\text{ع}\left(\text{مف ب}\right)-\text{سا}\,\text{ع}\left(\frac{\text{مف ب}}{\text{ما}+\text{سا}}\right)$$

$$=\text{ب}-\text{ب}' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

صفحہ ۲۹۳ جہاں $\text{ب}'=\text{ع}\left(\frac{\text{سا}}{\text{ما}+\text{سا}}\times\text{مف ب}\right)$ یا $\text{سا}\,\text{ع}\left(\frac{\text{مف ب}}{\text{ما}+\text{سا}}\right)\ \ldots\ldots (11)$

$$\text{ع}\left(\frac{\text{ما}^2}{\text{ما}+\text{سا}}\times\text{مف ب}\right)=\text{ع}\left\{\left(\text{ما}-\text{سا}+\frac{\text{سا}^2}{\text{ما}+\text{سا}}\right)\text{مف ب}\right\}$$

$$=\text{ع}\left(\text{ما مف ب}\right)-\text{سا}\,\text{ع}\left(\text{مف ب}\right)+\text{سا}^2\,\text{ع}\left(\frac{\text{مف ب}}{\text{ما}+\text{سا}}\right)$$

$$=0-\text{سا ب}+\text{سا ب}'$$

$$=\text{سا}\left(\text{ب}'-\text{ب}\right) \text{ یا } -\text{سا}\,\text{ع}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ما}+\text{سا}}\text{مف ب}\right)\ \ldots (12)$$

ان قیمتوں (۱۱) اور (۱۲) کو علی الترتیب (۸) اور (۹) میں درج کرنے سے

---

۵ مقدار ب' کو عام طور پر $\text{سا}\,\text{ع}\left(\frac{\text{ما}^2\,\text{مف ب}}{\text{ما}+\text{سا}}\right)$ کی رقوم میں ظاہر کیا جاتا ہے جو تراش کے معیار جمود کی ایک ترمیم یافتہ شکل ہے۔ مصنف کو یہ زیادہ سہولت بخش معلوم ہوتا ہے کہ $\text{سا}\,\text{ع}\left(\frac{\text{ما}^2\,\text{مف ب}}{\text{ما}+\text{سا}}\right)$ کو ب' کی جو ترمیم یافتہ رقبہ ہے اور دیگر مستقلوں کی رقوم میں ظاہر کیا جائے۔ دیگر تبادل طریقے یہ ہونگے کہ $\text{ع}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ما}+\text{سا}}\times\text{مف ب}\right)$ یا ب - ب' کے لیے ایک خاص حرف استعمال کیا جائے یا نسبت $\frac{\text{ب}'}{\text{ب}}$ کے لیے حرف استعمال کیا جائے۔

$$\text{ر}\,(\text{۱}+\text{س}_{\text{.}})\left(\frac{\text{۱}}{\text{ر}}-\frac{\text{۱}}{\bar{\text{ر}}}\right)(\bar{\text{ب}}-\text{ب})=\text{س}\,\text{ب} \quad \ldots\ldots(\text{۱۳})$$

$$\text{ر}^{\text{۲}}(\text{۱}+\text{س}_{\text{.}})\left(\frac{\text{۱}}{\text{ر}}-\frac{\text{۱}}{\bar{\text{ر}}}\right)(\bar{\text{ب}}-\text{ب})=\frac{\text{م}}{\text{ے}} \quad \ldots\ldots(\text{۱۴})$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{اس لیے}\quad \text{س}_{\text{.}}=\frac{\text{م}}{\text{ے}\,\text{ب}\,\text{ر}}\\ &\text{اور}\quad \frac{\text{۱}}{\text{ر}}-\frac{\text{۱}}{\bar{\text{ر}}}=\frac{\text{م}}{\text{ے}\,\text{ب}\,\text{ر}+\text{م}}\times\frac{\text{ب}}{(\bar{\text{ب}}-\text{ب})\,\text{ر}} \end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots(\text{۱۵})$$

اس لیے اِن قیمتوں کو (۴) اور (۵) میں درج کرنے سے

$$\text{ف}=\frac{\text{م}}{\text{ر}}\left\{\frac{\text{ما}}{(\text{ما}+\text{ر})(\bar{\text{ب}}-\text{ب})}+\frac{\text{۱}}{\text{ب}}\right\} \quad \ldots\ldots(\text{۱۶})$$

یا

$$\text{ف}=\frac{\text{م}}{(\text{ما}+\text{ر})\,\text{ب}}\left(\text{۱}+\frac{\text{ما}}{\text{ر}}\times\frac{\bar{\text{ب}}}{\bar{\text{ب}}-\text{ب}}\right) \quad \ldots\ldots(\text{۱۶ا})$$

یا

$$\text{ف}=\frac{\text{م}}{\text{ر}\,(\bar{\text{ب}}-\text{ب})}\left(\frac{\bar{\text{ب}}}{\text{ب}}-\frac{\text{ر}}{\text{ما}+\text{ر}}\right) \quad \ldots\ldots(\text{۱۶ب})$$

(۱۶ا) سے ظاہر ہے کہ ف صفر ہوگا جب کہ

$$\text{ما}=-\text{ر}\,\frac{\bar{\text{ب}}-\text{ب}}{\bar{\text{ب}}}=\text{ع}\ (\text{فرض کرو}) \quad \ldots\ldots(\text{۱۷})$$

اس سے تعدیلی سطح کا محل حاصل ہوتا ہے۔ منفی علامت اس بات کو ظاہر کرتی ہے کہ تعدیلی سطح کا محل مرکزی خط سے "اندر" کی جانب ہے۔ (۱۶ب) سے ظاہر ہے کہ مرکزی خط سے باہر کی جانب زور کی حدت اُس وقت اعظم ہوگی جب کہ ما اپنی اعظم مثبت قیمت کو پہنچے اور اندر کی جانب جب کہ ما اپنی اعظم منفی قیمت کو پہنچے۔ اوپر کے ضابطوں

صفحہ ۳۹۴

اور ما کی علامت کی قرارداد کی رُو سے زیرِ تراش کے محدب جانب مثبت ہوگا اور مقعر جانب منفی اگر مر کو مثبت سمجھا جائے۔

نتیجے کی متبادل شکل — حسبِ سابق تقریب $\text{ماَ} = \text{ما}$ کو (۱) میں درج کرنے سے

$$\text{س} = \frac{(\text{مَر} + \text{ما})\,\text{طہ}}{(\text{مر} + \text{ما})\,\text{فہ}} - 1 = \frac{\text{طہ}(\text{مَر} + \text{ما}) - \text{فہ}(\text{مر} + \text{ما})}{\text{فہ}(\text{مر} + \text{ما})}$$

$$= \frac{\text{ما}(\text{طہ} - \text{فہ}) + \text{طہ}\,\text{مَر} - \text{فہ}\,\text{مر}}{\text{فہ}(\text{مر} + \text{ما})} \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

جو صفر ہوتا ہے جب کہ $\text{ما} = -\frac{\text{مَر}\,\text{طہ} - \text{مر}\,\text{فہ}}{\text{طہ} - \text{فہ}} = \text{ع}$ (فرض کرو) ...... (۱۹)

جہاں ع تعدیلی محور کا فاصلہ تراش کے مرکزِ ہندسی سے ہے۔ (۱۸) میں درج کرنے سے

$$\text{س} = \frac{\text{ما} - \text{ع}}{\text{مر} + \text{ما}} \times \frac{\text{طہ} - \text{فہ}}{\text{فہ}} = \frac{\text{ما} - \text{ع}}{\text{مر} + \text{ما}} \times \text{ج} \quad \ldots\ldots (۲۰)$$

جہاں ج ایک مستقل ہے۔ اور چونکہ $\sum(\text{س مف ب}) = 0$ اس لیے

$$\sum\left(\frac{\text{ما} - \text{ع}}{\text{مر} + \text{ما}}\,\text{مف ب}\right) = 0 = \sum\left(\frac{\text{ما}}{\text{مر} + \text{ما}}\,\text{مف ب}\right) - \text{ع}\sum\left(\frac{\text{مف ب}}{\text{مر} + \text{ما}}\right)$$

$$\text{ع} = \frac{\sum\left(\frac{\text{ما}}{\text{مر} + \text{ما}}\,\text{مف ب}\right)}{\sum\left(\frac{\text{مف ب}}{\text{مر} + \text{ما}}\right)} = -\frac{\text{مر}(\text{بَ} - \text{ب})}{\text{بَ}} \quad (\text{حسبِ سابق})$$

$$\text{نیز چونکہ } \text{مر} = \sum(\text{ف ما مف ب}) = -\sum(\text{س ما مف ب})$$

$$= \text{ج} \times -\sum\left\{\frac{\text{ما}(\text{ما} - \text{ع})}{\text{مر} + \text{ما}}\,\text{مف ب}\right\}$$

یعنی
$$\text{ج} = \frac{\text{ص}}{\text{ے ع}\left\{\frac{\text{ما}(\text{ما}-\text{ع})}{\text{س}+\text{ما}}\ \text{مضاب}\right\}}$$

اس کو (۲۰) میں درج کرکے ے سے ضرب دیجیے

$$\text{ف} = \text{ے س} = \frac{\text{ما}-\text{ع}}{\text{ما}+\text{س}} \times \frac{\text{ص}}{\text{ع}\left\{\frac{\text{ما}(\text{ما}-\text{ع})}{\text{س}+\text{ما}}\ \text{مضاب}\right\}} \quad \ldots\ldots (۲۱)$$

اور
$$\text{ع}\left\{\frac{\text{ما}(\text{ما}-\text{ع})}{\text{س}+\text{ما}}\ \text{مضاب}\right\} = \text{ع}\left\{\left(\text{ما}-\text{ع}-\text{س}\frac{\text{ما}-\text{ع}}{\text{ما}+\text{س}}\right)\text{مضاب}\right\}$$
$$= -\text{ع ب}$$

اس لیے
$$\text{ف} = \frac{\text{ص}}{-\text{ع ب}} \times \frac{\text{ما}-\text{ع}}{\text{ما}+\text{س}} \quad \ldots\ldots (۲۲)$$

یہ ضابطہ اپنی شکل کے لحاظ سے بہت سہل ہے لیکن اس کو استعمال کرنے کے لیے ع کی قیمت معلوم کرنا ضروری ہے۔ ع کی قیمت (۱۷) سے لے کر درج کریں تو یہ ضابطہ (۲۲) تحویل ہو کر (۱۶)، (۱۶ ا) یا (۱۶ ب) کی شکل اختیار کرلیتا ہے۔ ب (اور اس طرح ع) کی قیمت معلوم کرنے کا عمل تراش کی معمولی شکلوں کے لیے ذیل کی دو دفعات میں دیا گیا ہے۔ مساوات (۱۶ ب) سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر ما اور ف کو قائم محددوں میں ترسیم کیا جائے تو ایک قائم زائد حاصل ہوگا (دیکھو شکل ۱۷۱)۔ صفحہ ۲۹۵

سیدھی سلاخوں کی طرح یہاں بھی یہ ضابطے جو "سادہ" خماؤ سے متعلق ہیں بطور تقرب کے اُن صورتوں میں استعمال کیے جا سکتے ہیں جن میں خماؤ کا عمل سادہ نہ ہو بلکہ ایک خماؤ کے جفت کے علاوہ تراشوں کے مستویوں میں جزی قوت بھی موجود ہو جیسا کہ ذیل کے دفعات ۱۳۳ اور ۱۳۶ میں ہے۔

۱۳۰ - **متفرق تراشیں** ---- دفعہ گزشتہ کے ضابطوں کو

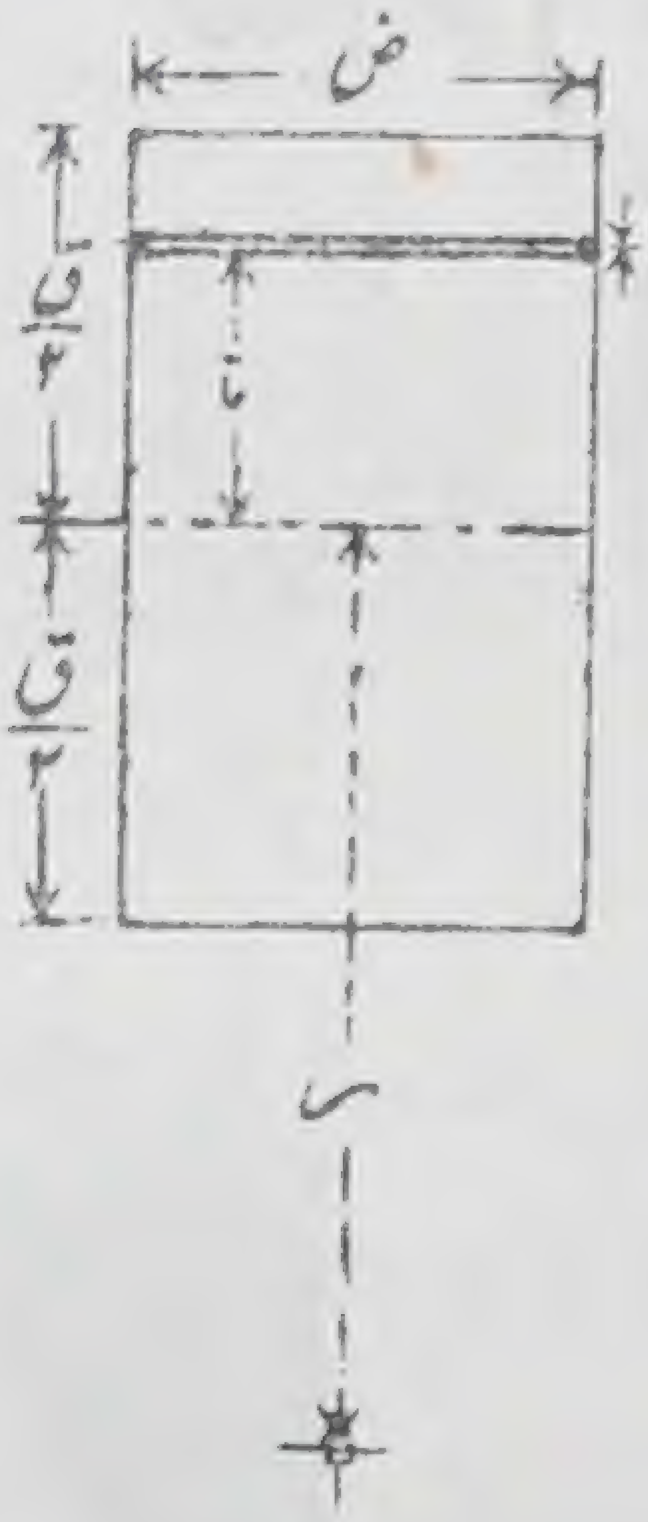
استعمال کرنے کے لیے ضروری ہے کہ مقدار

$$ب' = ع \left(\frac{ر}{ا+ر} \text{ مف ب}\right) \text{ یا } ر\,ع \left(\frac{1}{ا+ر} \text{ مف ب}\right)$$

کو معلوم کیا جائے۔

یہ تراش کے رقبہ ب کی ایک ترمیم یافتہ قیمت ہے جو دفعہ آئندہ کی طرح آسانی سے تقریباً معلوم ہو سکتی ہے لیکن سادہ تراشوں کے لیے آسانی سے محسوب کی جا سکتی ہے۔

مستطیل، شکل نمبر ١٧۔ گہرائی ق نیم قطری سمت میں، عرض ض اس گہرائی کے علی القوائم۔ رقبے کی پٹیاں ض × مف ا = مف ب لینے سے



شکل نمبر ١٧

$$ب' = ر\,ض \int_{-\frac{ق}{2}}^{\frac{ق}{2}} \frac{\text{فر ا}}{ر+ا}$$

$$= ر\,ض \text{ لوک}_و \frac{2ر+ق}{2ر-ق} \quad \text{......(1)}$$

اور چونکہ ب = ض ق اس لیے (١٧) سے

$$ع = \frac{ر \text{ لوک}_و \frac{2ر+ق}{2ر-ق} - ق}{\text{لوک}_و \frac{2ر+ق}{2ر-ق}} \quad \text{....(2)}$$

اگر (١) کو پھیلایا جائے تو

$$ب' = ض\,ق \left\{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{ق}{ر}\right)^2 + \frac{1}{80}\left(\frac{ق}{ر}\right)^4 + \dots + \text{ وغیرہ}\right\}$$

قیمت (١) کو (١٦) دفعہ ١٢٩ میں یا قیمت (٢) کو (٢٢) دفعہ ١٢٩ میں

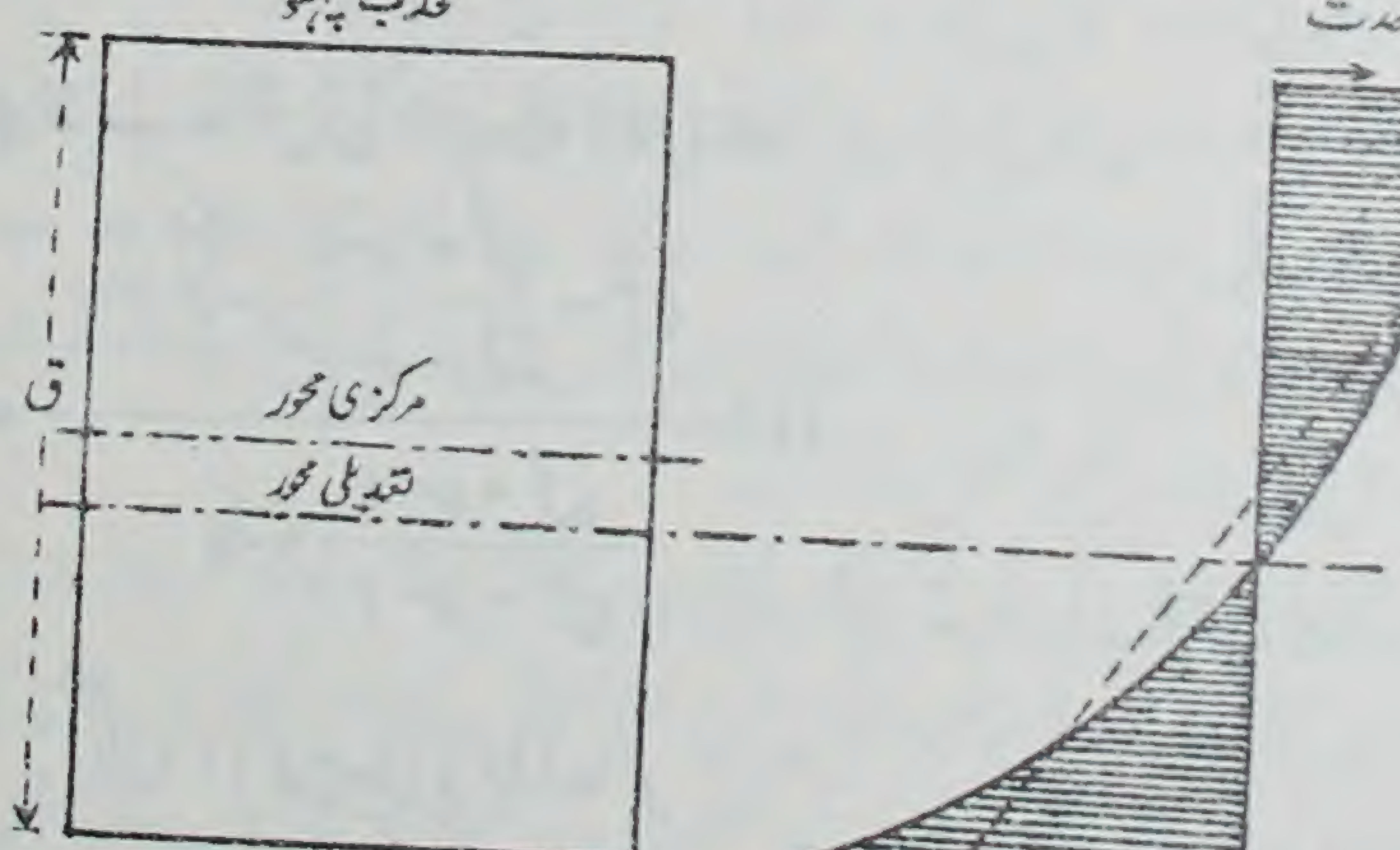
درج کرنے سے مستطیلی تراش کی سلاخ میں خماؤ کے زور کی حدت حاصل ہوتی ہے۔ اس خاص تراش کے لیے جس میں انحنا کا اوسط نصف قطر سما = ق ہو اس زور کا تغیر شکل ۱۷۱ کے مطابق ہوگا۔ تغیر کا منحنی قائم زائد ہوگا۔ مستقیم نقطہ دار خط سے زور کی وہ حدت تعبیر ہوتی ہے جو اسی تراش کی سیدھی سلاخ میں اسی خماؤ کے معیار سے پیدا ہوگی۔

دائرہ، شکل ۱۷۲۔

نصف قطر ر، ما = رجب طہ، ی = ۲ر جم طہ، فرما = رجم طہ فرطہ

$$\text{ب} = \text{سما}\int_{-\text{ر}}^{\text{ر}} \frac{\text{ی فرما}}{\text{ما}+\text{سما}} = ۲\,\text{ر}^{۲}\,\text{سما}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{جم}^{۲}\text{طہ}\cdot\text{فرطہ}}{\text{رجب طہ}+\text{سما}}$$ صفحہ ۳۹۶

$$= ۲\,\text{ر}^{۲}\,\text{سما}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \left(-\frac{۱}{\text{ر}}\,\text{جب طہ} + \frac{\text{سما}}{\text{ر}^{۲}} + \frac{۱}{\text{ر}^{۲}}\,\frac{\text{ر}^{۲}-\text{سما}^{۲}}{\text{رجب طہ}+\text{ر}}\right)\text{فرطہ}$$

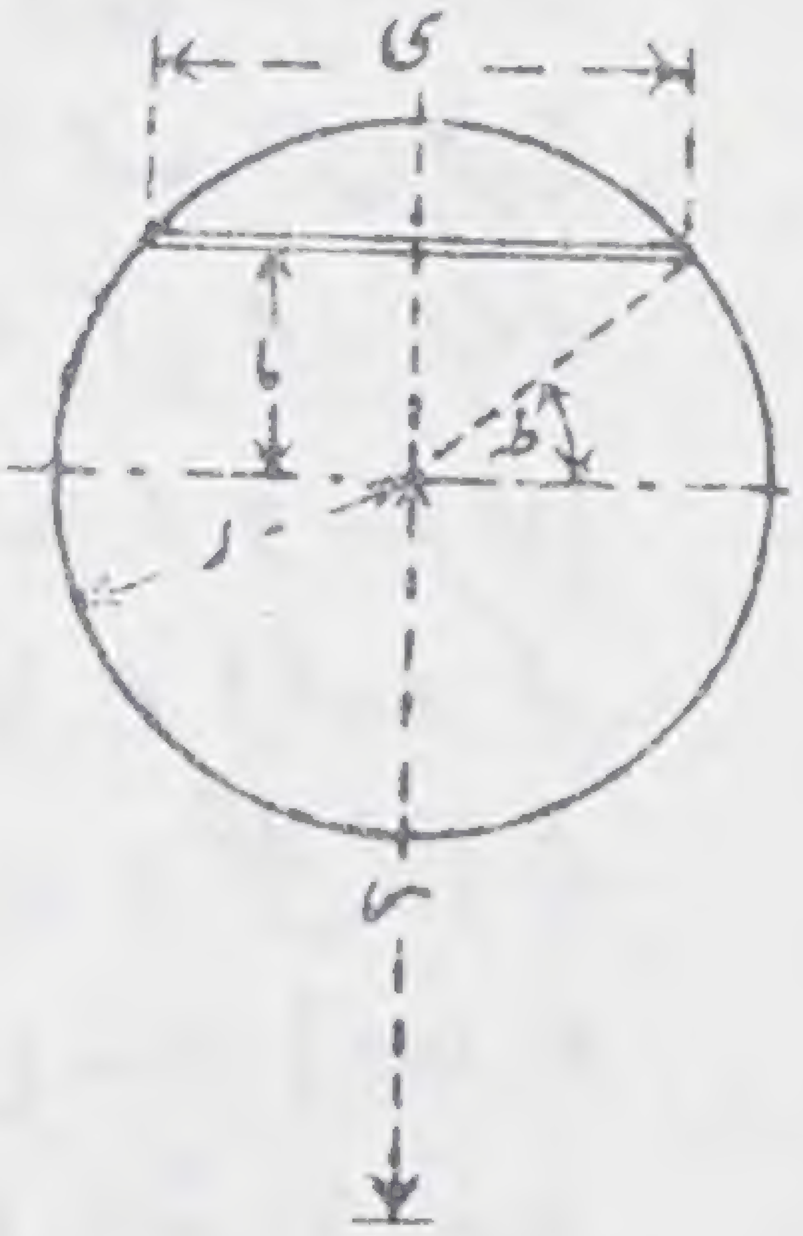


شکل ۱۷۱

= ۰ + ۲π س۲ - ۲π س √(س۲ - ر۲)

= ۲π س (س - √(س۲ - ر۲)) ....(۳)

کوئی تراش —



شکل ۱۴۲

بَ = ∑ (س/(س+ما) مف ب)

= ∑ {(۱ - ما/س + ما۲/س۲ - ما۳/س۳ + ما۴/س۴ - وغیرہ) مف ب}

تشاکل تراشوں کے لیے متبادل رقموں کے تناظر حاصل جمع صفر ہونگے، اور

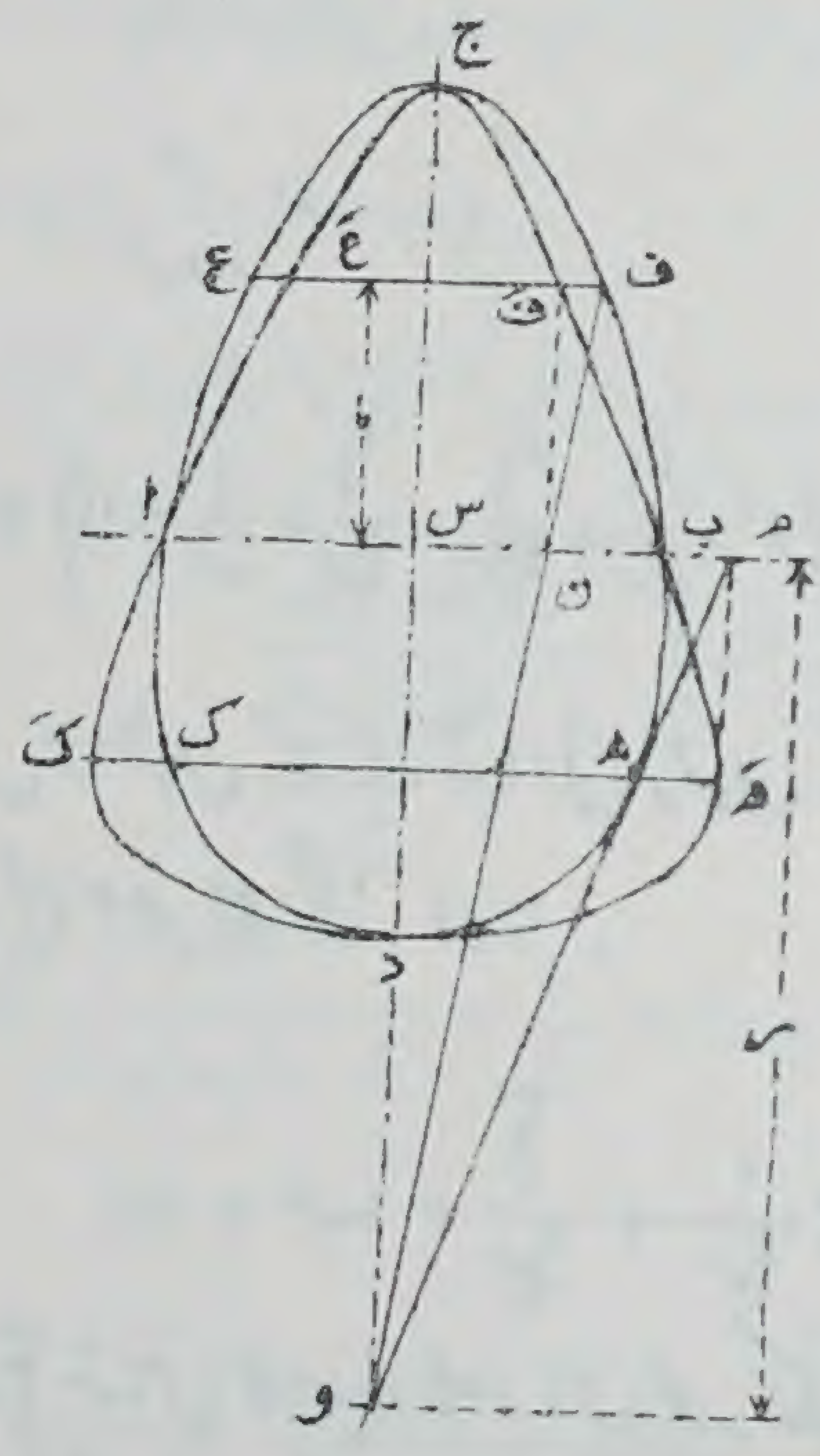
بَ = ب + آ/س۲ + ۱/س۴ ∑ (ما۴ مف ب) + وغیرہ ......(۴)

جہاں آ تراش کا معیارِ جمود اس محور کے گرد ہے جس سے ما ناپا جاتا ہے - اس طرح کے سلسلہ کی دوسری رقم سے بَ - ب کا پہلا تقرب حاصل ہوتا ہے -

۱۴۱ - ترمیم یافتہ رقبہ بَ معلوم کرنے کا ترسیمی طریقہ —

کسی تراش کے لیے مقدار بَ یا س ∑ (مف ب/(ما + س)) کی قیمت ترسیمی طور پر حسبِ ذیل طریقے سے معلوم کی جاسکتی ہے - تراش ا ع ج ف ب ھ د ک کا مرکزِ ہندسی س دفعہ ۶۸ کی طرح معلوم کیا جاسکتا ہے - اس کے بعد و س کو نصف قطرِ انحنا ر کے مساوی یا و د کو د پر کی منحنی سطح کے نصف قطر انحنا کے مساوی بناؤ - تب بَ ایک ترمیم یافتہ شکل اَ عَ جَ فَ بَ ھَ دَ کَ کا رقبہ ہوگا جس کا و س کے علی القوائم عرض ہر جگہ نسبت س/(ما + س) میں تحویل صفحہ ۳۹۷

کیا گیا ہو۔ اس میں ما فاصلہ محور اب سے ہے جو س میں سے گزرتا ہے اور
و س کے علی القوائم ہے۔ یہ ترمیم یافتہ عرض حاصل کرنے کا عمل شکل میں دکھایا
گیا ہے۔ مثلاً
عرض ع ف سے
تحویل شدہ عرض
عَ فَ اس طرح
حاصل ہوا ہے کہ
ف کو و سے ملایا
گیا جو اب کو
ن پر قطع کرتا ہے۔
ن سے اب کے
علی القوائم خط
ن فَ خط ع ف
کو فَ پر قطع کرتا
ہے۔ و سے
اب کے پرے
جو عرض ہیں وہ
تحویل میں گھٹ
جاتے ہیں اور باقی



شکل ۱۷۳

عرض بڑھ جاتے ہیں۔ دفعہ ۱۲۹ کے ضابطوں کو استعمال کرنے کے لیے
اصلی رقبہ ب اور ترمیم یافتہ رقبہ بَ کو سطح پیما کے ذریعے صحت کے ساتھ
ناپ لینا چاہیے۔

ایک متبادل عمل یہ ہوگا کہ و میں سے ایک خط اب کے متوازی کھینچ کر
اس پر ع سے عمود کھینچا جائے اور اس عمود کے پائیں کو ف سے
جائے۔ اس طرح اصلی شکل کے احاطے کا صرف نصف تبدیل ہوگا۔

متشاکل شکلوں میں اس سے کوئی فائدہ نہیں ہوگا کیونکہ ہر صورت میں صرف آدھی شکل یعنی ج ف ب ھ د س ج کھینچنے کی ضرورت ہوگی۔

۱۳۲۔ آنکڑوں کے زور —— کسی آنکڑے پر ایک انتصابی بوجھ ہو تو اس کے مرکزِ انحنا میں سے گزرنے والی خاص یا اُفقی تراش میں خماؤ کے زور معلوم کرنے کے لیے دفعہ ۱۲۹ کے ضابطوں کو ایک بہت عمدہ تقرب کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ شکل ۱۴۲ الف ایک آنکڑے کو تعبیر کرتی ہے۔ ا اور ب پر کا مرکزِ انحنا ہ ہے اور اس طرح ہ ج = ر، جہاں ج تراش ا ب کا مرکزِ ہندسی ہے۔ اور وزن و کا انتصابی بوجھ کا خط د میں سے گزرتا ہے۔ اس طرح ج د = ل۔ تب اگر تراش ا ب کے رقبہ ا ع ب ف کا رقبہ ب ہو اور بَ ترمیم یافتہ رقبہ ہو جو ب سے دفعہ ۱۳۰ یا ۱۳۱ کے طریقے سے حاصل کیا گیا ہو اور ب ج = ما‌ت اور ا ج = ما‌ن تو خماؤ کے زوروں کے علاوہ اوسط تناؤ و/ب کی رعایت رکھنے سے اور اس کا خیال رکھنے سے کہ ما کی قیمت ہ کی طرف منفی ہے زور کی انتہائی حدتیں مساوات (۱۶ ب) دفعہ ۱۲۹ کی مدد سے حسبِ ذیل ہونگی:— صفحہ ۳۹۸

تناؤ کی حدت ب پر

$$= \frac{\text{و ل}}{\text{ر}(\bar{\text{ب}} - \text{ب})}\left(\frac{\text{ر}}{\text{ر} - \text{ما}_{\text{ت}}} - \frac{\bar{\text{ب}}}{\text{ب}}\right) + \frac{\text{و}}{\text{ب}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

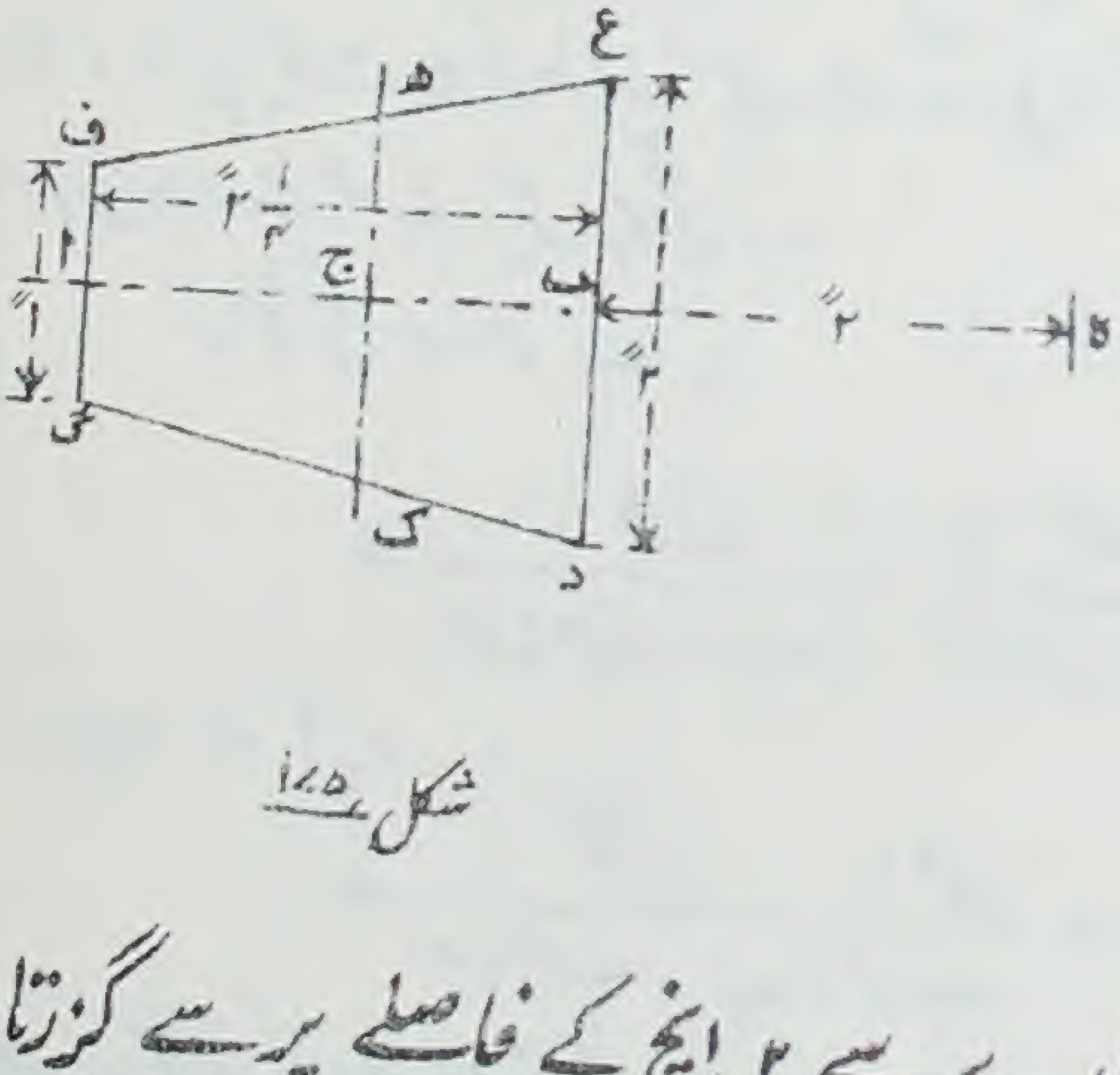
فشار کی حدت ا پر

$$= \frac{\text{و ل}}{\text{ر}(\bar{\text{ب}} - \text{ب})}\left(\frac{\bar{\text{ب}}}{\text{ب}} - \frac{\text{ر}}{\text{ر} + \text{ما}_{\text{ن}}}\right) - \frac{\text{و}}{\text{ب}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

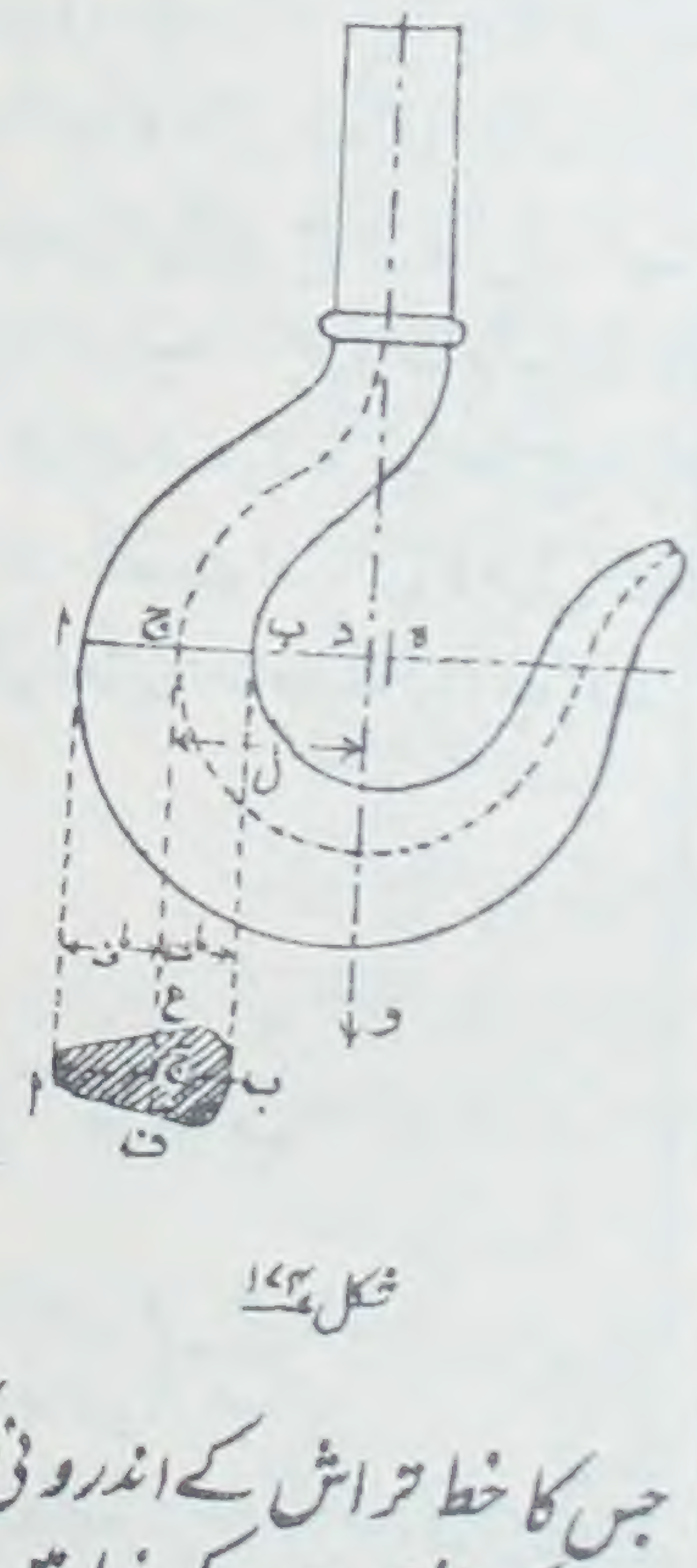
عمدہ طور پر تجویز کیے ہوئے آنکڑوں میں یہ دونوں حدتیں عموماً بہت نامساوی نہیں ہوتیں۔

ل اینڈریوز (Andrews) و پیرسن (Pearson) نے ایک نظریہ شائع کیا ہے۔ اس کا ونکلر کے نظریہ سے مقابلہ کرنے کے لیے جس کی ایک شکل دفعہ ۱۲۹ میں دی گئی ہے مصنف کا مضمون ملاحظہ ہو جو رسالہ انجنیئرنگ مورخہ ۱۱ و ۲۵ ستمبر ۱۹۱۴ء میں شائع ہوا ہے۔ مستطیلی تراش کے لیے صحیح صحیح حل ایچ۔ ایم۔ مارٹن H.M.Martin نے رسالہ انجنیئرنگ مورخہ ۵ ستمبر ۱۹۱۳ء میں اور انگلس نے بحری معماروں کی مجلس کی روداد بابت ۱۹۲۲ء کے صفحہ ۱۵۱ پر اور چند دوسرے اشخاص نے دیا ہے۔ معلوم ہوتا ہے کہ ونکلر کے آسان کیے ہوئے حل سے اعظم زور حقیقی سے کسی قدر زیادہ حاصل ہوتا ہے مثلاً بیرونی نصف قطر (ر + ½ ق) اندرونی نصف قطر (ر ـ ½ ق) کا پانچ گنا ہو تو تقریباً ایک فی صدی اینڈریوز پیرسن کا ضابطہ تمام انحناؤں کے لیے اعظم زور کو اس سے بہت زیادہ بیش اندازہ کرتا ہے مثلاً اوپر کی صورت میں تقریباً دس فی صدی۔

مثال ۱ — ایک آنکڑے کی مرکزی اُفقی تراش ایک متشاکل منحرف ہے جس کی گہرائی ۲¼ انچ، اندرونی عرض ۲ انچ، اور بیرونی عرض ۱ انچ ہے۔ زور کی انتہائی حدتوں کا تخمینہ کرو جب کہ آنکڑا ۱٫۲۵ ٹن کا ایک بوجھ اُٹھائے ہو



شکل ۱۷۵



شکل ۱۷۴

جس کا خط تراش کے اندرونی کنارے سے ۲ انچ کے فاصلے پر سے گزرتا ہو اور مرکزِ انحنا بوجھ کے خط میں ہو۔

تراش شکل ۱۷۵ میں دکھائی گئی ہے۔ مرکزِ ہندسی ج کا فاصلہ اندرونی کنارے سے اس طرح معلوم ہوسکتا ہے کہ د ع کے گرد رقبے کا معیار لیا جائے۔ رقبہ $\frac{3}{2} \times \frac{9}{4} = 3.375$ مربع انچ ہے۔

$$\text{ب ج} \times 3.375 = \left(2\tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{2} \times 2\tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times 2\tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{3} \times 2\tfrac{1}{4}\right)$$

ب ج = ۱ انچ

اس لیے ج پر نصف قطرِ انحنا r = ہ ج = ۳ انچ

تراش کا عرض ہ ک $= ۲ - \frac{۴}{۹} = ۱\frac{۵}{۹}$ انچ اور ما کو ہ ک سے

ا کی طرف مثبت شمار کریں تو تراش کا متغیر عرض

$$ی = ۱\frac{۵}{۹} - \frac{۴}{۹}\,ما = \frac{۴}{۹}\left(\frac{۷}{۲} - ما\right)$$

اس لیے

$$ب = ۳ \times \frac{۴}{۹} \int_{-۱}^{\frac{۵}{۴}} \frac{۳٫۵ - ما}{۳ + ما}\,\text{فرما} = \frac{۴}{۳}\int_{-۱}^{\frac{۵}{۴}} \left(-۱ + \frac{۶٫۵}{۳ + ما}\right)\text{فرما}$$

$$= \frac{۴}{۳}\left(-۲٫۲۵ + ۶٫۵\ \text{لوک}_{ہ}\ \frac{۴٫۲۵}{۲}\right)$$

صفحہ ۴۹۹

$$= \frac{۴}{۳}\left(-۲٫۲۵ + ۶٫۵ \times ۲٫۳۰۳ \times ۰٫۳۲۷۳\right)$$

$$= ۳٫۵۳۸۱\ \text{مربع انچ}$$

$$ب - ب = ۳٫۳۷۵ - ۳٫۵۳۸۱ = ۰٫۱۶۳۱\ \text{مربع انچ}$$

اس لیے مساوات (۱) دفعہ ۱۳۲ سے کنارے ب پر اعظم تناؤ

$$= \frac{۳ \times ۱٫۲۵}{۰٫۱۶۳۱ \times ۳}\left(\frac{۳}{۲} - \frac{۳٫۵۳۸۱}{۳٫۳۷۵}\right) + \frac{۱٫۲۵}{۳٫۳۷۵}$$

$$= \frac{۱٫۲۵}{۰٫۱۶۳۱} \times ۰٫۴۵۱۷ + ۰٫۳۷$$

$$= ۳٫۸۲\ \text{ٹن فی مربع انچ}$$

اور مساوات (۲) دفعہ ۱۳۲ سے ا پر اعظم فشاری زور

$$= \frac{۳ \times ۱٫۲۵}{۰٫۱۶۳۱ \times ۳}\left(\frac{۳٫۵۳۸۱}{۳٫۳۷۵} - \frac{۳}{۴٫۲۵}\right) - ۰٫۳۷$$

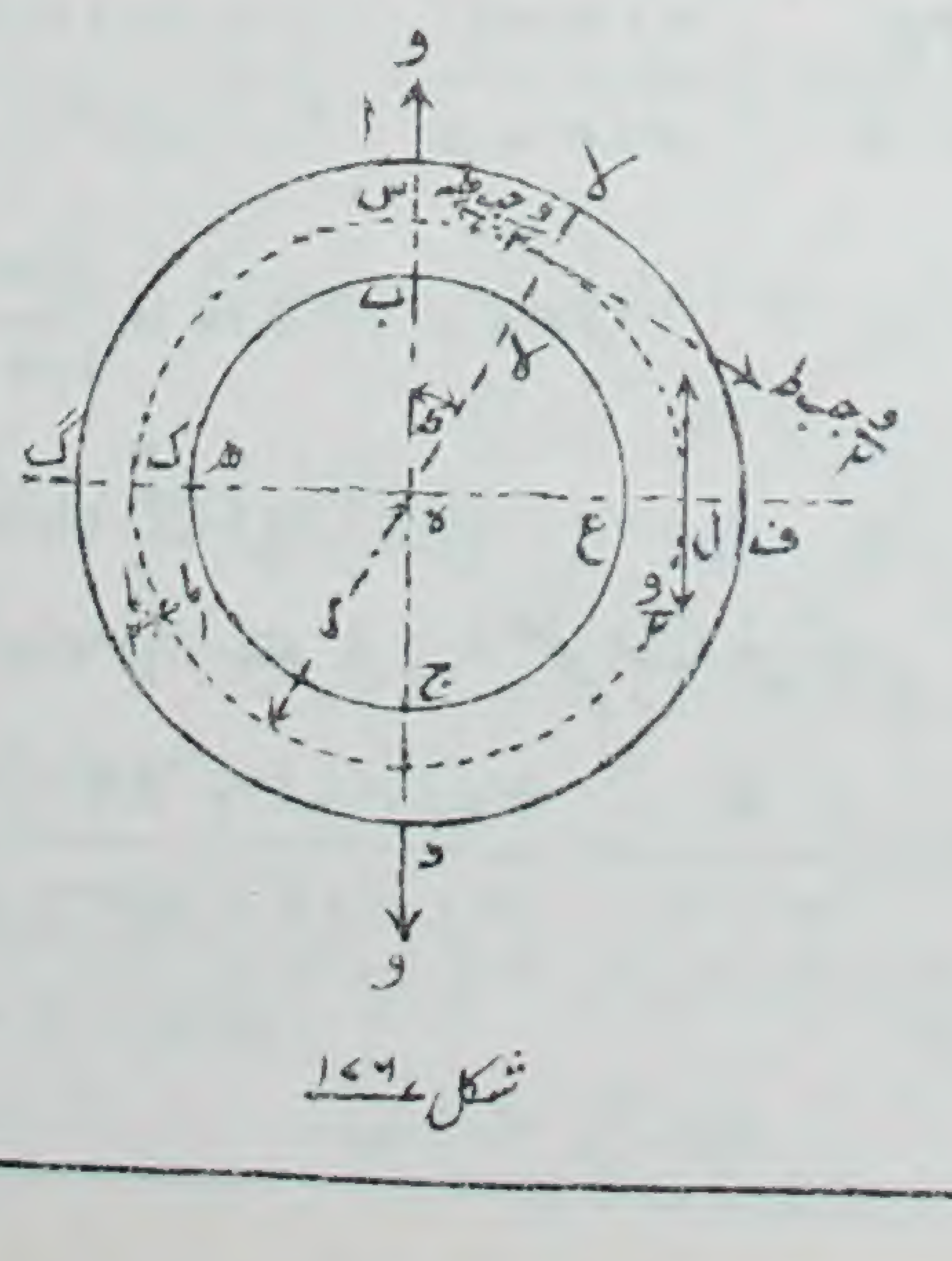
$$= ۲٫۶۲ - ۰٫۳۷$$

= ۲٫۲۵ ٹن فی مربع انچ

۱۳۳ - چھلوں کے زور —— کسی چھلے پر اس کے مرکز میں سے گزرتا ہوا ایک بوجھ (کھنچاؤ یا دھکیل) عمل کرے تو چھلے کی کسی نیم قطری تراش پر ایک خماؤ کا معیار، جزی قوت، اور راست کھنچاؤ یا دھکیل ہوگا۔ چونکہ عمادی مستویوں پر جزی زور کی حدت تراشش کے انتہائی اندرونی اور بیرونی کناروں پر صفر ہوتی ہے اس لیے چھلے کے انتہائی اندرون یا بیرون کے زور محسوب کرنے میں تراش پر کی جزی قوت کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے اور زور صرف خماؤ کے معیار اور راست کھنچاؤ یا دھکیل سے محسوب کرسکتے ہیں۔

خماؤ کے معیار کا تقریبی تغیر —— اگر کسی تراش پر خماؤ کے معیار کا تخمینہ کرنے میں چھلے کے انحنا کو نظر انداز کیا جائے اور سیدھے شہتیروں کے قواعد استعمال کیے جائیں تو اتنی غلطی نہیں ہوگی جتنی کہ زور کے محسوب کرنے میں انحنا کو نظر انداز کرنے سے ہوگی۔ خماؤ کے معیار کے تغیر کی زیادہ باضابطہ بحث دفعہ ہذا کے آخر میں دی جائیگی۔

اگر شکل ۱۷۶ ایک چھلے کو تعبیر کرے جس پر ایک کھنچاؤ و عمل کر رہا ہو تو



شکل ۱۷۶

اگرچہ مختلف تراشوں پر خماؤ کا عمل ہو رہا ہے لیکن تشاکل سے ظاہر ہے کہ ا ، ف ، د اور گ پر کی چار تراشیں فساد کے بعد بھی مرکز میں سے گزرنگی اور اس طرح ان چار میں سے کوئی دو متصل نقاط مثلاً ا اور ف کے درمیان خمیدگی یعنی اصلی سمت سے انحراف صفر ہوگا یعنی مخالف جہت یا مخالف علامت کے خماؤ مساوی ہونگے۔

فرض کرو کہ کسی تراش لا لا پر جو کھنچاؤ کے خط سے زاویہ طہ بناتی ہے خماؤ کا معیار مر ہے جو انحنا کو بڑھانا چاہتا ہے اور تراش ع ف پر خماؤ کا معیار مر ہے۔ چونکہ ٹکڑا ا لا ع ف لا تعادل میں ہے اور ع ف پر جزی قوت صفر ہے اس لیے تراش لا لا کے مرکز کے گرد معیار لینے سے

مر = مر۱ + و/۲ سا (۱ - جب طہ) .... (۱)

اور چونکہ ا اور ف کے درمیان مجموعی خماؤ صفر ہے اس لیے اگر چھلے کو سیدھا شہتیر سمجھیں اور دفعہ ۷۷ کا عمل کریں تو فرس = سا فرطہ

اور فرعہ/فرس = مر/آ ے = خماؤ فی اکائی طول۔ اس لیے

$\int_{\cdot}^{طہ = \frac{\pi}{2}}$ فرعہ = $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}}$ مر/آ ے فرس = سا/آ ے $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}}$ مر فرطہ = ۰

(۱) سے مر کی قیمت درج کرکے سا/آ ے سے تقسیم کرنے سے

$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{2}}$ { مر۱ + و سا/۲ (۱ - جب طہ) } فرطہ = مر۱ × π/۲ + و سا π/۴ - و سا/۲ = ۰

∴ مر۱ = و سا/π (۱ - π/۲) .... (۲)

صفحہ

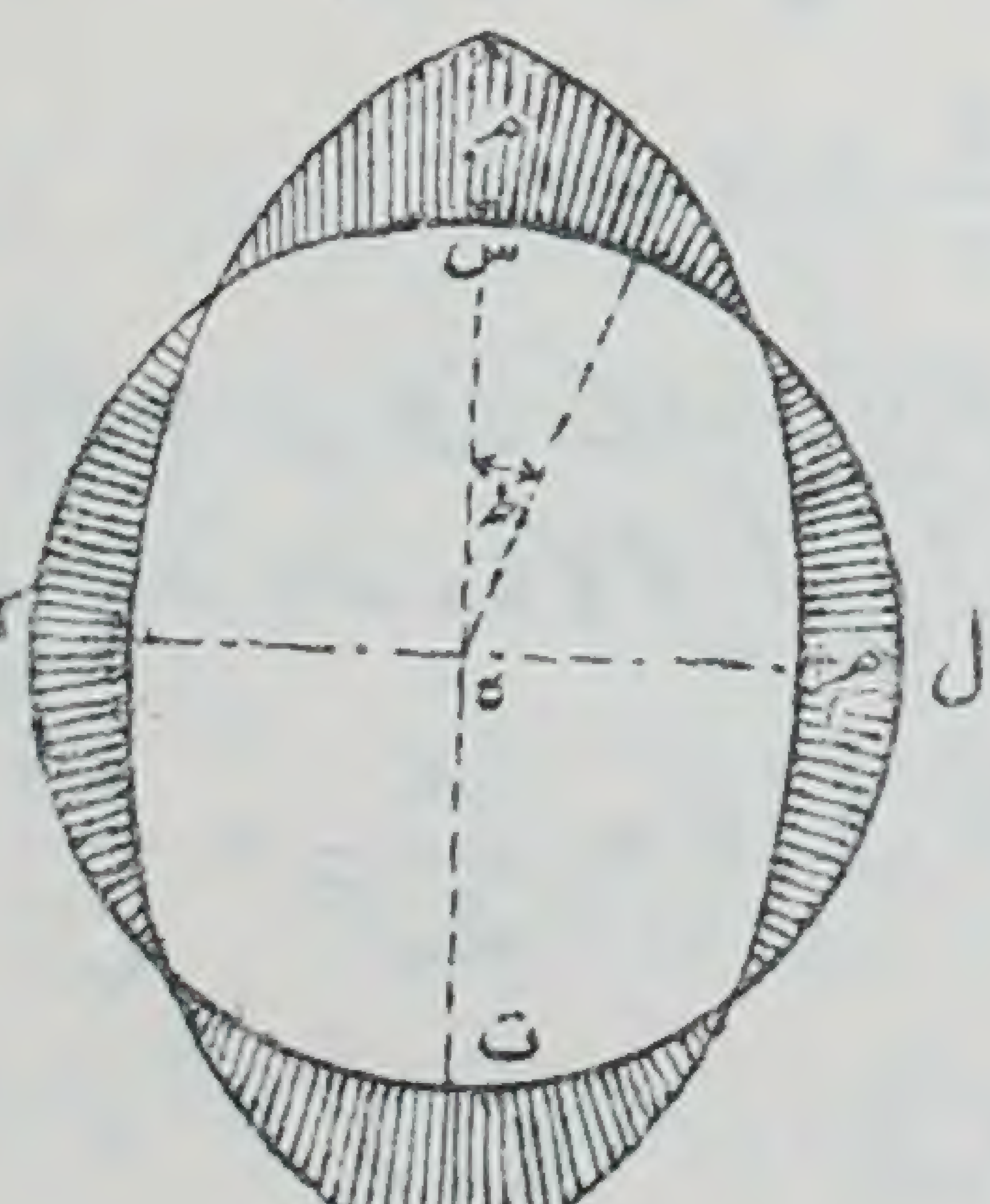
اس لیے (۱) سے

$$م = و\, ر \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \text{ جب } ط \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اور تراش ا ب پر جہاں ط = ۰

$$م_{ب} = \frac{و\, ر}{\pi} \text{ یا } ۰٫۳۱۸\, و\, ر \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

خماؤ کا معیار جب ط = $\frac{2}{\pi}$ پر صفر ہوتا ہے اور تمام تراشوں پر اس کی قیمت شکل ۱۷۷ میں مرکزی خط س ل ت ک کے اساس پر نیم قطری سمت میں کھینچ کر دکھائی گئی ہے۔



شکل ۱۷۷

مزید راست اور جزی قوتیں — خماؤ کے زور کے علاوہ ہر تراش پر جیسی کہ لا لاہے راست قوت $\frac{و}{2}$ جب ط بھی عمل کرتی ہے جس سے ایک مزید محیطی زور پیدا ہوتا ہے جس کی حدت

$$\frac{و \text{ جب } ط}{2\, ب}$$

ہے اور نیم قطری تراشوں پر ایک جزی قوت $\frac{و}{2}$ جم ط عمل کریگی جس سے جزی زور پیدا ہوگا اور اس زور کی تقسیم کم و بیش دفعہ ۱۷ کی طرح ہوگی۔ اعظم جزی قوت $\frac{و}{2}$ جو ط = ۰ پر ہوگی اوسط جزی زور حدت $\frac{و}{2\, ب}$ کا پیدا

کریگی - مثال کے طور پر اگر تراش دائری ہو تو اعظم حدت اس مقدار کا تقریباً $\frac{۳}{۴}$ ہوگی اور تراش ا ب کے مرکزی خطوط پر ہوگی - اس سادہ جز کے تناظر جو دو مساوی صفحہ ۳۰۱ اور مخالف خاص زور حاصل ہوتے ہیں وہ چھوٹے سے چھوٹے چھلے میں بھی خماؤ کے اعظم زور سے بہت کم ہوتے ہیں - یہاں تک کہ جزی قوت اور راست کھینچ و سے مرکزی خط پر بھی جو زور پیدا ہوتے ہیں وہ کسی تراش پر بھی اتنے نہیں کہ تراش ا ب پر کے خماؤ زوروں کے مقابلے میں کچھ اہمیت رکھیں - (دیکھو ذیل کی مثال ا کا آخری حصہ) -

اندرون اور بیرون پر حاصل زور — سب میں اہم زور وہ ہیں جو خماؤ اور راست زور سے چھلے کے اندرونی اور بیرونی کنارے پر اُن تراشوں میں پیدا ہوتے ہیں جن میں خماؤ کے معیار اور راست زور اپنی انتہائی قیمت کو پہنچتے ہیں -

فرض کرو کہ تراش کے مرکزی خط سے تراش کے انتہائی اندرونی کنارے کا فاصلہ ما ہے اور انتہائی بیرونی کنارے کا فاصلہ ما۲ ہے - اور فرض کرو کہ ایک کھینچ و عمل کرتی ہے جیسا کہ شکل ۱۷۶ میں دکھایا گیا ہے - اگر و کھینچ نہ ہو بلکہ دھکیل ہو تو ظاہر ہے کہ نتائج میں کیا ترمیم کرنی ہوگی -

چھلے کے شکم یعنی اندرونی کنارے کے لیے (۳) کو دفعہ ۱۲۹ کی مساوات (۱۶ ب) میں درج کرنے سے (اور ما = - ما۱ رکھنے سے) اور راست زور شریک کرنے سے

$$\text{فشاری زور کی حدت } ف = \frac{و\left(\frac{۱}{\pi} - \frac{۱}{۲}\text{ جب طہ}\right)}{بَ - ب}\left(\frac{ر}{ر - ما_۱} - \frac{بَ}{ب}\right)$$

$$- \frac{و\text{ جب طہ}}{۲ ب} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

یہ طہ = $\frac{\pi}{۲}$ پر اور طہ = ۰ پر (جہاں عدم تسلسل واقع ہوتا ہے) فاضل قیمتوں کو پہنچتا ہے -

$$\text{ط} = 0 \ \text{پر} \ \text{ف} = \frac{\text{و}}{\pi\,(\text{بَ} - \text{ب})}\left(\frac{\text{بَ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ر}}{\text{ر} - \text{ما}}\right) \ (\text{فشاری}) \ \ldots (6)$$

یہ چھلے میں زور کی اعظم حدت ہے۔

$\text{ط} = \frac{\pi}{2}$ پر علامت بدلنے سے

$$\text{ف} = \frac{\text{و}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right)}{\text{بَ} - \text{ب}}\left(\frac{\text{ر}}{\text{ر} - \text{ما}} - \frac{\text{بَ}}{\text{ب}}\right) + \frac{\text{و}}{2\,\text{ب}} \ (\text{تننشی}) \ \ldots\ldots (7)$$

زور کی حدت طہ کی ایک قیمت کے لیے صفر ہوتی ہے۔ طہ کی یہ قیمت (۵) سے محسوب ہوسکتی ہے۔

اسی طرح چھلے کی پشت یعنی بیرونی کنارے کے لیے ما = + ما لکھنے سے تناؤ کی حدت

$$\text{ف} = \frac{\text{و}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\,\text{جب ط}\right)}{\text{بَ} - \text{ب}}\left(\frac{\text{بَ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ر}}{\text{ما} + \text{ر}}\right) + \frac{\text{و جب ط}}{2\,\text{ب}} \ \ldots\ldots (8)$$

$$\text{ط} = 0 \ \text{پر} \ \text{ف} = \frac{\text{و}}{\pi\,(\text{بَ} - \text{ب})}\left(\frac{\text{بَ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ر}}{\text{ما} + \text{ر}}\right) \ \text{تننشی} \ \ldots\ldots (9)$$

$\text{ط} = \frac{\pi}{2}$ پر علامت بدلنے سے

$$\text{ف} = \frac{\text{و}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right)}{\text{بَ} - \text{ب}}\left(\frac{\text{بَ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ر}}{\text{ما} + \text{ر}}\right) - \frac{\text{و}}{2\,\text{ب}} \ (\text{فشاری}) \ \ldots\ldots (10)$$

اور صفر زور کا محل (۸) سے محسوب ہوسکتا ہے۔

ایسے چھلوں میں جن کا اوسط نصف قطر تراشش کے ابعاد کے مقابلے میں بڑا ہو مساوات (۷) سے چھلے میں کا اعظم تناؤ حاصل ہوگا اور ر بڑھے اور انحنا گھٹے تو اس کی مقدار (۶) کے قریب آتی جائیگی۔ ر چھوٹا ہو تو انحنا کے بڑے ہونے کی وجہ سے اعظم تناؤ ممکن ہے (۹) سے حاصل ہو۔ نصف قطر ر کی وہ فاصل قیمت جس سے بڑی قیمتوں پر تننشی حدت (۷) حدت (۹) سے زیادہ ہوتی ہے صفحہ ۲۰۲

اس طرح حاصل ہوگی کہ (۹) اور (۷) کو مساوی رکھا جائے اور مساوات کو ہم کے لیے حل کیا جائے۔ کسی متشاکل تراشش کے لیے جس کی نصف گہرائی ما ہو اس سے حاصل ہوگا:-

$$م = \frac{\pi}{4-\pi}\ ما \quad یا \quad ۳٫۶۶\ ما$$

ذیل میں خماؤ کے معیاروں کی جو زیادہ صحیح قیمتیں معلوم کی گئی ہیں اُن کو اختیار کرنے سے فاصل نصف قطر

$$م = \frac{\pi}{4\frac{ب}{ب'} - \pi}\ ما$$

حاصل ہوتا ہے جو پہلے کی تقریبی قیمت سے کسی قدر زیادہ ہے کیونکہ ب، ب' سے چھوٹا ہے۔ نصف قطر ر کی مدور تراشش کے لیے حاصل ہوگا:-

$$م = ۳٫۹۶\ ر$$

اس سے بڑے نصف قطر کے چھلّوں میں پشت پر کھینچ کے خط میں کا تناؤ چھلے کا اعظم تناؤ ہوگا اور اس سے چھوٹے نصف قطر کے چھلوں میں شکم پر کھینچ کے خط کے علی القوائم تراش میں کا تناؤ چھلے کا اعظم تناؤ ہوگا۔

شکل ۱۷۸ میں ایک چھوٹے چھلے کی خاص صورت میں شکم اور پشت پر زور کی حدت تمام زاویوں کے لیے دکھائی گئی ہے۔ (تفصیل کے لیے دیکھو ذیل کی مثال ۱)۔

خماؤ کے معیاروں کا زیادہ صحیح تخمینہ ـــــ اُوپر خماؤ کے معیاروں کا جو تخمینہ کیا گیا ہے اُس میں چھلے کے ذاتی انحنا کو اور عمادی قوتوں و/۲ جب طہ کے اثر کو نظر انداز کر دیا گیا کیونکہ اس سے بہت خفیف سی غلطی

واقع ہوتی ہے۔ لیکن اگر ان کا بھی لحاظ کیا جائے تو حسبِ ذیل عمل کرنا ہوگا:۔
(ا) کو دفعہ ۱۲۹ کی مساوات (۱۴) میں درج کرنے سے اور دفعہ ۱۲۹ (ی) کی ترقیم اختیار کرنے سے

$$م = م_. + \frac{و س}{۲} (۱ - جب ط) = ے س^۲ (۱ + س_.) \left(\frac{۱}{س_.} - \frac{۱}{س}\right) (بَ - ب) \quad (۱۱)$$

اس لیے س فرط = فرس لکھنے سے

$$\int_{.}^{\frac{\pi}{۲}} م فرط = ے س (بَ - ب) \left\{ \int_{ط=.}^{ط=\frac{\pi}{۲}} \frac{۱ + س_.}{س} فرس - \int_{.}^{\frac{\pi}{۲}} (۱ + س_.) فرط \right\} \quad (۱۲)$$

لیکن صریحاً ایک پورے رُبع میں فساد کے بعد دو عماودں ک س اور ک ل کے درمیان مجموعی زاویہ حسبِ ذیل ہوگا:۔

$$\int_{ط=.}^{ط=\frac{\pi}{۲}} \frac{(۱ + س_.) فرس}{س} = \frac{\pi}{۲}$$

صفحہ ۴۰۳ اس لیے (۱۲) یہ ہوجائیگی:۔

$$\int_{.}^{\frac{\pi}{۲}} م فرط = ے س (بَ - ب) \left\{ \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲} - \int_{.}^{\frac{\pi}{۲}} س_. فرط \right\}$$

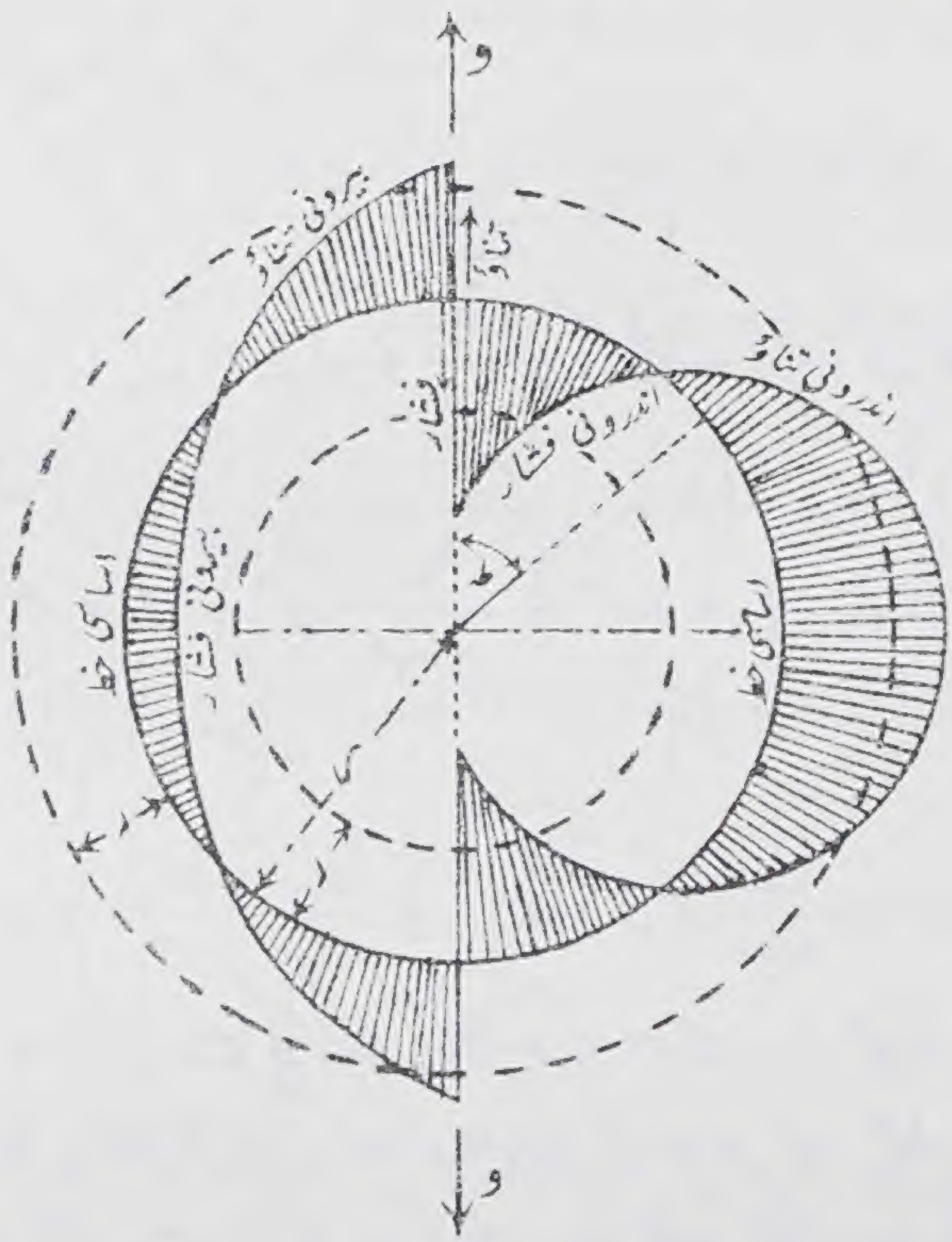
$$= - ے س (بَ - ب) \int_{.}^{\frac{\pi}{۲}} س_. فرط \quad \ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

اور دفعہ ۱۲۹ کے ربط (۶) یا (۸) یا (۱۳) کی بجائے تراش پر مجموعی عماودی قوت موجودہ صورت میں حسبِ ذیل ہوگی:۔

$$\frac{و}{۲} جب ط = ے ع (س فرب) = ے \left\{ س (۱ + س_.) \left(\frac{۱}{س} - \frac{۱}{س_.}\right) (ب - بَ) + س_. ب \right\} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

اس کے ساتھ (۱۱) کو استعمال کرنے سے

$$س_ب = \frac{م_۱}{ے\,ب\,ر} + \frac{و}{۲\,سے\,ب} \quad (\text{جو ط پر منحصر نہیں}) \;\ldots\ldots\; (۱۵)$$



شکل ۱۷۸

اس قیمت کو (۱۳) میں درج کرنے سے

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} م_۰ \cdot فط = -\frac{\pi}{۲} \cdot \frac{بَ - ب}{ب}\left(م_۱ + \frac{و\,ر}{۲}\right) \;\ldots\ldots\; (۱۶)$$

صفحہ ۳۰۳

لیکن (۱) کو تکمل کرنے سے

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{م}\ \text{ف}\,\text{طہ} = \text{م}_{۱}\frac{\pi}{۲} + \frac{\text{و ر}}{۲}\left(\frac{\pi}{۲} - ۱\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۷)$$

اس لیے (۱۶) اور (۱۷) کو مساوی رکھنے سے $\text{م}_{۱}$ کی قیمت (۲) کی بجائے حسبِ ذیل حاصل ہوتی ہے:-

$$\text{م}_{۱} = \frac{\text{و ر}}{\pi}\left(\frac{\text{ب}}{\text{بَ}} - \frac{\pi}{۲}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱۸)$$

اور اس قیمت کو (۱) میں درج کرنے سے م کی قیمت (۳) کی بجائے حسبِ ذیل حاصل ہوتی ہے:-

$$\text{م} = \text{و ر}\left(\frac{۱}{\pi}\frac{\text{ب}}{\text{بَ}} - \frac{۱}{۲}\,\text{جب طہ}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱۹)$$

اور طہ = ۰ پر اعظم خماؤ کا معیار

$$\text{م}_{\text{ب}} = \frac{\text{و ر}}{\pi}\times\frac{\text{ب}}{\text{بَ}} \ \text{یا}\ ۰٫۳۱۸\ \text{و ر}\frac{\text{ب}}{\text{بَ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۰)$$

حاصل ہوتا ہے جو (۴) سے کم ہے کیونکہ ب، بَ سے چھوٹا ہے۔ اس طرح چھلے کے کسی نقطے پر خماؤ کا معیار صرف بیرونی قوت و اور چھلے کے اوسط نصف قطر پر منحصر نہیں جیساکہ تقرب (۳) سے معلوم ہوتا ہے بلکہ اس کے تراشی ابعاد اور نصف قطر کی نسبت پر بھی منحصر ہے۔ ضابطوں (۵) تا (۱۰) کی م کی ان زیادہ صحیح قیمتوں کے لیے تصحیح کی جائے تو زور کی حدتوں کی زیادہ صحیح قیمتیں حاصل ہونگی۔ لیکن صرف یہ دیکھ لینا کافی ہے کہ زور کی اعظم حدت یعنی شکل میں بوجھ کے نقطۂ عمل پر خماؤ کا زور (۶) کی بجائے حسبِ ذیل ہوجاتا ہے:-

$$\text{ف} = \frac{\text{و}}{\pi(\text{بَ} - \text{ب})}\left(\frac{\text{ر}}{\text{ر} - \text{ما}}\times\frac{\text{ب}}{\text{بَ}} - ۱\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۱)$$

اور یہ (۶) سے کم ہے کیونکہ ب، بَ سے چھوٹا ہے :-

اُوپر کے مصححہ خماؤ کے معیاروں کا ایک بہت قریبی تقرب اس طرح حاصل ہوسکتا ہے کہ اس خماؤ کا لحاظ کیا جائے جو نیم قطری تراشوں پر عمادی قوتوں $\frac{\text{و}}{\text{۲}}$ جب طہ سے پیدا ہوتا ہے۔ عمادی قوت $\frac{\text{و}}{\text{۲}}$ جب طہ سے فساد $\frac{\text{و جب طہ}}{\text{۲ ب ے}}$ پیدا ہوتا ہے اور طول فرس بقدر $\frac{\text{و جب طہ}}{\text{۲ ب ے}}$ فرس کے بڑھ جائیگا۔ م سے تقسیم کرنے سے خماؤ یعنی سمت کی تبدیلی طول فرس میں تقریباً $\frac{\text{و جب طہ}}{\text{۲ ب ے}}$. فرطہ ہوگی اور ایک پورے رُبع ا ف میں اس کی مقدار حسبِ ذیل ہوگی :-

$$\frac{\text{و}}{\text{۲ ب ے}}\int_{\text{۰}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\text{جب طہ فرطہ} = \frac{\text{و}}{\text{۲ ب ے}} = \frac{\text{و گ}^{\text{۲}}}{\text{۲ ا ے}} \quad \text{جہاں } \text{گ}^{\text{۲}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

صفحہ ۵

اس مقدار کو (۲) سے پہلے کی مساواتوں میں جمع کرنے سے

$$\left.\begin{aligned} \text{م}_{\text{۱}} &= \frac{\text{و م}}{\pi}\left(\text{۱} - \frac{\pi}{\text{۲}} - \frac{\text{گ}^{\text{۲}}}{\text{م}^{\text{۲}}}\right) \\ \text{اور} \quad \text{م}_{\text{ب}} &= \frac{\text{و م}}{\pi}\left(\text{۱} - \frac{\text{گ}^{\text{۲}}}{\text{م}^{\text{۲}}}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{(۲۲)}$$

یہ نتائج اس طرح بھی حاصل ہو سکتے ہیں کہ مساوات (۴) دفعہ ۱۳۰ سے بَ کی تقریبی قیمتیں دفعہ ہذا کی مساواتوں (۱۸) اور (۲۰) میں درج کریں۔

مثال ۱ - ایک چھلے پر ایک کھینچ عمل کرتی ہے جس کا خط اس کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ اگر چھلا مدور فولاد کا بنا ہو جس کا نصف قطر چھلے کے اوسط نصف قطر کا $\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$ ہو تو چھلے کے اندرون اور بیرون پر زور کی حدت معلوم کرو۔ (یہ چھوٹے سے چھوٹا چھلا ہے جس کو بطور کڑی کے اسی کی جسامت کی کڑیوں سے منسلک کیا جاسکتا ہے)۔

مدور فولاد کا نصف قطر ر ہے اور چھلے کا اوسط نصف قطر م = ۳ ر،

اس لیے مساوات (۳) دفعہ ۱۳۰ سے

$$\text{بَ} = \text{۶}\,\pi\,\text{ر}^{\text{۲}}\left(\text{۳} - \sqrt{\text{۸}}\right) = \text{۱٫۰۲۹۴}\,\pi\,\text{ر}^{\text{۲}}$$

$$\text{ب} = \pi\,\text{ر}^{\text{۲}}$$

$$\text{بَ} - \text{ب} = \text{۰٫۰۲۹۴}\,\pi\,\text{ر}^{\text{۲}}$$

$$\frac{\text{بَ}}{\text{ب}} = \text{۱٫۰۲۹۴}$$

خماؤ کے معیاروں کی تقریبی قیمتیں استعمال کرنے سے ۔

شکم :—

مساوات (۵) دفعہ ۱۳۳ سے فشاری زور ——

$$\text{ف} = \frac{\text{و}\left(\frac{\text{۱}}{\pi} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{جب ط}\right)}{\text{۰٫۰۲۹۴}\,\pi\,\text{ر}^{\text{۲}}}\left(\text{۱٫۰۲۹۴} - \text{۱٫۵}\right) - \frac{\text{و جب ط}}{\text{۲}\,\pi\,\text{ر}^{\text{۲}}}$$

$$= \frac{\text{و}}{\pi\,\text{ر}^{\text{۲}}}\left(\frac{\text{۱۶}}{\pi} - \text{۵٫۸ جب ط}\right)$$

ف کی قیمتیں شکل ۱۷۸ میں دائیں جانب مرکزی خط پر نیم قطری سمت میں کھینچی گئی ہیں ۔ مثبت قیمتیں اندر کی طرف کھینچی گئی ہیں ۔

اعظم قیمت جو ط = ۰ پر ہے حسبِ ذیل ہے :—

$$\frac{\text{۱۶}}{\pi}\,\frac{\text{و}}{\pi\,\text{ر}^{\text{۲}}} \;\text{یا}\; \text{۵٫۱۰}\,\frac{\text{و}}{\pi\,\text{ر}^{\text{۲}}}$$

اگر لداؤ کے خط میں خماؤ کے معیار کی زیادہ صحیح قیمت $\frac{\text{ب}}{\text{بَ}} \times \frac{\text{و ر}}{\pi}$ لی جائے تو زور کی اعظم حدت $\frac{\text{۱۶}}{\pi} \times \frac{\text{و}}{\pi\,\text{ر}^{\text{۲}}} \times \frac{\text{۱}}{\text{۱٫۰۲۹۴}} = \text{۴٫۹۵}\,\frac{\text{و}}{\pi\,\text{ر}^{\text{۲}}}$ ہوتی ہے ۔

ان دونوں کا فرق انتہا کی اس انتہائی صورت میں بھی ۳ فی صدی سے کم ہے ۔

(۲۲) سے قیمت $\frac{16}{\pi} \times \frac{\text{و}}{\pi r^2}\left(1 - \frac{1}{36}\right) = 4.996\,\frac{\text{و}}{\pi r^2}$ حاصل ہوتی ہے جس سے (۲۲) کا (۲۰) کے ساتھ تقرب ظاہر ہے۔

اگر و = ۱ ٹن اور فولاد کا قطر ۱ انچ ہو تو زور کی اعظم حدت $\frac{4.995}{0.7854} = 6.36$ ٹن فی مربع انچ ہوگی۔

اگر سیدھے شہتیروں کے خماؤ کے زور کا ضابطہ (۶) دفعہ ۹۳) اختیار کیا جاتا تو تقریبی خماؤ کا معیار اختیار کرنے سے زور کی مساوی اور مخالف حدیں حسب ذیل ہوتیں :—

$$\frac{\text{ور}}{\pi} \times \frac{4}{\pi r^3} = \frac{12}{\pi} \times \frac{\text{و}}{\pi r^2}$$

صفحہ ۴۰۶ قیمت $\frac{16}{\pi}\,\frac{\text{و}}{\pi r^2}$ اس سے ۳۳ فی صدی زیادہ ہے۔

پشت :—

مساوات (۸) دفعہ ۱۳۳ سے تنشی زور کی حدت

$$\text{ف} = \frac{\text{و}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\,\text{جب ط}\right)}{0.294\,\pi r^2}\left(1.0294 - 0.75\right) + \frac{\text{و جب ط}}{2\pi r^2}$$

$$= \frac{\text{و}}{\pi r^2}\left(\frac{9.497}{\pi} - 4.248\,\text{جب ط}\right)$$

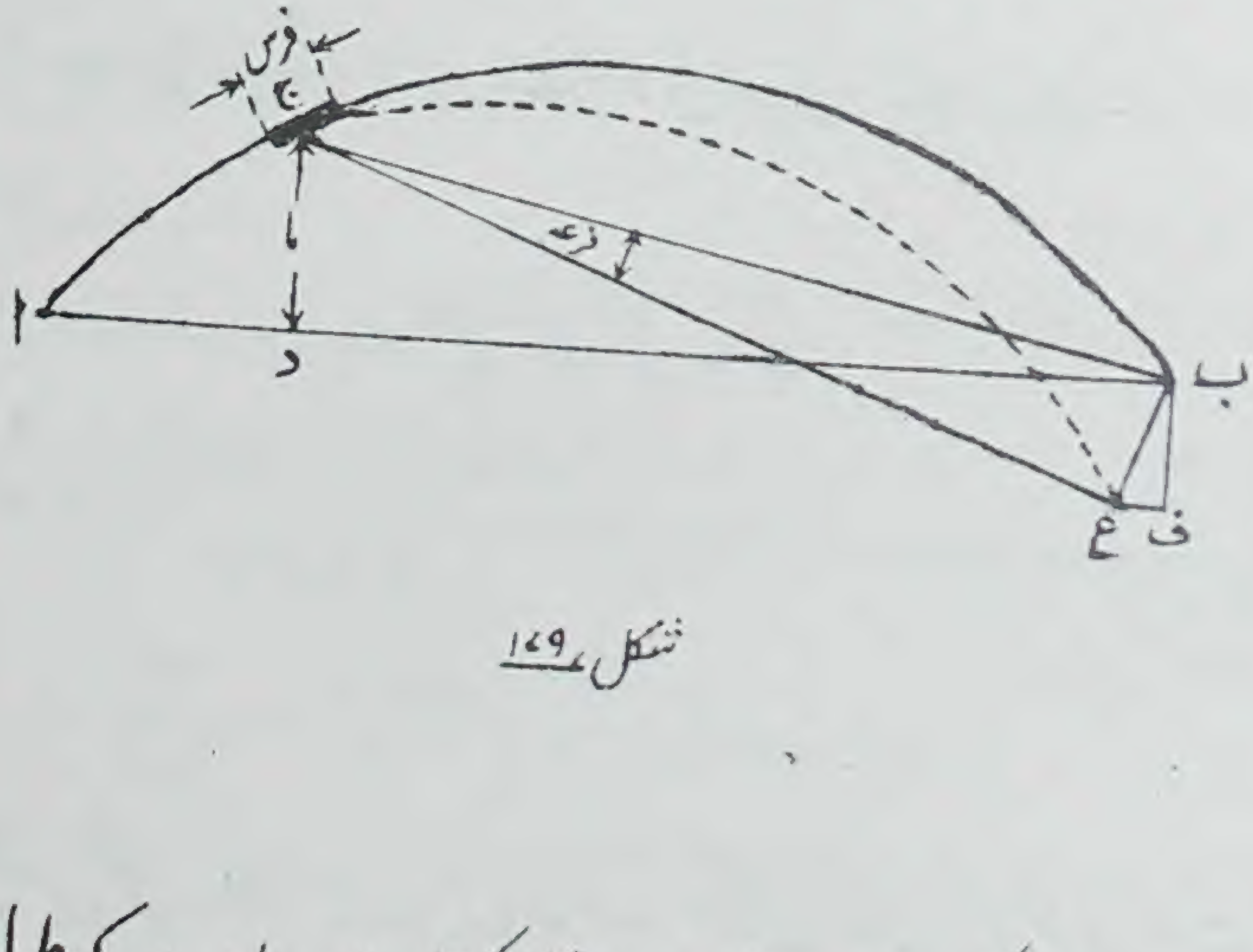
یہ قیمتیں شکل ۱۸۰ میں بائیں جانب مرکزی خط پر نیم قطری سمت میں کھینچی گئی ہیں۔

نیم قطری جزی قوت سے پیدا ہونے والا اعظم زور تراش کے مرکزی خط پر کھینچ کے خط میں ہوگا اور تقریباً $\frac{4}{3} \times \frac{\text{و}}{2\pi r^2}$ ہوگا جو اسی تراش پر کے خماؤ کے انتہائی زور سے بہت کم ہے۔ دوسری تراشوں کے محیطوں کے اندر کے نقاط پر

خاص زوروں کا تقریبی تخمینہ حسبِ ذیل زوروں سے کیا جائیگا - نیم قطری اور محیطی جزی زور جن کی تقسیم دفعہ ۱۷ کے مطابق ہوگی، راست زور $\frac{\text{وجب طہ}}{۲\ ۲۲\ ر}$، اور خماؤ کا زور جو دفعہ ۱۲۹ کی کسی موزوں مساوات مثلاً (۱۶ ب) سے محسوب کیا گیا ہو - یہ خاص زور ہر مقام پر اوپر محسوب کیے ہوئے اعظم خماؤ کے زوروں سے کم ہونگے ۔

۱۳۴ - منحنی سلاخ کی شکل کا بگاڑ

کسی منحنی سلاخ میں خماؤ سے شکل کی تبدیلی واقع ہوگی جس کے دیگر اثرات میں سے ایک یہ ہوگا کہ ابتدائی مرکزی خط پر کے نقاط کو ملانے والے وتروں کے طولوں میں خاصی تبدیلی ہو جائیگی - فرض کرو کہ ا ج ب (شکل ۱۷۹) ایک منحنی سلاخ کے مرکزی خط کو



شکل ۱۷۹

تعبیر کرتا ہے جس پر ایک متغیر خماؤ کا معیار عمل کرتا ہے - اب کے طول کی تبدیلی معلوم کرنے کے لیے ایک ٹکڑے فس کے خماؤ کے اثر پر غور کرو - اگر سلاخ کا باقی حصہ خم نہ ہو اور یہ ٹکڑا بقدر زاویہ فرعہ کے خم ہو تو ا کو ثابت فرض کریں تو ب ہٹ کر ع پر جائیگا اور اس ہٹاؤ کا افقی ظل

ع ف = ع ب جم ب ع̂ ف = ج ب × فرعہ × جم ب ع̂ ف

$$= \text{فرعہ} \times \text{ج ب جم ب ج̂ د} = \text{د ج} \times \text{فرعہ}$$

$$= \text{ما فرعہ}$$

اور دفعہ ۷۷ سے انحنا کی تبدیلی

$$\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{م}}{\text{آ ے}}$$

یا

$$\text{فرعہ} = \frac{\text{م}}{\text{آ ے}}\ \text{فرس}$$

صفحہ ۴۰۷ جہاں آ تراش کا معیارِ جمود ہے اور ے راست لچک کا مقیاس ہے۔
اس طرح ٹکڑے فرس کے خماؤ سے وتر اب کی تبدیلی ع ف

$$\frac{\text{م}}{\text{آ ے}} \times \text{ما} \times \text{فرس}$$

ہوگی اور خماؤ کی وجہ سے مجموعی تبدیلی

$$\int \frac{\text{م ما}}{\text{آ ے}}\ \text{فرس} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہوگی۔ تکملی یا حاصل جمع سروں ا اور ب کے متناظر حدود کے درمیان لیا جائیگا۔ انحنا کو بڑھانے والے خماؤ کے معیار صریحاً وتر کے طول کو کم کرینگے اور انحنا کو گھٹانے والے معیار طول کو بڑھائینگے۔

۱۳۵۔ چھلے کا بگاڑ[^]

دفعہ ۱۳۴ کے نتیجے سے دفعہ ۱۳۳ کے چھلے میں خماؤ سے خاص قطروں کی تبدیلی کا تقریبی تخمینہ آسانی سے کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ شکل ۱۷۶ کو استعمال کریں اور دفعہ ۱۳۴ کی مساوات (۱) میں ما = ر جم طہ، فرس = ر فرطہ اور (۳) دفعہ ۱۳۳ سے م = و ر $\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right)$ جب طہ) رکھیں تو قطر ک ل کی کمی

[^] یہ باب لکھے چکنے کے بعد مصنف کو جامعہ الی نواس سے ایک صحیفہ وصول ہوا جس میں چھلوں اور زنجیر کی کڑیوں کے اس نظریہ کی تجرباتی جانچ بگاڑوں کی پیمائش کے ذریعے کی جا کر بیان کی گئی ہے۔ محسوبہ نتائج کے اور تجربے کے درمیان مطابقت بہت نمایاں ہے۔

$$= ۲ \int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{و ر}}{\text{آ ے}} \left(\frac{۱}{\pi} - \frac{۱}{۲}\,\text{جب طہ} \right) \text{ر جم طہ ر فرطہ}$$

$$= \frac{۲\,\text{و ر}^{۳}}{\text{آ ے}} \left(\frac{۱}{\pi} - \frac{۱}{۴} \right) \quad \ldots\ldots (۱)$$

یا اگر دفعہ ۱۳۳ کی مساوات (۱۹) سے مر کی زیادہ صحیح قیمت استعمال کی جائے تو کمی

$$= \frac{۲\,\text{و ر}^{۳}}{\text{آ ے}} \left(\frac{\text{ب}}{\text{ب}'}\,\frac{۱}{\pi} - \frac{۱}{۴} \right) \quad \ldots\ldots (۲)$$

قطر س ت کی تبدیلی اسی طرح ما = ر جم طہ کی بجائے ما = ر جب طہ لکھنے سے حاصل ہوگی - یہ کمی

$$= ۲ \int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{و ر}^{۳}}{\text{آ ے}} \left(\frac{۱}{\pi} - \frac{۱}{۲}\,\text{جب طہ} \right) \text{جب طہ فرطہ}$$

$$= \frac{۲\,\text{و ر}^{۳}}{\text{آ ے}} \left(\frac{۱}{\pi} - \frac{\pi}{۸} \right) \quad \text{(ایک منفی مقدار)}$$

اس لیے قطر کا اضافہ —

$$= ۲\,\frac{\text{و ر}^{۳}}{\text{آ ے}} \left(\frac{\pi}{۸} - \frac{۱}{\pi} \right) \quad \ldots\ldots (۳)$$

یا اگر (۱۹) دفعہ ۱۳۳ سے مر کی زیادہ صحیح قیمت استعمال کی جائے تو اضافہ

$$= \frac{۲\,\text{و ر}^{۳}}{\text{آ ے}} \left(\frac{\pi}{۸} - \frac{۱}{\pi}\,\frac{\text{ب}}{\text{ب}'} \right) \quad \ldots\ldots (۴)$$

کھینچ کی سمت میں قطر کی تبدیلی (۴) کھینچ کے علی القوائم تبدیلی (۲) سے زیادہ ہے۔ صفحہ ۴۰۸

عمادی قوتوں کا اثر — خاص اوسط قطروں کی جو تبدیلی اُوپر معلوم کی گئی ہے وہ صرف خماؤ کے اثر سے ہے اور مجموعی تبدیلی کا اہم ترین حصہ ہے۔ مرکزی خط پر کے عمادی زور کی وجہ سے تبدیلی کا لحاظ کریں تو دفعہ ۱۳۳ کی مساواتوں (۱۵) اور (۱۸) سے

$$ل_\circ = \frac{و}{\pi\,ے\,ب}$$

اور عمادی قوت کی وجہ سے قطروں ک ل اور س ت کا اضافہ

$$2\frac{و\,ر}{\pi\,ے\,ب}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جم\,ط\,فط = 2\int_{ط=0}^{ط=\frac{\pi}{2}} جم\,ط \times س_\circ \times فس = 2\int_{ط=0}^{ط=\frac{\pi}{2}} جب\,ط \times س_\circ \times فس =$$

$$= \frac{2\,و\,ر}{\pi\,ے\,ب} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

اس لیے کھینچ کے خط کے علی القوائم قطر ک ل کی مجموعی کمی

$$= \frac{2\,و\,ر^3}{ے\,آ}\left(\frac{ب}{ب}\,\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}\right) - \frac{2}{\pi}\,\frac{و\,ر}{ے\,ب} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

اور کھینچ کے خط میں کے قطر س ت کا مجموعی اضافہ

$$= \frac{2\,و\,ر^3}{ے\,آ}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi}\,\frac{ب}{ب}\right) + \frac{2\,و\,ر}{\pi\,ے\,ب} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

(۶) اور (۷) کی آخری رقم بالعموم باقی کے مقابلے میں بہت چھوٹی ہوگی۔ یہ صرف اُس صورت میں اہم ہوگی کہ ر چھوٹا ہو۔

مثال — مثال ا دفعہ ۱۳۳ کے چھلّے کے طول کا اضافہ محسوب کرو۔ مجموعی بوجھ ۱ ٹن، چھلّے کا اوسط قطر ۳ انچ اور ے = ۱۲۶۶۰ ٹن فی مربع انچ لو۔ پہلے جو قیمتیں حاصل ہو چکی ہیں اُن کو استعمال کرنے سے

$$آ = \frac{\pi}{4}\,ر^4،\quad ب = \pi\,ر^2،\quad بَ = 1.0294\,\pi\,ر^2،\quad ر = 4\,ر$$

ان کو (۷) میں درج کرنے سے قطر کا اضافہ

$$=\frac{54\,\text{و}\,\text{ر}^3\times 4}{\pi\,\text{ے}\,\text{ر}^3}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{\pi\times 1.0294}\right)+\frac{6\,\text{و}\,\text{ر}}{\pi^2\times 1.0294\,\text{ے}\,\text{ر}^2}$$

$$=\frac{\text{و}}{\text{ے}\,\text{ر}}\left(27-21.26+0.59\right)$$

$$=\frac{\text{و}}{\text{ے}\,\text{ر}}\left(5.74+0.59\right)$$

$$=\frac{6.33\,\text{و}}{\text{ے}\,\text{ر}}$$

اس انتہائی صورت میں جس میں انحنا اتنا بڑا ہے عمادی کھینچ کی وجہ سے قطر کا اضافہ خماؤ کے $\frac{1}{10}$ سے زیادہ ہے۔

عددی قیمتیں و = ۱، ر = $\frac{1}{2}$، ے = ۱۲۶۶۰ درج کرنے سے قطر کا اضافہ

$$=\frac{2\times 1\times 6.33}{12660}=0.001 \text{ انچ}$$

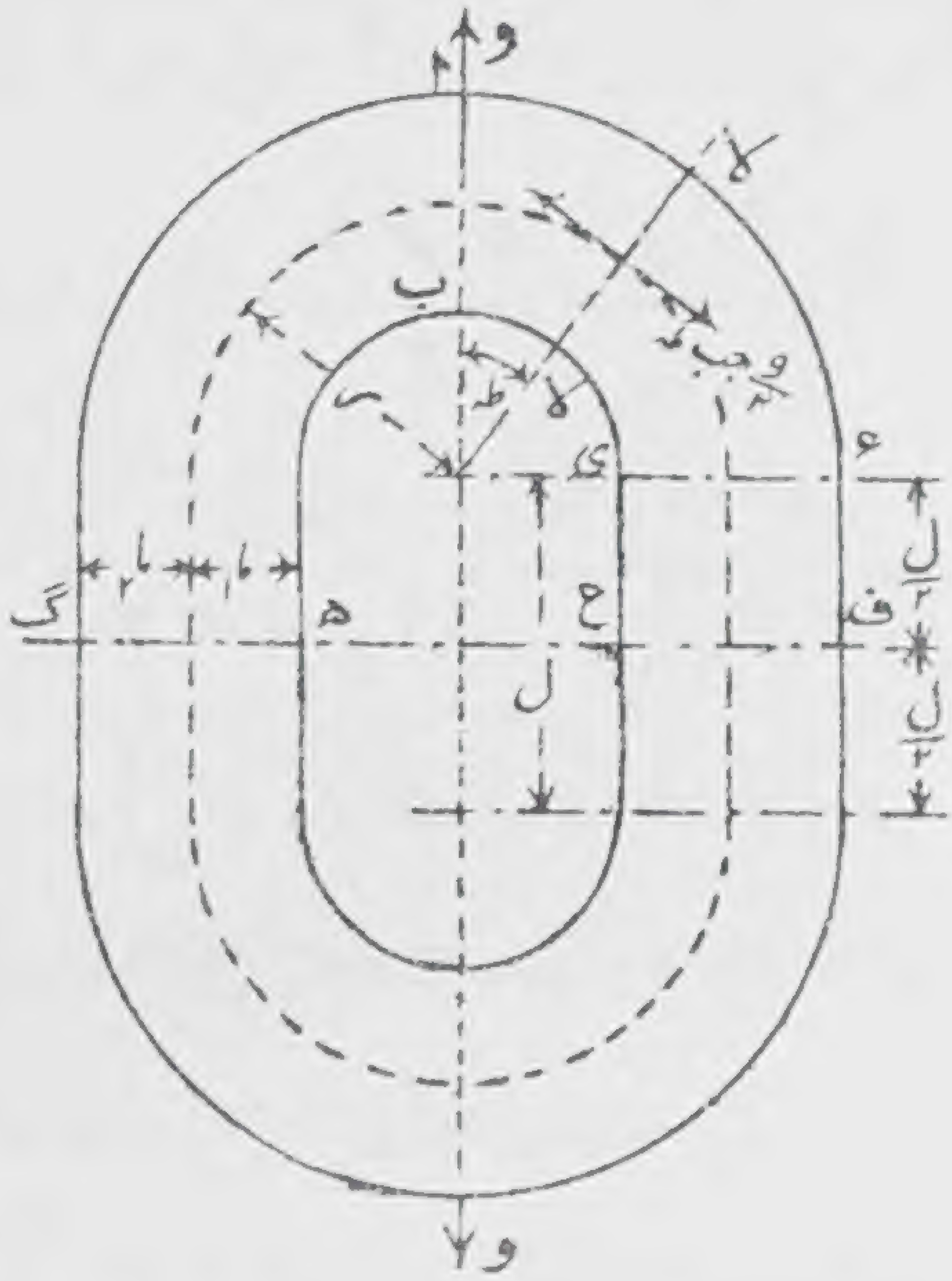
۱۳۶ - سادہ زنجیری کڑیاں

—— زنجیری کڑی کی سادہ ترین شکل یہ ہے کہ سرے نیم دائری ہوں اور ان کو مستقیم بازوؤں سے ملا یا گیا ہو۔ سادہ زنجیری کڑی میں زور کی حدت کا کم از کم ایک کارآمد تخمینہ کرنے کے لیے دفعہ ۱۳۳ کے نظریے کو استعمال کیا جاسکتا ہے۔ صفحہ ۴۰۹

فرض کرو کہ نیم دائری سروں کا اوسط نصف قطر ر ہے اور مستقیم بازوؤں کا طول ل ہے۔ دیگر مقداریں دفعہ ۱۳۳ کی طرح ہیں اور شکل ۱۸۰ الف میں دکھائی گئی ہیں۔ تب سروں میں کسی تراش ک ک پر

$$\text{م}=\text{م}_1+\frac{\text{و}}{2}\,\text{ر}\,(1-\text{جب ط})\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

جہاں م



شکل ۱۸۰

دفعہ ۷۷ کے ربط کو استعمال کریں تو چونکہ مجموعی خمیدگی یعنی اصلی سمت سے تبدیلی ء اور ف کے درمیان صفر ہے اس لیے

$$\int_{ط=0}^{ط=\frac{\pi}{2}} \frac{م}{آ ے} فس + \frac{م_1}{آ ے} \times \frac{ل}{2} = 0$$

اس میں دوسری رقم ع سے ف تک طول $\frac{ل}{2}$ میں سمت کی زاویئی تبدیلی یا خماؤ کو تعبیر کرتی ہے۔ اس لیے دفعہ ۱۳۳ کی طرح ھ اور فس کی

قیمت درج کرنے سے

$$\frac{\text{ر}}{\text{آ ے}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\text{م}_{1}+\frac{\text{و ر}}{2}(1-\text{جب ط})\right\}\text{ف ر ط}+\frac{\text{م}_{1}\text{ل}}{2\,\text{آ ے}}=0$$

یا

$$\text{ر م}_{1}\frac{\pi}{2}+\frac{\text{و ر}^{2}\pi}{4}-\frac{\text{و ر}^{2}}{2}+\text{م}_{1}\frac{\text{ل}}{2}=0$$

اس لیے $\text{م}_{1}=\frac{\text{و ر}^{2}}{2}\left(\frac{2-\pi}{\pi\,\text{ر}+\text{ل}}\right)$ یا $\frac{\text{و ر}}{2}\left(\frac{2\,\text{ر}-\pi\,\text{ر}}{\pi\,\text{ر}+\text{ل}}\right)$ .... (۲)

یہ ایک منفی مقدار ہے جو ل = ۰ رکھنے سے مقدار (۲) دفعہ ۱۳۳ کے مساوی ہو جاتی ہے اور ل کی دوسری سب قیمتوں کے لیے اس سے کم ہوتی ہے۔

صفحہ ۴۱۰

م_{1} کی اس قیمت کو (۱) میں درج کرنے سے

$$\text{م}=\frac{\text{و ر}^{2}}{2}\,\frac{2-\pi}{\pi\,\text{ر}+\text{ل}}+\frac{\text{و}}{2}\,\text{ر}\,(1-\text{جب ط})$$

$$=\frac{\text{و ر}}{2}\left(\frac{2\,\text{ر}+\text{ل}}{\pi\,\text{ر}+\text{ل}}-\text{جب ط}\right)\quad\text{.................. (۳)}$$

اس کی خاص قیمت ط = ۰ پر یعنی ا ب پر

$$\text{م}_{0}=\frac{\text{و ر}}{2}\times\frac{2\,\text{ر}+\text{ل}}{\pi\,\text{ر}+\text{ل}}\quad\text{.................. (۴)}$$

جو صریحاً ہمیشہ مثبت ہے اور مقدار میں (۲) سے زیادہ ہے کیونکہ ل ہمیشہ مثبت ہے۔ نیز ل کے بڑھنے سے م بڑھتا ہے۔ ل = ۰ پر اس کی قیمت $\frac{2\,\text{و ر}}{\pi}$ ہے اور ل بہت بڑا ہو تو $\frac{\text{و ر}}{2}$ کے قریب آتی ہے۔

گول سروں کے شکم اور پشت پر کھچاؤ کے زور کی حدت ان قیمتوں کو (۱۶ ب) دفعہ ۱۲۹ میں درج کرنے سے حاصل ہوگی - کھچاؤ کے زور میں تناؤ $\frac{\text{و}}{\text{۲ ب}}$ جب کہ کو بھی جبری طور پر جمع کرنا ہوگا - تراشش اب پر فشاری زور کی حدت اندرونی جانب (ب) پر

$$= \frac{\text{ص}}{\text{م} (\text{بَ} - \text{ب})} \left(\frac{\text{م}}{\text{م} - \text{ما}} - \frac{\text{بَ}}{\text{ب}} \right)$$

$$= \frac{\text{و} (\text{۲ م} + \text{ل})}{\text{۲} (\pi \text{م} + \text{ل}) (\text{بَ} - \text{ب})} \left(\frac{\text{م}}{\text{م} - \text{ما}} - \frac{\text{بَ}}{\text{ب}} \right) \ldots\ldots (\text{۵})$$

جہاں ما مرکزی خط سے اندرونی کنارے ب کا فاصلہ ہے - مستقیم حصے میں کھچاؤ کا زور کھچاؤ کے معیار ص سے پیدا ہوگا - اس کھچاؤ کے زور میں تناؤ $\frac{\text{و}}{\text{۲ ب}}$ کو جبری طور پر جمع کرنا ہوگا - مستقیم حصے میں تمام تراشوں پر جن میں ع ف بھی شامل ہے تناؤ کی حدت اندرونی کنارے پر

$$= -\frac{\text{ص ما}}{\text{ا}} + \frac{\text{و}}{\text{۲ ب}} = \frac{\text{و}}{\text{۲}} \left\{ \frac{\text{ما م}^{\text{۲}} (\pi - \text{۳})}{\bar{\text{ا}} (\pi \text{م} + \text{ل})} + \frac{\text{۱}}{\text{ب}} \right\} \ldots\ldots (\text{۶})$$

متشاکل تراشوں کے لیے جن میں ما = ما، چھوٹے سے چھوٹی عملی کڑی میں بھی (دیکھو ذیل کی مثال ۱) یہ قیمت (۶) تراشش اب کے بیرونی کنارے کے نقطے ا پر کے تناؤ سے کم ہوتی ہے جو دفعہ ۱۲۹ کی مساوات (۱۶ ب) کی رُو سے

$$= \frac{\text{ص}}{\text{م} (\text{بَ} - \text{ب})} \left(\frac{\text{بَ}}{\text{ب}} - \frac{\text{م}}{\text{م} + \text{ما}} \right)$$

$$= \frac{\text{و} (\text{۲ م} + \text{ل})}{\text{۲} (\pi \text{م} + \text{ل}) (\text{بَ} - \text{ب})} \left(\frac{\text{بَ}}{\text{ب}} - \frac{\text{م}}{\text{م} + \text{ما}} \right) \ldots\ldots (\text{۷})$$

اور ی کے ذرا اوپر گول حصے میں راست کھینچ کو شامل کرکے اندرونی کنارے پر تناؤ کی حدت

$$= -\frac{\text{م}}{\text{ر}(\text{بَ}-\text{ب})}\left(\frac{\text{ر}}{\text{ر}-\text{ا}}-\frac{\text{بَ}}{\text{ب}}\right)+\frac{\text{و}}{۲\text{ب}}$$

$$= \frac{\text{و}}{۲}\left\{\frac{(\pi\text{ر}-۲\text{ر})}{(\pi\text{ر}+\text{ل})(\text{بَ}-\text{ب})}\left(\frac{\text{ر}}{\text{ر}-\text{ا}}-\frac{\text{بَ}}{\text{ب}}\right)+\frac{۱}{\text{ب}}\right\}\ldots\ldots(۸)$$

یہ قیمت (۸) چونکہ ایک منحنی حصّے کے لیے ہے اس لیے مستقیم حصّے کی قیمت (۶) سے ہمیشہ زیادہ ہوگی اگرچہ کہ خماؤ کا معیار اور راست زور دونوں کے لیے ایک ہی ہیں - یہ (۷) سے بھی زیادہ ہوگی یا نہیں اس پر منحصر ہے کہ ر اور ل تراش کے ابعاد کے ساتھ کیا نسبت رکھتے ہیں - چھوٹی سے چھوٹی کڑی میں (۸) سب میں بڑا تناؤ ہے (دیکھو ذیل کی مثال ۱) - زیادہ عام جسامتوں کی کڑیوں میں (۷) سے اعظم تناؤ حاصل ہوتا ہے اور یہ (۸) سے کسی قدر زیادہ ہوتا ہے - صفحہ ۴۱۱

اِن تقریبی تخمینوں کی رُو سے خماؤ کے زور میں تراش ی ع پر ایک اچانک عدم تسلسل واقع ہوگا کیونکہ یہاں نصف قطرِ انحنا ر سے یکایک لا انتہا ہو جاتا ہے - لیکن یہ طریقہ صرف تقریبی ہے اور ہم یہ مان سکتے ہیں کہ قیمتیں (۶) اور (۸) تراش ی ع کے دونوں طرف تھوڑے فاصلے تک تقریبی طور پر درست رہتی ہیں - زور (۵) اور (۷) بالعموم سب میں اہم ہوتے ہیں -

اگر خماؤ کے معیار کے لیے زیادہ صحیح حساب کیا جائے جیسا کہ دفعہ ۱۳۴ کے آخر میں چھلے کے لیے کیا گیا تھا تو چونکہ ایک رُبع میں مجموعی تبدیلی $\frac{\pi}{۲}$ کی بجائے

$$\int_{\text{ط}=۰}^{\text{ط}=\frac{\pi}{۲}}\frac{(۱+\text{س}.)\,\text{فر}}{\text{ر}} = \frac{\pi}{۲}-\frac{\text{م ل}}{۲\text{اے}}$$

ہوگی اس لیے آ کے لیے (۴) دفعہ ۱۳۰ سے پہلا تقرب لینے سے

$$م_ب = \frac{و\,س}{۲}\cdot\frac{۲\,س + ل}{\frac{بَ}{ب}\,\pi\,س + ل} \quad \text{(بہت تقریباً)}$$

اس سے اعظم خماؤ کا معیار (۴) سے کم حاصل ہوتا ہے۔ اس تخمینی نظریے میں یہ تصحیح جو خماؤ کے زوروں (۵)، (۶)، (۷) اور (۸) کو بہت ہی خفیف سا متاثر کرتی ہے کوئی ایسی ضروری نہیں معلوم ہوتی۔ کڑی کے بگاڑ کا دفعہ گزشتہ کے طریقوں سے تخمینہ کیا جاسکتا ہے اگر م اور س ب کی مناسب قیمتیں اختیار کی جائیں اور منحنی اور مستقیم حصّوں پر عمل علیحدہ کیے جائیں۔

مثال ۱۔ ایک کڑی کی خاص تراشوں پر کے زوروں کا تخمینہ کرو جس کے سرے نیم دائری اور بازو مستقیم ہیں۔ کڑی گول لوہے کی بنی ہے اور سروں کا اوسط نصف قطر گول لوہے کے قطر کے مساوی ہے اور مستقیم بازوؤں کا طول بھی تراشوں کے قطر کے مساوی ہے۔ (یہ چھوٹی سے چھوٹی اور زیادہ سے زیادہ منحنی کڑی ہے جو ایک زنجیر میں اپنے جیسی کڑیوں کے ساتھ استعمال کی جاسکتی ہے)۔

تراش کا نصف قطر ر لو۔ سروں کا اوسط نصف قطر س = ۲ ر = ل،

$ب = \pi\,ر^۲$۔ اور (۳) دفعہ ۱۳۰ سے

$$بَ = ۴\pi\,ر^۲\,(۲ - \sqrt{۳}) = ۱٫۰۷۱۸\,\pi\,ر^۲$$

$$بَ - ب = ۰٫۰۷۱۸\,\pi\,ر^۲$$

$$\frac{بَ}{ب} = ۱٫۰۷۱۸$$

کھینچ کے مستوی میں کی تراش کے لیے (۵) میں $ہ_۱ = ر$ رکھنے سے اندرونی کنارے پر فشاری زور کی حدت

= ۶ و ر / ۲ ر (۲ + π ۲) × ۰٫۷۱۸ π ر² (۲ - ۰٫۷۱۸ ۱٫) = (۰٫۹۲۸۲ × ۳ / ۰٫۷۱۸ × (۱ + π) ۲) × و / ر² π

= ۳٫۶۸ و / ر² π

اگر و = ۱ ٹن اور لوہے کا قطر ۱ انچ ہو تو فشاری زور ۳٫۶۸ / ۰٫۷۸۵۴ = ۴٫۶۹ ٹن فی مربع انچ ہوگا۔

اِن نتائج کا اُن نتائج سے مقابلہ کرنا چاہیے جو دفعہ ۳۴۱ کے آخر کی مثال کے چھلے کے لیے حاصل ہوئے تھے۔ صفحہ ۴۱۲

اِسی تراش کے بیرون پر تنفشی زور کی حدت (۷) کی رُو سے

= ۶ و ر / ۳ ر (π + ۱) × ۰٫۷۱۸ π ر² (۰٫۷۱۸ - ۲/۳) = ۴٫۰۳ و / ر² π

مستقیم بازوؤں کے اندرون پر تنفشی زور کی حدت (۶) کی رُو سے

= و ر × ۳ ر² (π - ۲) × ۴ / ۲ × ۲ (π + ۱) π ر² + و / ۲ π ر² = و / ر² π (۱٫۱۰ + ۰٫۵)

= ۱٫۶۰ و / ر² π

مستقیم بازوؤں اور منحنی سرعلی کے ملاپ کی تراشوں پر تنفشی زور (۸) کی رُو سے

= و (π - ۲) / ۲ ر (π + ۱)(۰٫۷۱۸ π ر²) (۲ - ۰٫۷۱۸ ۱٫) + و / ۲ π ر² = و (۱٫۶۶۸ + ۰٫۵) / ر² π

= ۲٫۱۶۸ و / ر² π

جو ساری کڑی کا سب میں بڑا تناؤ ہے۔
کڑی کے بنانے میں اس کے عمل کی آسانی کے لیے ضروری ہے کہ

بازووں کے طول اور سروں کے نصف قطر کو کسی قدر بڑا بنایا جائے اور اس اضافہ سے تنشی زور کھنچ کے خطایں کی تراشوں کے بیرون پر اعظم ہوگا۔

۱۴۷ - چپٹی مرغولی کمانیاں ـــــ مختلف میکانیوں کو چلانے کے لیے جو مرغولی کمانیاں استعمال ہوتی ہیں اُن کے لیے فساوی عمل اور لپیٹے جانے کے ربط کو حسبِ ذیل طریقے پر معلوم کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ کمانی کا ایک سرا ا آزاد ہے (شکل ۱۸۱) اور ایک قوت ق سے سمت اب میں کھینچا جاتا ہے اور دوسرا سرا ایک چھوٹے ٹکلے ج کو بندھا ہوا ہے۔ کمانی کے ایک چھوٹے طول فرس پر جو خط اب سے فاصلہ لا پر ہو خماؤ کا معیار



شکل ۱۸۱

$$\text{ھ} = \text{ق لا}$$

زاویۂ لپیٹ اس ٹکڑے کی وجہ سے یوں حاصل ہوگی:-

$$\frac{\text{فرعہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{ھ}}{\text{آ ے}}$$

یا

$$\text{فرعہ} = \frac{\text{ھ}}{\text{آ ے}} \cdot \text{فرس} = \frac{\text{ق لا}}{\text{آ ے}} \cdot \text{فرس}$$

جہاں فرعہ ٹکڑے فرس کے سروں کے مماسوں کے درمیانی زاویے کی تبدیلی ہے اور آ تراش کا معیارِ جمود تراش کے ایک مرکزی محور کے گرد ہے جو شکل کے مستوی کے علی القوائم ہو۔ اس طرح قوت ق کی وجہ سے لپیٹ کا مجموعی زاویہ

$$\text{عہ} = \Sigma \left(\frac{\text{ق لا}}{\text{آ ے}}\ \text{فرس}\right) \text{ یا } \frac{\text{ق}}{\text{آ ے}} \int \text{لا فرس (نیم قطری)} \quad \text{.........(۱)}$$

اگر آ مستقل ہو جیسا کہ عام طور پر ہوتا ہے ۔ مقدار ∫ لا فرس کو خط اب کے گرد کمانی کے ایک رُخی نقشے کا معیار کہا جاسکتا ہے اور یہ کمانی کے سارے طول ل اور اب سے اس کے مرکزِ جاذبہ کے فاصلے کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا ۔ یہ فاصلہ تقریباً ع کے مساوی ہے جو تکلے ج کے مرکز کا فاصلہ اب سے ہے ۔ اس طرح صفحہ ۲۱۳

$$\int \text{لا فرس} = \text{ع} \times \text{ل}$$

$$\text{اور} \qquad \text{عہ} = \frac{\text{ق ع ل}}{\text{آ ے}} \ \text{یا}\ \frac{\text{مہ ل}}{\text{آ ے}} \ (\text{نیم قطری}) \ \ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں مہ = ق ع ۔

حقیقی کمانیوں میں بالعموم نقطہ ا ثابت ہوتا ہے اور تکلے ج کو گھمایا جاتا ہے ۔ لپیٹنے کے عمل سے ایک قوت ق ظہور میں آتی ہے جو اب کے تقریباً متوازی ہوتی ہے اور ایک مساوی اور مخالف قوت ج میں ہے اور یہ دونوں مل کر ایک جفت ق × ا ج یا ق × ع بناتے ہیں ۔ جب تک کمانی ا پر ج ا پر تقریباً علی القوائم ہو اور کمانی کے کوئی دو حصے تماس میں نہ آجائیں اور شکل ایسی رہے کہ مرکزِ ہندسی ج پر رہے تو اوپر کے ربط عملی طور پر صحیح ہونگے ۔ زاویہ عہ قوت ق یا جفت مہ کے متناسب ہوگا اور اس طرح لپیٹنے میں جمع شدہ کام یا کمانی کی بازگشتگی (۸) دفعہ ۹۳ کی رُو سے حسبِ ذیل ہوگی :-

$$\frac{۱}{۲}\,\text{مہ} \times \text{عہ} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\text{مہ}^{۲}\,\text{ل}}{\text{آ ے}} = \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ق ع}^{۲}\,\text{ل}}{\text{آ ے}} \ \ldots\ldots\ldots (۳)$$

جہاں مہ = ق ع یعنی لگایا ہوا بیرونی معیار

کمانی میں اعظم خماؤ کا زور اس مقام پر واقع ہوسکتا ہے جہاں کمانی تکلے سے ملتی ہے اگر اس مقام پر انحنا بہت بڑا ہو ۔ لیکن بالعموم اعظم خماؤ کا زور ا کے بالکل مقابل نقطہ د کے پاس واقع ہوگا جہاں خماؤ کا

معیار اعظم ہے۔ اگر کمانی بہت پتلی ہو تو ہم اِنحنا کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور خماؤ کا زور سیدھے شہتیر کی طرح حاصل کر سکتے ہیں۔ د پر خماؤ کا معیار تقریباً ق × ۲ ع

ہے اس لیے خماؤ کے زور کی اعظم حدت $\frac{ق ع}{۲\ مق}$ ہوگی، جہاں مق خماؤ کے لیے تراش کا مقیاس ہے۔ اگر کمانی کی تراش مستطیلی ہو اور اس کی گہرائی یا موٹائی ق اور چوڑائی ض ہو تو مق = $\frac{۱}{۶}$ ض ق^{۲} اور اس طرح د پر خماؤ کے زور کی حدت تقریباً حسبِ ذیل ہوگی:

$$ف = \frac{۱۲\ ق ع}{ض ق^{۲}} = \frac{۱۲\ م}{ض ق^{۲}}$$

اگر بے خطر یا برداشتنی زور کی حدت ز ہو تو ق کی اعظم قیمت حسبِ ذیل ہوگی:۔

$$ق\ (اعظم) = \frac{ز ض ق^{۲}}{۱۲ ع}\ یا\ م = \frac{ز ض ق^{۲}}{۱۲}$$

اور اس کو (۳) میں درج کرکے آ کی قیمت $\frac{۱}{۱۲}$ ض ق^{۳} رکھنے سے

$$برداشتنی\ بازگشتگی = \frac{۱}{۲۴} \frac{ز^{۲}}{ے} × ض ق ل\ یا\ \frac{۱}{۲۴} \frac{ز^{۲}}{ے} × حجم\ (تقریباً)$$

یا تقریباً $\frac{۱}{۲۴} \frac{ز^{۲}}{ے}$ فی اکائی حجم جو ایک تنگ لپیٹی ہوئی مرغولی کمانی کی محوری مروڑ کے تحت کی بازگشتگی کی صرف $\frac{۱}{۳}$ ہے (دفعہ ۱۷۷) اور اس کی وجہ یہ ہے کہ محوری مروڑ کے تحت مرغولی کمانی میں خماؤ کا معیار ہر جگہ اعظم ہوتا ہے اور چپٹی کمانی میں صفر سے اعظم تک بدلتا ہے اور اس کی اوسط قیمت اعظم کی تقریباً نصف ہوتی ہے۔

صفحہ ۲۱۴
مثال ۱۔ ایک چپٹی مرغولی کمانی $\frac{۱}{۲}$ انچ چوڑی، $\frac{۱}{۱۶}$ انچ موٹی، اور ۱۰ فٹ لمبی ہے۔ ایک سرا ایک چھوٹے تکلے کو لگا ہوا ہے اور دوسرا ایک ثابت نقطے کو۔ اگر کمانی "واماندہ" ہو یعنی ڈھیلی حالت میں ہو تو معلوم کرو

کہ کمانی کو تین پورے چکر دینے کے لیے تکلے پہ کتنا گھماؤ کا معیار درکار ہوگا۔ لپیٹنے میں کتنا کام صرف ہوگا اور کمانی میں اعظم زور تقریباً کتنا ہوگا۔ (ے = ۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ)۔

آ = ۱/۱۲ × ۱/۲ × (۱/۴۰)^۳ = ۱/۱۵۳۶۰۰۰ (انچ)^۴

عہ = ۶π نیم قطری

(۲) سے

ھ = (آ ے × عہ)/ل = (۶π × ۱۰^۶ × ۳۰)/(۱۲۰ × ۱۵۳۶۰۰۰) = ۳٫۰۶۸ پونڈ انچ

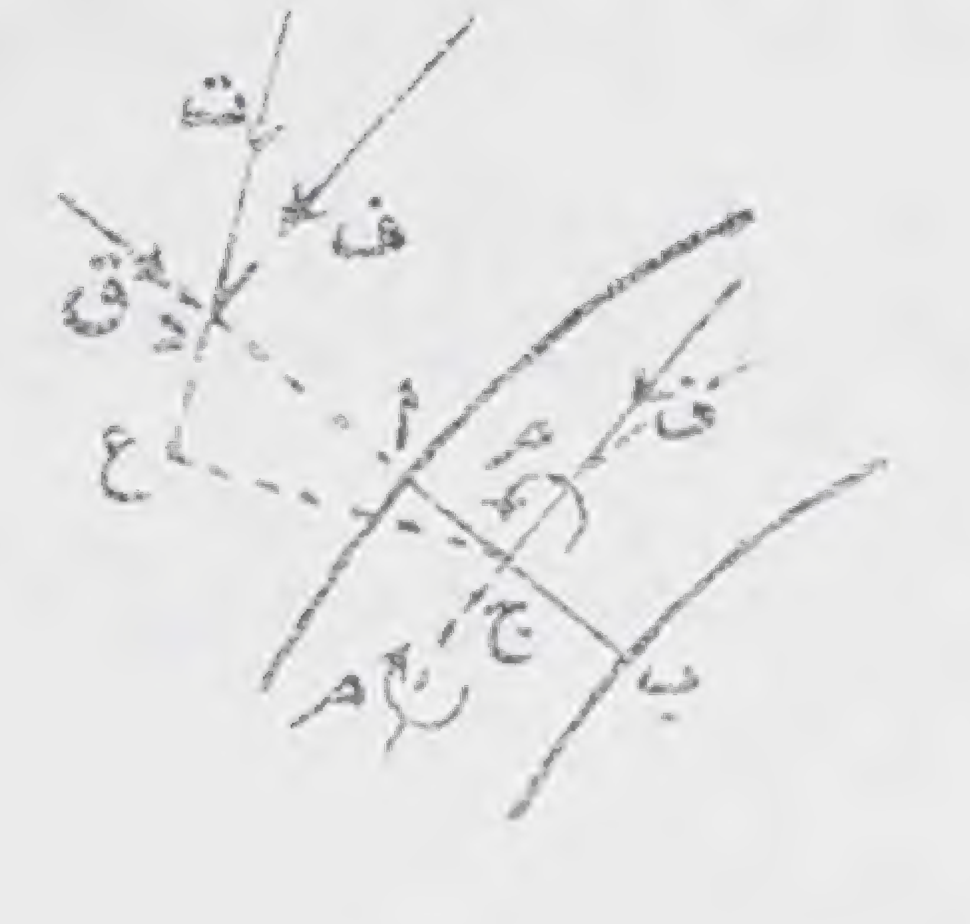
صرف شدہ کام

= ۱/۲ ھ × ۶π = ۳π × ۳٫۰۶۸ = ۲۸٫۹۱ انچ پونڈ

اعظم خماؤ کا معیار تقریباً ۲ × ۳٫۰۶۸ ہوگا اور خماؤ کے زور کی حدت تقریباً حسب ذیل ہوگی :—

(۶ × ۳٫۰۶۸ × ۲)/(۱/۲ × (۱/۴۰)^۲) = ۱۱۷۸۰۰ پونڈ فی مربع انچ

۱۳۸ — **کماندار پسلیاں** —— موڑے ہوئے شہتیر جو عموماً دھات کے ہوتے ہیں چھتوں اور پُلوں میں اکثر استعمال ہوتے ہیں اور اُن کو کماندار پسلیاں کہا جاتا ہے۔ کسی عادی تراشش پر کے فسادی عاملوں کو ایک خماؤ کے معیار اور ایک جزی قوت میں تحلیل کیا جاسکتا ہے جیسا کہ ایک عرضی بوجھوں کے حامل سیدھے شہتیر کی صورت میں ہوتا ہے لیکن کماندار پسلی کی صورت میں تراشش کے علی القوائم ایک تحلیل بھی ہوگا۔ کیونکہ برخلاف سیدھے شہتیر کے یہاں بوجھ سب پسلی کے محور کے علی القوائم نہیں ہوتے اس لیے نیم قطری تراشش کے علی القوائم



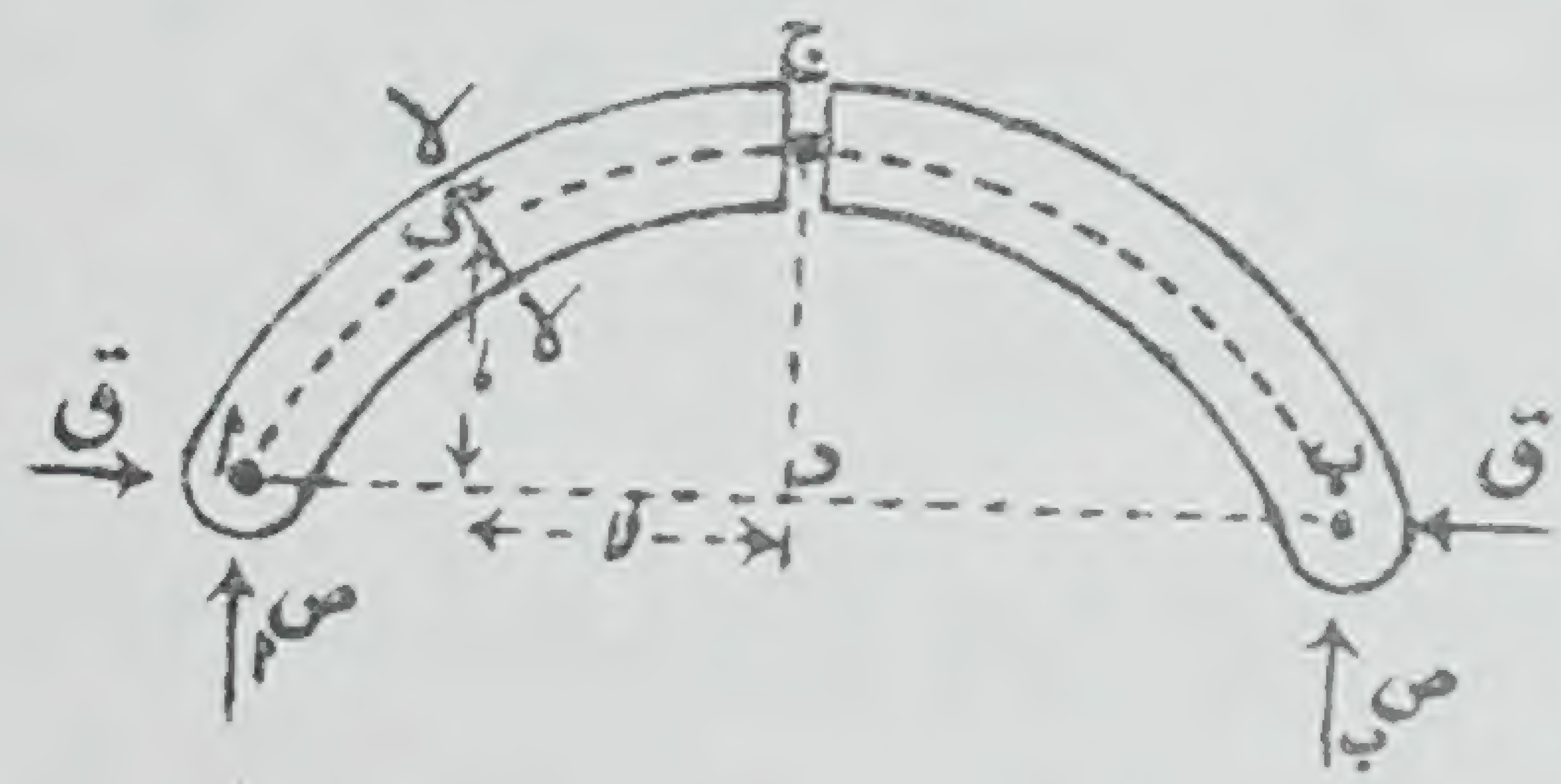
شکل نمبر ۱۸۱

حاصل قوت صفر نہیں ہوتی - مثلاً کسی کماندار بیلی کی تراش اب (شکل ۱۸۲) پر بیرونی قوتوں کی وجہ سے حسب ذیل باتیں ظہور میں آتی ہیں (۱) ایک دھکیل ف مرکز ہندسی ج میں سے (۲) ایک جزی قوت ق تراش اب پر (۳) ایک خماؤ کا معیار م - یہ تین عمل سکونیات کی رُو سے ایک واحد دھکیل ت کے معادل ہونگے جو تراش اب مخروبہ کے ایک نقطے د میں سے گزریگا - یہاں ت علی القوائم اجزائے ترکیبی ق اور ف کا حاصل ہوگا اور فاصلہ ج د = م/ف - وہ منحنی جس کو دھکیل کا خط اُن مراکز ہندسی کے انتصاباً اُوپر ہر جگہ مس کرے اُس بیلی کی خطی کمان کہلاتا ہے - اس طرح فسادی عمل کو عماری دھکیل، جزی قوت اور خماؤ کے معیار کی رقوم میں یا محض خطی کمان کے ذریعے ظاہر کر سکتے ہیں اور جب فسادی عمل معلوم ہو جائیں تو بیلی میں زور کی حدیں محسوب ہو سکتی ہیں - سیدھے شہتیروں کی طرح جزی قوت کو اکثر نظر انداز کر دیا جا سکتا ہے کیونکہ زوروں پر اس کا اثر بہت خفیف ہوتا ہے - خماؤ کے زور، اگر انحنا زیادہ ہو تو، دفعہ ۱۲۹ صفحہ ۴۱۵
کے مطابق محسوب کیے جا سکتے ہیں لیکن بالعموم ان کو سیدھے شہتیروں کے قواعد سے دفعہ ۴۳ کے مطابق محسوب کرنا کافی ہوگا - دھکیل ف سے پیدا ہونے والے یکساں فشار کو خماؤ کے زور میں دفعات ۹۷ اور ۹۸ کے مطابق جمع کیا جاتا ہے اور جزی قوت سے پیدا ہونے والے نیم قطری اور محیطی جزی زوروں کو دفعہ ۷۱ کے مطابق محسوب کیا جا سکتا ہے اور ضروری ہو تو خاص زور معلوم کرنے کے لیے دفعات ۷۳، ۱۱۳ اور ۱۱۴ کے مطابق خماؤ کے اور دیگر راست زوروں کے ساتھ مرکب کیا جا سکتا ہے - کماندار بیلی کے متعلق عام طور پر یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ

اُفقی فصل کو پاٹتی ہے اور انتصابی بوجھ اُٹھاتی ہے - اور اس کی تین صورتوں پر غور کیا جائیگا -

۱۳۹ - کماندار پسلی سروں پر اور وسط میں قبضہ دار -

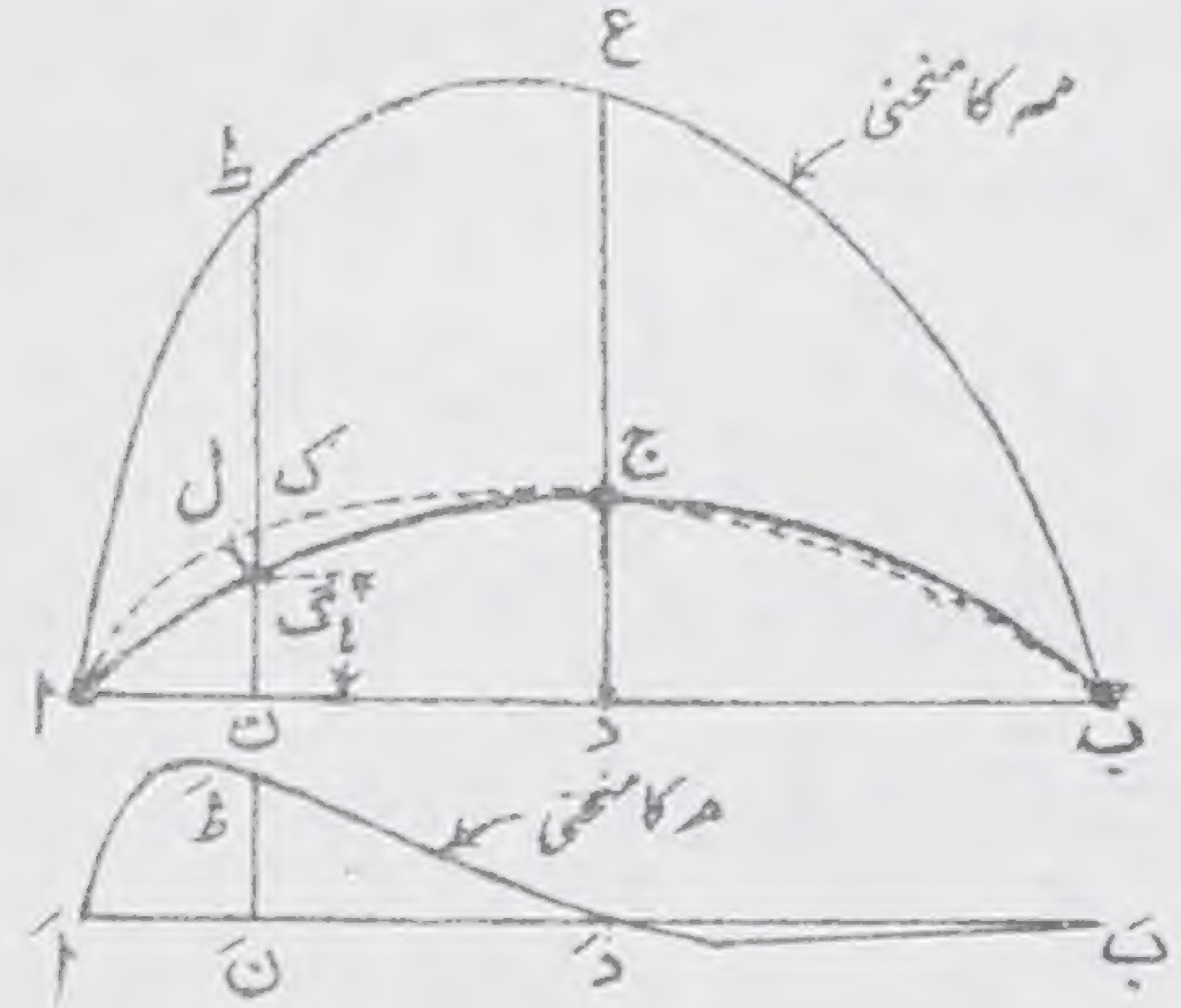
شکل ۱۸۳ میں ایک پسلی دکھائی گئی ہے جس کو دونوں سہاروں یا جست کے نقاط



شکل ۱۸۳

ا اور ب پر اور چوٹی ج پر قبضہ لگایا گیا ہے اور صرف انتصابی قوتوں سے لادا گیا ہے - ا اور ب پر کے ردِّ عملوں کو آسانی کے لیے انتصابی اجزائے ترکیبی ص ا اور ص ب میں افقی جزوِ ترکیبی ق میں تحلیل کیا جاسکتا ہے جو دونوں سروں پر مساوی ہوگا کیونکہ پسلی پر بیرونی افقی قوتیں یہی دو ہیں - اس طرح اُفقی ڈھکیل ساری پسلی میں مستقل اور ق کے مساوی ہوگا - انتصابی اجزائے ترکیبی ص ا اور ص ب بالکل اُسی طرح معلوم کیے جاسکتے ہیں جس طرح عرضی بوجھوں والے اُفقی شہتیر کے انتصابی ردِّ عمل معلوم کیے جاتے ہیں (دفعات ۵۶ اور ۵۷) یعنی ا یا ب کے گرد بیرونی قوتوں کا معیار لینے سے - مستقل اُفقی ڈھکیل موجودہ صورت میں اس امر سے حاصل ہوگا کہ قبضہ ج پر خماؤ کا معیار لازماً صفر ہونا چاہیے اور اس طرح ج کے گرد اُفقی ڈھکیل ق کا معیار

ا سے ج تک کی انتصابی قوتوں کے (جن میں ا پر کا انتصابی ردِّ عمل ص ا بھی شامل ہے) معیار کے مساوی اور مخالف ہونا چاہیے۔ اگر مہ صرف انتصابی قوتوں سے سیدھے افقی شہتیر کی طرح حاصل ہونے والا معیار ہو اور ج پر (شکل ۱۸۴)



شکل ۱۸۴

مہ = مہج جو معین ع د سے تعبیر ہو تو

$$\text{ق} = \frac{\text{مہج}}{\text{ج د}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

صفحہ ۳۱۶ تب کسی اور تراش پر جس کا مرکزِ ہندسی گ ہو (شکل ۱۸۴) اور اس کی بلندی خط ا ب سے ہا ہو معیار

$$\text{م} = \text{مہ} - \text{ق ہا} = \text{مہ} - \frac{\text{مہج}}{\text{ج د}} \times \text{ہا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

یہاں معیاروں کی علامت سیدھے شہتیروں کی قرار داد دفعہ ۷۷ کے برعکس ہے یعنی اوپر وار تحدب یعنی انحنا کو گھٹانے والے خماؤ کے معیاروں کو مثبت سمجھا جاتا ہے۔

اس لیے اگر خماؤ کے معیاروں مہ کا نقشہ اس طرح کھینچا جائے جس طرح ایک سیدھے اُفقی شہتیر کے لیے کھینچا جاتا ہے اور ہر ایک معین کو بقدر ق × ما یا $\frac{مہ \times ما}{ج د}$ کے گھٹا دیا جائے تو ط َن جیسے حاصل ہونے والے معین حقیقی خماؤ کے معیار مر کی قیمتوں کو اسی پیمانے پر تعبیر کرینگے جس پر مہ کا منحنی کھینچا گیا ہے اس طرح (۲) کو لکھا جاسکتا ہے:۔

$$ط َن = ط ن - \frac{ع د}{ج د} \times گ ن$$

مہ کے منحنی سے خماؤ کا معیار حاصل کرنے کا ایک کسی قدر مختلف طریقہ یہ ہے کہ خطی کمان کھینچی جائے۔ اگر (۲) کی ہر ایک رقم کو $\frac{ج د}{مہ ع}$ یا $\frac{ج د}{ع د}$ سے ضرب دیا جائے تو

$$مر \times \frac{ج د}{ع د} = مہ \times \frac{ج د}{ع د} - ما \text{..............} (۳)$$

اس لیے اگر مہ کے منحنی ا ط ع ب کے معین مثلاً ط ن نسبت $\frac{ج د}{ع د}$ میں تحویل کردیے جائیں تو ان تحویل شدہ معینوں اور معینوں ما کا فرق مثلاً گ ک مقدار مر × $\frac{ج د}{ع د}$ کو سابق کے پیمانے پر تعبیر کریگا یا مر کو ایسے پیمانے پر تعبیر کریگا جس میں اکائی طول سے تعبیر ہونے والے خماؤ کے معیار کو نسبت $\frac{ج د}{ع د}$ میں بڑھا دیا جائے۔ ایسی صورت میں خماؤ کا معیار منحنی اساس اگ ج ب سے ناپا جاتا ہے اور اصلی پیمانے کی بجائے ترمیم یافتہ پیمانے پر ناپا جاتا ہے۔ یا (۲) کو یوں لکھا جاسکتا ہے

م = ق (مہ/ق - ۱) = ق (ج د/مہ ج مہ - ۱)

= ق (ن ک - گ ن) = ق × ک گ

اس لیے خماؤ کا معیار ہر جگہ افقی دھکیل کو خطی کمان کے اور کمان کے مرکزی خط کے درمیانی انتصابی فاصلے سے ضرب دینے سے حاصل ہوگا - یہ ایڈی کا مسئلہ کہلاتا ہے -

خط ال ک ج ب خطی کمان ہے اور عمادی دھکیل ف اس طرح معلوم ہوسکتا ہے کہ خماؤ کے معیار م کو خطی کمان کے نقطہ ک پر کے مماس سے گ کے عمودی فاصلے گ ل سے تقسیم کیا جائے (دیکھو دفعہ ۱۳۸) اور پیمانہ ایسا ہوگا کہ

$$ف = ق \times \frac{گ ک}{ل گ} \qquad (۴)$$

اعظم خماؤ کے معیار کے نقاط کے پاس خطی کمان کماندار پسلی کے متوازی ہوگی اور ان مقامات پر حاصل دھکیل اور عمادی دھکیل عملاً ایک ہی ہونگے -

حاصل دھکیل اس طرح بھی معلوم ہوسکتا ہے کہ مستقل افقی دھکیل ق کو انتصابی جزی قوت کے ساتھ، جس کو سیدھے افقی شہتیر کی طرح معلوم کیا جائے، مرکب کیا جائے - صفحہ ۲۱۲

ظاہر ہے کہ اگر کماندار پسلی کا مرکزی خط اُسی شکل کا ہے جو مہ کے منحنی کی شکل ہے تو خماؤ کا معیار م ہر جگہ صفر ہوگا مثلاً ایسی کماندار پسلی کی صورت میں جو فصل کے اوپر یکساں پھیلا ہوا بوجھ اٹھائے ہوئے ہو مہ کا خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا (دفعہ ۷۵ شکل ۶۵) جو متشاکل ہوگا اور اس کا محور فصل کے علی القوائم اور اس کی تنصیف کرتا ہوا ہوگا - اگر پسلی بھی اسی طرح کا مکافی ہو تو خماؤ کا معیار ہر جگہ صفر ہوگا -

خطی کمان، خماؤ کے معیار، اور عمادی دھکیل کی دریافت کو اکثر بہت آسانی

کے ساتھ ترسیماً ایک ریسمانی کثیر الاضلاع کے ذریعے معلوم کیا جا سکتا ہے جس کا قطبی فاصلہ (۱) سے قرار پائیگا - اِن طریقوں کی تعمیروں کی کتابوں میں زیادہ تشریح کی جاتی ہے -

مثال ۱ - ایک متشاکل مکافی کمانداریسلی کا فصل ۴۰ فٹ اور ارتفاع ۸ فٹ ہے اور جست کے نقاط اور چوٹی پر قبضے لگے ہیں - اگر اس کے بائیں نصف فصل پر ۱/۲ ٹن فی طولی فٹ کا یکساں پھیلا ہوا بوجھ ہو تو قبضوں پر اور دونوں سروں سے ۱/۴ فصل پر خماؤ کا معیار، عمادی دھکیل، اور جزی قوت معلوم کرو -

د پر مبداء لیا جائے (شکل ۱۸۳) تو مراکزِ ہندسی کے مکافی کی مساوات ہوگی :-

لا^۲ = ج (۸ - ما)

لیکن ۱ پر { لا = ۲۰، ما = ۰ } اس لیے ج = ۵۰

اور لا^۲ = ۵۰ (۸ - ما)

یا ما = ۸ - لا^۲/۵۰

فرما/فرلا = - لا/۲۵

جس سے پسلی کے کسی مقام پر ڈھال کا مماس معلوم ہوگا -

ردِّ عملوں کے انتصابی اجزائے ترکیبی صریحاً حسبِ ذیل ہونگے :-

ص~ا~ = ۳/۴ × ۲۰ × ۱/۲ = ۷،۵ ٹن، ص~ب~ = ۲،۵ ٹن

ج کے گرد معیار لینے سے :-

۷،۵ × ۲۰ - ۱۰ × ۲۰ × ۱/۲ - ق × ۸ = ۰

ق = ۶،۲۵ ٹن

ا پر عمادی دھکیل :-

حاصل دھکیل حا = √((۷٫۵)² + (۶٫۲۵)²) = ۹٫۷۶۳ ٹن

اُفق سے اس کے میلان کا مماس = صا/ق = ۷٫۵/۶٫۲۵ = ۱٫۲ = مس ۵۰٫۲۰°

فرما/فرلا سے پسلی کے ڈھال کا مماس

= ۲۰/۲۵ = ۰٫۸ = مس ۳۸٫۶۷°

حا کا میلان پسلی کے مرکزی خط کے ساتھ = ۵۰٫۲۰ − ۳۸٫۶۷ = ۱۱٫۵۳°

ا پر عمادی دھکیل = ۹٫۷۶۳ × جم ۱۱٫۵۳° = ۹٫۵۶ ٹن

ا پر جزی قوت = ۹٫۷۶۳ × جب ۱۱٫۵۳° = ۱٫۹۵ ٹن

ا اور ج کے درمیان د سے اُفقاً لا فٹ پر

ھر = ۷٫۵ (۲۰ − لا) − ۱/۸ (۲۰ − لا)² − ۶٫۲۵ ما

= ۲٫۵ لا − ۱/۸ لا²

صفحہ ۲۱۸ یہ لا = ۱۰ پر اعظم ہوتا ہے اور وہاں ھر = ۱۲٫۵ ٹن فٹ۔ اس مقام پر انتصابی جزی قوت = ۷٫۵ − ۱۰ × ۱/۲ = ۲٫۵ ٹن (اوپر وار بیرونی قوت بائیں جانب)، پسلی اور دھکیل دونوں کے ڈھال مساوی ہونگے، یعنی مس⁻¹ ۰٫۸، اور عمادی دھکیل حاصل دھکیل کے مساوی ہوگا یعنی

√((۶٫۲۵)² + (۲٫۵)²) = ۶٫۷۳ ٹن

چوٹی پر، انتصابی جزی قوت = ۷٫۵ − ۱۰ = −۲٫۵ ٹن یا ۲٫۵ ٹن (نیچے وار

بیرونی بائیں جانب) -

دھکیل ت ج = √((۶٫۲۵)² + (۲٫۵)²) = ۶٫۷۳ ٹن

پسلی کے پورے دائیں جانب دھکیل کی سمت اور مقدار مستقل ہوگی اور خط ب ج میں ہوگی -

ب سے ۱۰ فٹ پر خماؤ کا معیار جو صریحاً ب ج پر کی اعظم قیمت ہوگا حسب ذیل ہوگا:

۶ × ۶٫۲۵ - ۱۰ × ۲٫۵ = - ۱۲٫۵ ٹن فٹ

یعنی ۱۲٫۵ ٹن فٹ جو پسلی کے انحنا کو بڑھانا چاہتا ہے -

ب پر :-

دھکیل کے میلان کا مماس = ۲٫۵ / ۶٫۲۵ = ۰٫۴ = مس °۲۱٫۸

پسلی کے میلان کا مماس (ا کی طرح) = ۰٫۸ = مس °۳۸٫۶۷

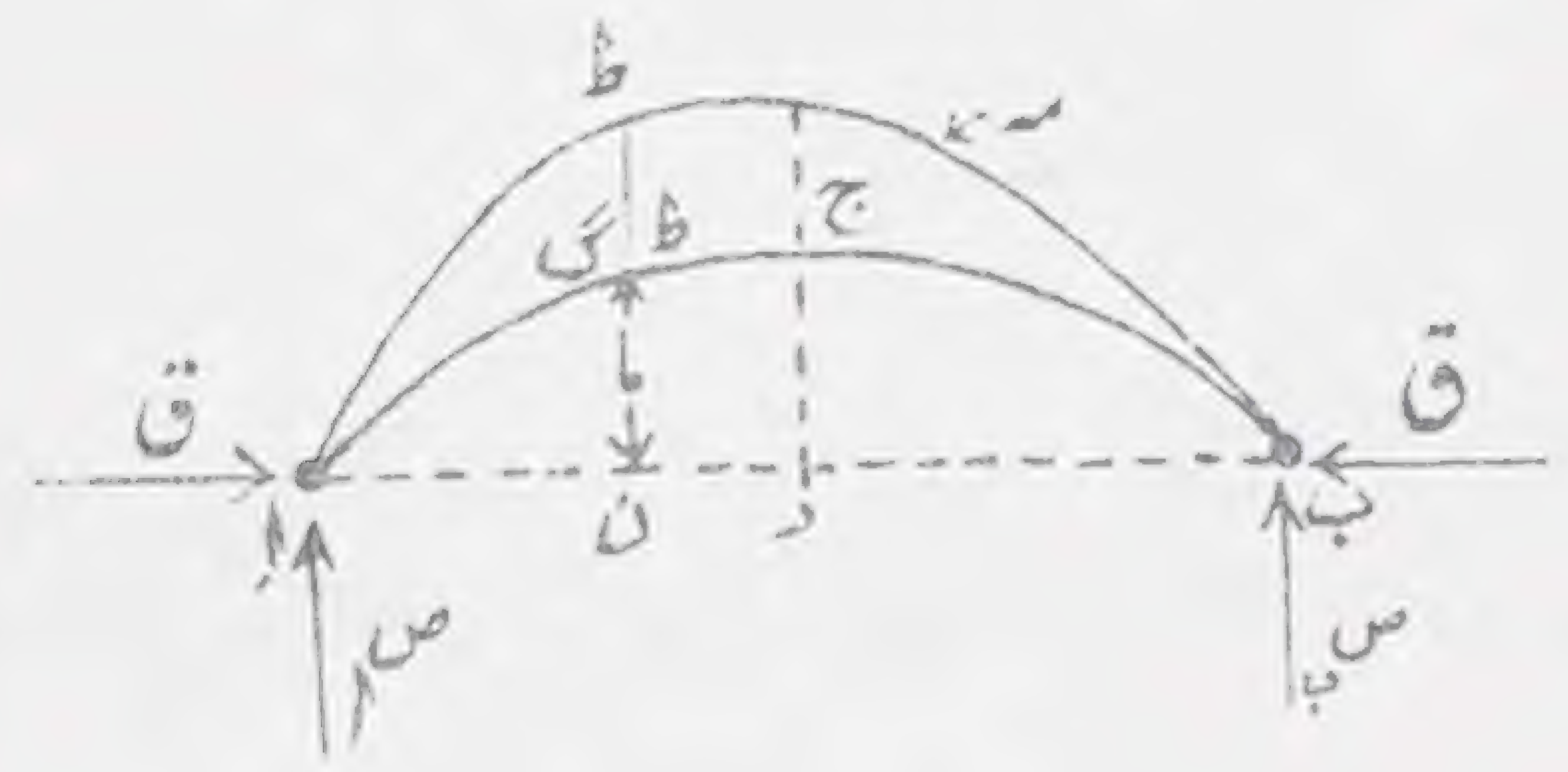
ردِ عمل کا میلان پسلی کے مرکزی خط کے ساتھ = °۳۸٫۶۷ - °۲۱٫۸ = °۱۶٫۸۷

ب پر عمادی دھکیل = ۶٫۷۳ جیم °۱۶٫۸۷ = ۶٫۴۴ ٹن

ب پر جزی قوت = ۶٫۷۳ جیب °۱۶٫۸۷ = ۱٫۹۵ ٹن

۱۴۰ - کماندار پسلی سروں پر قبضہ دار — پسلی کے صرف سروں پر قبضے ہوں اور چوٹی پر قبضہ نہ ہو تو اس سے ہوتا یہ ہے کہ اگر قبضہ دار سرے اپنی جگہ پر استوارانہ ثابت ہوں تو پسلی کے پھیلاؤ یا سکڑاؤ سے خماؤ کے زور پیدا ہو سکتے ہیں۔ اس طرح کی پسلی میں زور سکونیات کی رُو سے غیر معین ہوتے ہیں اِلّا اس کے کہ دونوں قبضوں پر خماؤ کا معیار صفر ہونے کی شرط کے علاوہ کوئی اور شرط بھی مفروض کی جائے - یہ شرط بالعموم مفروضہ ہوتی ہے کہ لداؤ سے پہلے پسلی میں کوئی زور نہیں اور بوجھ کے پڑنے کے بعد

قبضہ دار سرے باہم اُسی فاصلے پر رہتے ہیں جس پر بوجھ سے پہلے تھے، یعنی فصل تبدیل نہیں ہوتا - اس شرط کی مدد سے افقی دھکیل محسوب ہو سکتا ہے۔ دفعہ گزشتہ کی ترقیم کے ساتھ فرض کرو کہ کسی تراش پر جس کا مرکز ہندسی گ ہے (شکل ۱۸۵)



شکل ۱۸۵

خماؤ کا معیار م ہے - تب

$$م = مہ - ق \times ما \quad ....(۱)$$

صفحہ ۶۱۹ اور مساوات (۱) دفعہ ۴۱۳ سے، عمادی دھکیل کے اثر کو نظر انداز کرنے سے فصل کا مجموعی اضافہ

$$= \int_{ا}^{ب} \frac{م \times ما}{آ ے} فس = \int_{ا}^{ب} \frac{(مہ - ق ما) ما فس}{آ ے}$$

جہاں آ تراش کا معیار جمود ہے اور فس قوس ا گ ج ب کا ایک ٹکڑا ہے۔ تب اس مفروضے کی رُو سے کہ قبضے اپنی جگہ برقرار رہتے ہیں

$$\int \frac{(مہ - ق ما) ما}{آ ے} فس = ۰ \quad ....(۲)$$

یا

$$\int \frac{\text{مہ}}{\text{آ ے}} \times \text{ما فرس} = \text{ق} \int \frac{\text{ما}^2}{\text{آ ے}} \text{فرس}$$

یا

$$\text{ق} = \frac{\int \frac{\text{مہ ما}}{\text{آ ے}} \text{فرس}}{\int \frac{\text{ما}^2}{\text{آ ے}} \text{فرس}} \quad \text{.................... (۳)}$$

حاصل جمع پسلی کے پورے طول پر لیے گئے ہیں۔ بڑی ساختہ کماندار پسلی میں آ بالعموم متغیر ہوگا لیکن اگر متغیر نہ ہو اور ے بھی مستقل ہو تو (۳) حسبِ ذیل ہو جاتی ہے:—

$$\text{ق} = \frac{\int \text{مہ ما فرس}}{\int \text{ما}^2 \text{فرس}} \quad \text{.................... (۴)}$$

اگر ما، مہ، اور فرس ایک مشترک متغیر کے تفاعلوں کے طور پر لکھے جاسکیں تو ق کی یہ قیمت معمولی تکمل کے ذریعے معلوم ہو سکتی ہے اور بہر صورت مہ کا منحنی کھنچ جانے کے بعد اس کو تقریبی طور پر اس طرح معلوم کر سکتے ہیں کہ قوس اگ ج ب کو چھوٹے چھوٹے طولوں فرس میں تقسیم کریں اور ان طولوں کے وسط میں مہ اور ما کی قیمت لے کر حاصل ضربوں مہ × ما × فرس اور ما^2 × فرس کے حاصل جمع معلوم کریں۔ اگر آ متغیر ہو تو حاصل جمعوں میں حاصل ضرب $\frac{\text{مہ}}{\text{آ}}$ ما فرس اور $\frac{\text{ما}^2}{\text{آ}}$ × فرس لینے چاہییں۔

دائری کمان میں ما، فرس، اور افقی فاصلوں کو آسانی سے مرکزِ انحنا پر کے زاویے کے تفاعلوں کے طور پر لکھا جاسکتا ہے اور اگر معیار مہ کو باب ۴ کی مدد سے فصل پر کے افقی فاصلوں کے تفاعل کی شکل میں بیان کیا جاسکے تو (۴) کے

تکمل آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں - مرتکز بوجھوں کی صورت میں مہ والے تکمل کو ایسے طبقوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے جن میں مہ بالتسلسل بدلے - جب ق معلوم ہو جائے تو ھر اور عمادی دھکیل ف کو دفعہ گزشتہ کی طرح (۱) سے معلوم کر سکتے ہیں یا ترسیماً خطی کمان کے ذریعے جس کو ایسے ریسمانی کثیر الاضلاع سے کھینچا جائیگا جس کا قطبی فاصلہ ق کے متناسب ہوگا -

ترسیمی طریقہ --- اگر قوت کا پیمانہ انچ کو ص پونڈ ہو خطی کمان کھینچنے کے لیے صحیح قطبی فاصلہ ق = $\frac{\text{ق}}{\text{ص}}$ ، اور اگر خطی پیمانہ انچ کو ط انچ ہو تو اگر طَ (شکل ۱۸۵) خطی کمان یا دھکیل کے خط پر ایک نقطہ ہو تو

$$\text{مہ} = \text{طَن} \times \text{ص} \times \text{ط} \times \text{ق} \quad (\text{دفعہ ۵۸}) \quad \text{اور ا} = \text{ط} \times \text{گ ن}$$

$$\text{اس لیے (۳) سے} \qquad \text{ق} = \text{ص ق} = \frac{\int_{\text{آ}}^{\text{ے}} \frac{\text{طَن} \times \text{گ ن}}{} \,\text{فرس} \times \text{ص} \times \text{ق ط}^{2}}{\int_{\text{آ}}^{\text{ے}} \frac{\text{گ ن}^{2}}{} \,\text{فرس} \times \text{ط}^{2}}$$

صفحہ ۴۲۰

$$\text{اس لیے} \qquad 1 = \frac{\int_{\text{آ}}^{\text{ے}} \text{طَن} \times \text{گ ن} \;\text{فرس}}{\int_{\text{آ}}^{\text{ے}} \text{گ ن}^{2} \;\text{فرس}}$$

اگر خماؤ کے معیار مہ کا نقشہ کسی پیمانے پر کھینچا جائے اور معین طن حقیقی معینوں طَن کے ن گنے ہوں تو

$$\text{ن} = \frac{\int_{\text{آ}}^{\text{ے}} \text{طن} \times \text{گ ن} \;\text{فرس}}{\int_{\text{آ}}^{\text{ے}} \text{گ ن}^{2} . \text{فرس}}$$

خطی کمان کے حقیقی معین طَ ن حاصل کرنے کے لیے ط ن جیسے ہر معین کو نسبت ا : ن میں تحویل کرنا چاہیے یعنی $\frac{1}{\text{ن}}$ سے یعنی حسب ذیل نسبت سے ضرب دینا چاہیے:

$$\frac{\int \frac{\text{گ ن}^2}{\text{آے}}\,\text{فس}}{\int \frac{\text{طن} \times \text{گ ن}}{\text{آے}}\,.\,\text{فس}}$$

یہ نسبت کسی صورت کے لیے تقریباً معلوم ہو سکتی ہے یعنی اس طرح کہ منحنی کو متعدد مساوی طولوں میں تقسیم کر کے حاصل جمع لیں۔

مثال ا — ایک دائری کماندار پسلی کو جس کا نصف قطر فصل کے مساوی ہے دونوں سروں پر قبضے لگے ہیں اور فصل پر ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ و فی اکائی طول ہے۔ افقی دھکیل اور اعظم خماؤ کا معیار معلوم کرو۔ نیز اس مثال کو اس صورت کے لیے بھی حل کرو کہ پسلی کو سروں کے علاوہ چوٹی پر بھی قبضہ لگا ہوا ہو۔

شکل ۱۸۶ کمان کے مرکزی خط کو تعبیر کرتی ہے۔ اس میں

$$\text{ل} = \text{ر}$$

$$\text{جب عہ} = \frac{\text{ل}}{2\text{ر}} = \frac{1}{2}،\ \text{عہ} = \frac{\pi}{6}\ \text{یا}\ 30^\circ،\ \text{جم عہ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{فس} = \text{ر}\,.\,\text{فرطہ}،\ \text{ما} = \text{ع د} = \text{ر}\,(\text{جم طہ} - \text{جم عہ})$$

$$\text{لا} = \frac{\text{ل}}{2} - \text{ر جب طہ} = \text{ر}\left(\frac{1}{2} - \text{جب طہ}\right)$$

$$\text{مہ} = \frac{\text{و}}{2}\,\text{لا}\,(\text{ل} - \text{لا}) = \frac{\text{و ر}^2}{2}\left(\frac{1}{4} - \text{جب}^2\,\text{طہ}\right)$$

اس لیے (۴) سے

$$\text{ق} = \frac{\int_{\text{ط}=-\text{ع}}^{\text{ط}=\text{ع}} \text{مہ ما فرس}}{\int_{\text{ط}=-\text{ع}}^{\text{ط}=\text{ع}} \text{ما فرس}} = \frac{۲ \times \frac{\text{و}}{۲}\,\text{سہ}^{۴} \int_{۰}^{\text{ع}} \left(\frac{۱}{۴} - \text{جب}^{۲}\,\text{ط}\right)\left(\text{جم ط} - \text{جم ع}\right) \text{فرط}}{۲\,\text{سہ}^{۳} \int_{۰}^{\text{ع}} \left(\text{جم ط} - \text{جم ع}\right)^{۲} \text{فرط}}$$

$$= \frac{\text{و سہ}}{۴} \times \frac{\pi\sqrt{۳} - ۵}{۵\pi - ۹\sqrt{۳}} = ٫۹۲۳\ \text{و سہ}$$

صفحہ ۴۲۱

(۱) سے کسی جگہ خماؤ کا معیار

$$\text{مہ} = \frac{\text{و سہ}^{۲}}{۲}\left(\frac{۱}{۴} - \text{جب}^{۲}\,\text{ط}\right) - ٫۹۲۳\ \text{و سہ}^{۲}\left(\text{جم ط} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$\frac{\text{فرمہ}}{\text{فرط}} = \left(-\,\text{جب ط جم ط} + ٫۹۲۳\ \text{جب ط}\right)\text{و سہ}^{۲}$$

جو ط = ۰ اور جم ط = ٫۹۲۳ پر صفر ہوتا ہے۔ ان قیمتوں کو درج کرنے سے ط = ۰ پر، مہ = ٫۰۰۱۳۲ و سہ^۲ جو ایسا خماؤ کا معیار ہے جو چوٹی پر انحنا کو گھٹاتا ہے۔ جم ط = ٫۹۲۳ پر، مہ = − ٫۰۰۱۴۶ و سہ^۲ جو انحنا کو بڑھاتا ہے۔ اس خماؤ کے معیار کا محل ط = ۲۲٫۶°، جب ط = ٫۳۸۴، لا = ٫۱۱۶ ل ہے، یعنی سروں سے فصل کے ٫۱۱۶ پر واقع ہوتا ہے۔

اگر پسلی ا اور ب کے علاوہ ج پر بھی قبضہ دار ہو تو چونکہ ج پر خماؤ کا معیار صفر ہوگا اس لیے

$$\text{ق} \times \text{ج د} = \frac{۱}{۸}\,\text{و ل}^{۲} = \frac{۱}{۸}\,\text{و سہ}^{۲}$$

اور

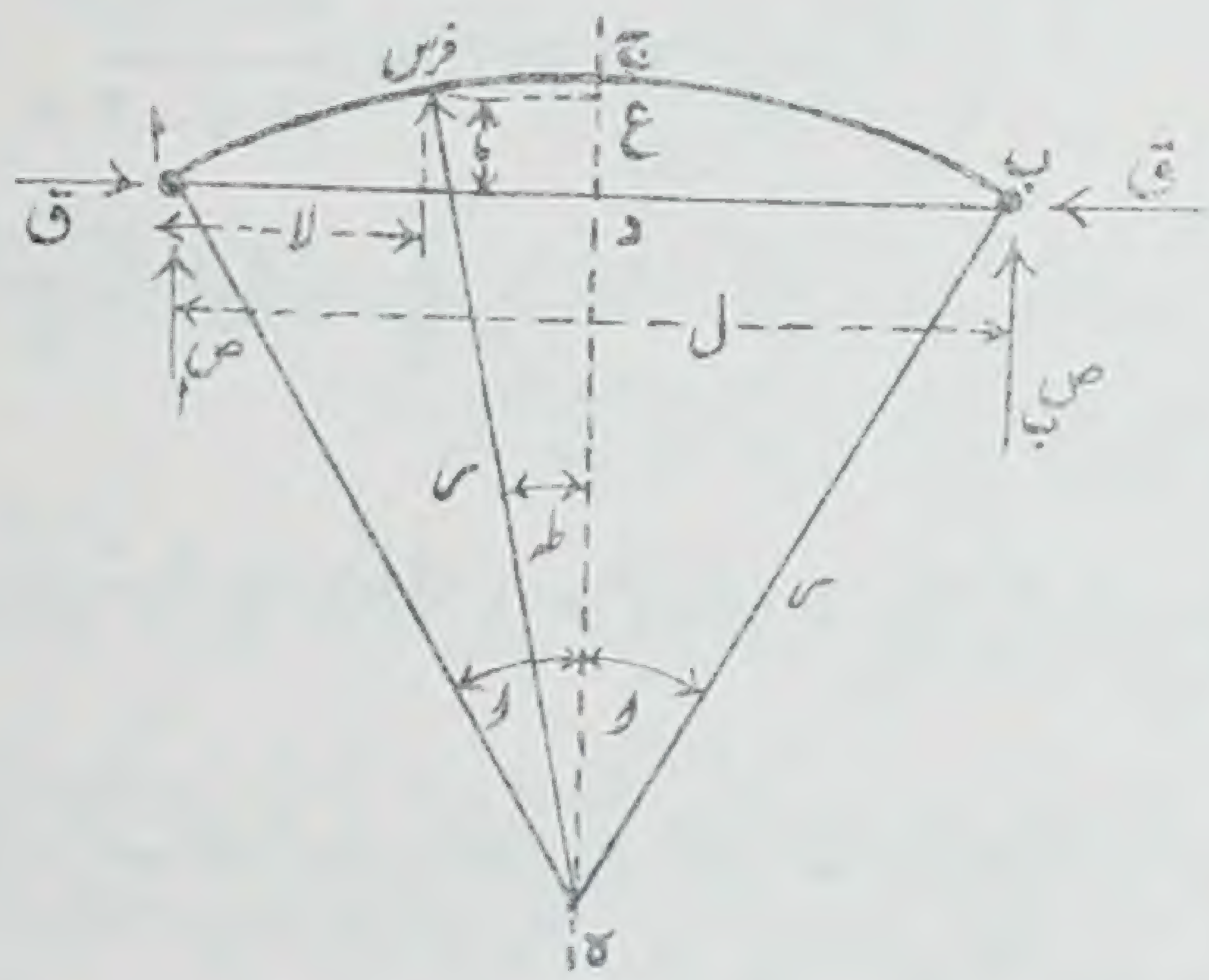
$$\text{ج د} = \text{سہ}\left(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$\therefore\ \text{ق} = \frac{٫۱۲۵\ \text{و سہ}}{٫۱۳۴} = ٫۹۳۴\ \text{و سہ}$$

اس لیے (۱) سے

$$\text{م} = \frac{\text{و ر}^{۲}}{۲}\left(\frac{۱}{۴} - \text{جب}^{۲}\,\text{ط}\right) - ۰٫۹۳۴\ \text{و ر}^{۲}\left(\text{جم ط} - \frac{\pi}{۲}\right)$$

$$\frac{\text{ف م}}{\text{ف ط}} = -\ \text{و ر}^{۲}\ \text{جب ط جم ط} + ۰٫۹۳۴\ \text{و ر}^{۲}\ \text{جب ط}$$



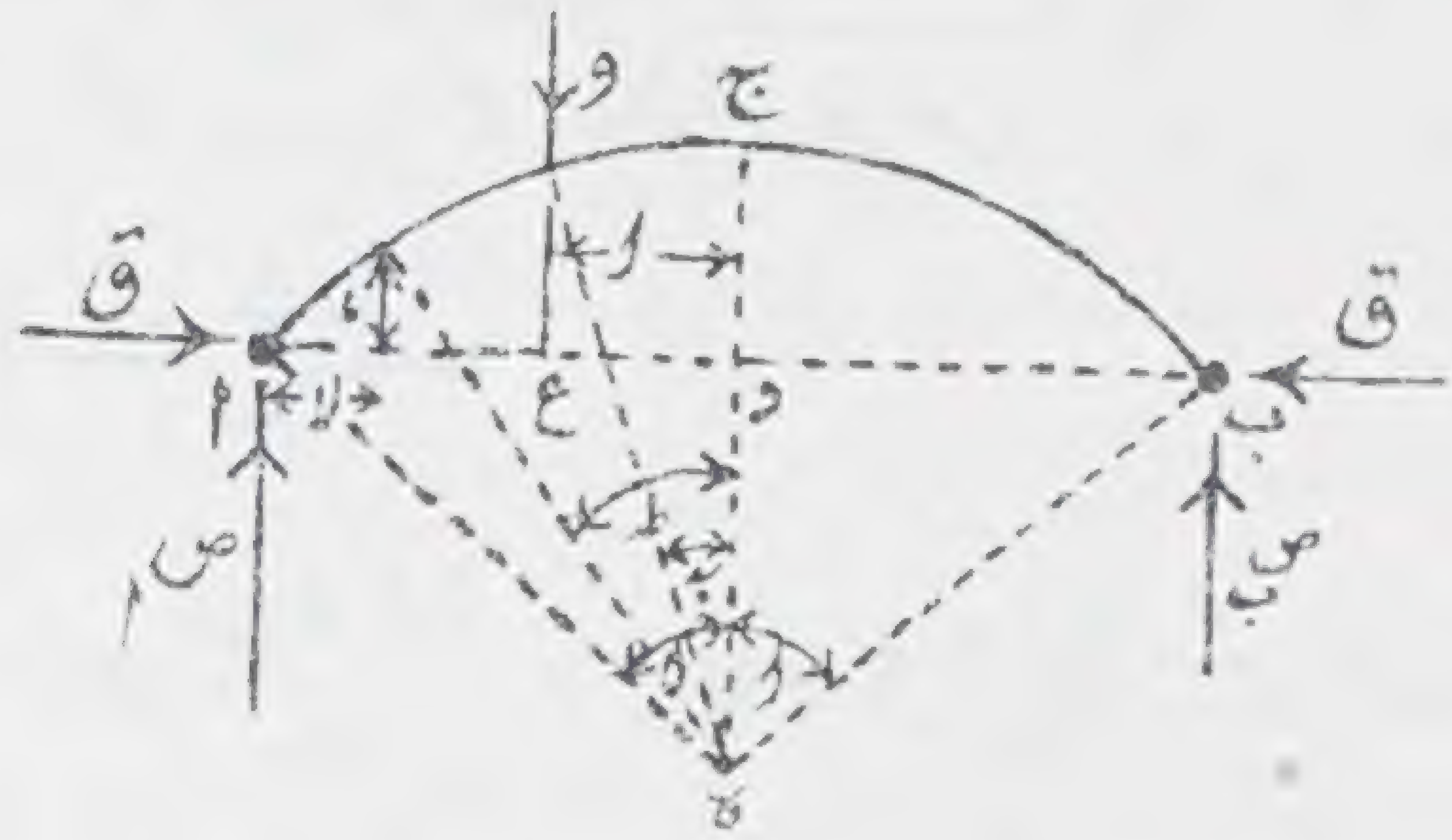
شکل ۱۸۶

جو ط = ۰ اور جم ط = ۰٫۹۳۴ پر صفر ہوتا ہے۔ دوسری قیمت سے اعظم خماؤ کے معیار کا نقطہ حاصل ہوتا ہے۔ اس کے لیے جب ط = ۰٫۳۵۷۳ اور م (اعظم)

$$= \frac{\text{و ر}^{۲}}{۲}\left(۰٫۲۵ - ۰٫۱۲۷۷\right) - ۰٫۹۳۴\ \text{و ر}^{۲} \times ۰٫۰۶۸ = -۰٫۰۰۲۴\ \text{و ر}^{۲}$$

یہ خماؤ کا معیار انحنا کو بڑھاتا ہے اور فصل کے مرکز سے افقاً ۰٫۳۵۷۳ ر فصل پر واقع ہوتا ہے۔ صفحہ ۴۴۲

مثال ۲۔ — ایک دائری کماندار پسلی جس کا فصل ل اور نصف قطر ر ہے ایک اکیلا بوجھ و فصل کے مرکز سے فاصلہ لا پر اٹھاتی ہے۔ افقی دھکیل معلوم کرو اگر پسلی (۱) چوٹی اور سروں پر (۲) صرف سروں پر قبضہ دار ہو۔



شکل ۱۸۷

شکل ۱۸۷ کی ترقیم کے ساتھ :—

$$جب\ عہ = \frac{ل}{۲\ سا}$$

$$جب\ بہ = \frac{ا}{سا}$$

$$ص_{ا} = \frac{ل + ۲ا}{۲ل}\ و$$

$$ص_{ب} = \frac{ل - ۲ا}{۲ل}\ و$$

$$ما = سا\ (جم\ طہ - جم\ عہ)\ ،\quad لا = \frac{ل}{۲} - سا\ جب\ طہ$$

$$ج\ د = سا\ (۱ - جم\ عہ)\ ،\quad فرس = سا.فرطہ$$

(۱) ج کے گرد ج ب پر کی قوتوں کا معیار لینے سے

$$ق \times سا\ (۱ - جم\ عہ) = \frac{ل}{۲}\ ص_{ب}$$

$$\text{ق} = \frac{\text{ل} - ۲\text{ا}}{۴\,\text{ہا}\,(\text{ا} - \text{جم عہ})} \times \text{و}$$

(۲) ا سے ع تک

$$\text{ہہ} = \frac{\text{ل} + ۲\text{ا}}{۲\text{ل}} \times \text{و لا} = \text{و}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{ہا جب طہ}\right)\frac{\text{ل} + ۲\text{ا}}{۲\text{ل}}$$

ع سے ب تک

$$\text{ہہ} = \frac{\text{ل} - ۲\text{ا}}{۲\text{ل}}\,\text{و}\,(\text{ل} - \text{لا}) = \text{و}\frac{\text{ل} + ۲\text{ا}}{۲\text{ل}}\left(\frac{\text{ل}}{۲} + \text{ہا جب طہ}\right)$$

$$\text{ق} = \frac{\int_{\text{طہ}=-\text{عہ}}^{\text{طہ}=\text{عہ}} \text{ہہ ما فرس}}{\int_{\text{طہ}=-\text{عہ}}^{\text{طہ}=\text{عہ}} \text{ہا}^{۲}\,\text{فرس}}$$

$$= \frac{\text{و}\frac{\text{ل}+۲\text{ا}}{۲\text{ل}}\int_{\text{ب}}^{\text{عہ}}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{ہا جب طہ}\right)(\text{جم طہ} - \text{جم عہ})\,\text{فرطہ} + \text{و}\frac{\text{ل}-۲\text{ا}}{۲\text{ل}}\int_{-\text{عہ}}^{\text{ب}}\left(\frac{\text{ل}}{۲} + \text{ہا جب طہ}\right)(\text{جم طہ} - \text{جم عہ})\,\text{فرطہ}}{\text{ہا}\int_{-\text{عہ}}^{\text{عہ}}(\text{جم طہ} - \text{جم عہ})^{۲}\,\text{فرطہ}}$$

اس کو آسانی سے معلوم کیا جاسکتا ہے - حدود عہ اور بہ اوپر دی ہوئی ہیں -

۱۴۱ - دو قبضی پسلی میں تنشی زور ــــ اگر کماندار پسلی کو آزادی ہوتی کہ کوئی وضع اختیار کرے تو تپش کے اضافے کے تحت وہ پھیلتی

صفحہ ۴۲۳

اور اپنی شکل برقرار رکھتی۔ لیکن اگر سرے ثابت پیل پایوں کو قبضہ کیے گئے ہوں تو فصل بڑھ نہیں سکتا اور اس طرح پسلی قبضوں کو باہر کی طرف دھکیلیگی اور قبضے پسلی کو مساوی اور مخالف دھکیل کے ساتھ اندر کی طرف دھکیلینگے۔ تپش کے گھٹنے سے تپش کے اضافے کی مخالف قوتیں پیدا ہونگی۔ دونوں صورتوں میں تپش کی تبدیلی سے جو افقی ردِ عمل پیدا ہونگے اُن سے پسلی پر راست دھکیل یا کھنیچ کے علاوہ ایک خماؤ کا معیار بھی پیدا ہوگا۔ فصل کی جو تبدیلی ان خماؤ کے معیاروں سے پیدا ہوگی وہ اور جو تپش کی تبدیلی سے پیدا ہوگی وہ ایک دوسرے کی تعدیل کر دینگے یعنی ان کا حاصل جمع صفر ہوگا۔

فرض کرو کہ طولی پھیلاؤ کی شرح ع ہے (دیکھو دفعہ ۳۹) اور پسلی کی تپش میں ت کا اضافہ ہوتا ہے۔ تب افقی پھیلاؤ جس کو قبضے روکتے ہیں حسب ذیل ہوگا

ع ت ل

جہاں ل فصل کا طول ہے۔ اس لیے اگر پسلی کی کسی تراش پر جس کا مرکز ہندسی قبضوں کو ملانے والے افقی خط سے بلندی ما پر ہو خماؤ کا معیار مر ہو اور فرس پسلی کے منحنی مرکزی خط کے طول کا ایک ٹکڑا ہو تو مساوات (۱) دفعہ ۱۳۴ سے

$$ع ت ل + \int \frac{مر}{\text{آ ے}} \, ما \, فرس = ۰ \qquad \text{............ (۱)}$$

اور چونکہ مر افقی دھکیل ق سے پیدا ہوتا ہے اس لیے

$$مر = - ق \, ما \qquad \text{..................... (۲)}$$

جو انحنا کو بڑھاتا ہے (دیکھو دفعہ ۱۳۹)۔ اس لیے

$$ع ت ل - ق \int \frac{ما^{۲}}{\text{آ ے}} \, فرس = ۰$$

یا

$$\text{ق} = \frac{\text{عہ ت ل}}{\int \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{آ ے}}\ \text{فرس}} \quad \text{...............................} (۳)$$

اور اگر آ اور ے مستقل ہوں تو یہ مساوات حسبِ ذیل ہوجاتی ہے :-

$$\text{ق} = \frac{\text{آ ے عہ ت ل}}{\int \text{ما}^{۲}\ \text{فرس}} \quad \text{...............................} (۴)$$

تکمل دونوں صورتوں میں پورے فصل پر کیا جائیگا۔

چونکہ کسی مقام پر خماؤ کا معیار - ق × ما مقدار ما کے متناسب ہے اس لیے قبضوں کے مرکزوں کو ملانے والے افقی خط سے پسلی کے مرکزی خط کے معین خماؤ کے معیار کے متناسب ہونگے اور اس طرح پسلی کے مرکزی خط سے ایک خماؤ کے معیار کا نقشہ حاصل ہوگا - تپش کے اثرات کے لیے قبضوں کو ملانے والا خطِ مستقیم دھکیل کا خط یعنی "خطی کمان" ہوگا - کسی تراش پر خماؤ کے زور اور راست دھکیل یا کھینچ سے پیدا ہونے والے زور علیحدہ محسوب کیے جاسکتے ہیں اور جمع کیے جاسکتے ہیں - ان میں خماؤ کے زور زیادہ اہم ہونگے - اگر سب سے اونچے نقطے یعنی چوٹی پر پسلی کا ارتفاع قبضوں سے ع ہو اور تراش کی
گہرائی گ ہو اور تراش مستقل ہو اور ایک مرکزی محور کے گرد تشاکل ہو تو تپش صفحہ ۴۲۳
کی تبدیلی سے اعظم خماؤ کا معیار

$$\text{ق} \times \text{ع} = \frac{\text{آ ے عہ ت ل ع}}{\int \text{ما}^{۲}\ \text{فرس}}$$

ہوگا اور اس تراش کے بیرونی کناروں پر خماؤ کے زور کی جو تبدیلی پیدا ہوگی وہ حسبِ ذیل ہوگی :-

$$\text{ز} = \frac{\text{ق ع}}{\text{آ}} \times \frac{\text{گ}}{۲} = \frac{\text{ے عہ ت ل ع گ}}{۲\int \text{ا}\,\text{آ فرس}} \qquad \text{..........} (۵)$$

مثال ــــ ایک دائری کماندار پسلی کو جس کا نصف قطر فصل کے مساوی ہے دونوں سروں پر قبضہ کیا گیا ہے ۔ پھیلاؤ کی شرح ۰۰۰۰۰۶۲ء فی درجہ فارن ہیٹ ہو تو تپش کے ۵۰° ف اضافے سے پیدا ہونے والا افقی دھکیل معلوم کرو ۔ اگر پسلی کی گہرائی فصل کی $\frac{۱}{۴۸}$ ہو اور ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ تو خماؤ کے زوروں کی انتہائی تبدیلی معلوم کرو۔

مثال ا دفعہ ۱۴۰ اور شکل ۱۸۶ کی طرح

$$\text{ل} = \text{س}،\ \text{جب عہ} = \frac{۱}{۲}،\ \text{عہ} = \frac{\pi}{۶}،\ \text{جم عہ} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}،$$

$$\text{فرس} = -\,\text{س فرطہ}،\ \text{ا} = \text{س}\left(\text{جم طہ} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$\int_{\text{طہ}=\text{عہ}}^{\text{طہ}=-\text{عہ}} \text{ا}^۲\,\text{فرس} = ۲\int_{۰}^{\text{عہ}} \text{س}^۳\left(\text{جم}^۲\text{طہ} - \sqrt{۳}\ \text{جم طہ} + \frac{۳}{۴}\right)\text{فرطہ}$$

$$= \text{س}^۳ \times \frac{۵\pi - ۹\sqrt{۳}}{۱۲}$$

$$= ۰۰۹۹۶\text{ء}\ \text{س}^۳$$

اس لیے (۴) سے اُفقی دھکیل

$$\text{ق} = \frac{\text{آ ے عہ ت س}}{۰۰۹۶\text{ء}\ \text{س}^۳} = \frac{۵۰ \times ۰۰۰۰۰۶۲\text{ء}\ \text{آ}^۲\,\text{ے}}{۰۰۹۹۶\text{ء}\ \text{س}^۲}$$

$$= ۰۳۱۱۲\text{ء}\ \frac{\text{آ}^۲\,\text{ے}}{\text{س}^۲}$$

$$\text{چوٹی پر خماؤ کا معیار} = -\,\text{ق س}\left(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$= -\ ٫۰۳۱۱۲ \times ٫۱۳۴۴ \ \frac{آ^{۲}ے}{ر}$$

$$= -\ ٫۰۰۴۱۷ \ \frac{آ^{۲}ے}{ر}$$

اس لیے خماؤ کے زور کی انتہائی تبدیلی

$$= ٫۰۰۴۱۷ \ \frac{آ^{۲}ے}{ر} \times \frac{ر}{۸۰\ آ^{۲}} = ٫۰۰۰۰۵۲۱ \times ۱۳۰۰۰$$

= ٫۶۷۷ ٹن فی مربع انچ

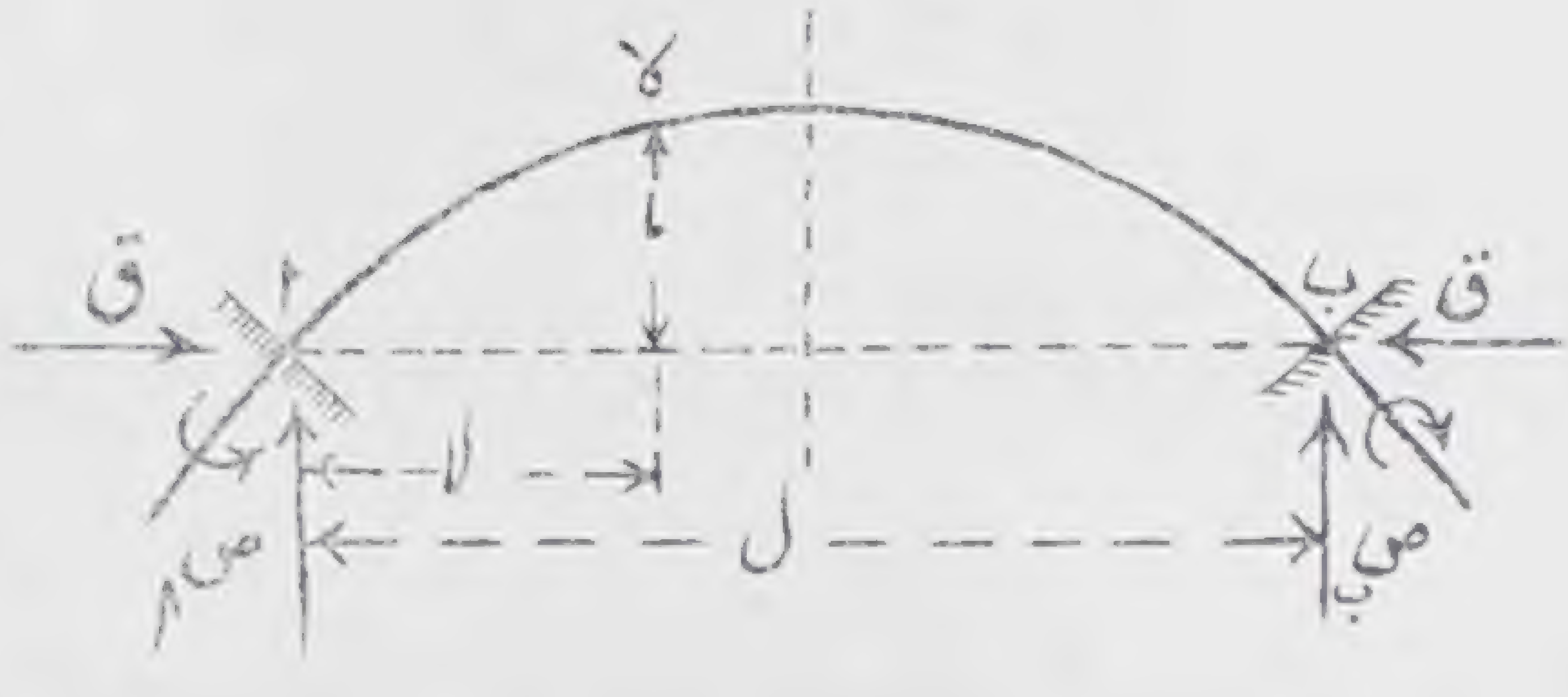
۱۴۲ ـ کماندار پسلی سروں پر ثابت ـــ دونوں

سروں پر ثابت یعنی سمت کے لحاظ سے مقید کماندار پسلی کو دونوں سروں پر قبضہ دار پسلی کے ساتھ تقریباً وہی نسبت ہے جو سیدھے دربستہ شہتیر کو سادہ سہارے دار شہتیر کے ساتھ ہے۔ باب ۷ کے اصول دربستہ کماندار پسلی پر صادق آئینگے۔ اس طرح کی پسلی کی کسی تراش لا پر (شکل ۱۸۸) خماؤ کا معیار معلوم کرنے کے لیے دربستہ سروں پر عمل کرنے والے تثبیت کے جفت اور افقی دھکیل معلوم کرنا ضروری ہے۔ افقی دھکیل صفحہ ۴۲۵
کی رعایت سے دفعات ۸۵ تا ۸۸ کے مطابق ہم یہ لکھ سکتے ہیں :-

$$م = مہ + م_{ا} + (م_{ب} - م_{ا})\frac{لا}{ل} - ق\ ما \quad ......(۱)$$

جہاں مہ ایک سیدھے اُفقی آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر پر خماؤ کا معیار ہے جس پر یہی انتصابی بوجھ ہوں، $م_{ا}$ اور $م_{ب}$ علی الترتیب سروں ا اور ب پر تثبیت کے جفت ہیں، ق مستقل اُفقی دھکیل ہے، اور ما پسلی کی بلندی لا پر سہاروں ا اور ب سے ہے۔ اگر خماؤ کے معیاروں کو دفعہ ۱۳۹ کے مطابق اُس وقت مثبت سمجھا جائے جب کہ وہ اوپر وار

تحدب کو گھٹائیں تو مثبتیت کے جفت $\text{م}_{\text{ا}}$ اور $\text{م}_{\text{ب}}$ عموماً منفی ہونگے بجائے مثبت ہونے کے جیسا کہ باب ۷ میں تھے کیونکہ وہاں علامتوں کی قرار داد اس کے برعکس تھی ۔



شکل ۱۸۸

یہ تین نامعلوم مقداریں $\text{م}_{\text{ا}}$، $\text{م}_{\text{ب}}$ اور ق ذیل کی تین شرائط سے حاصل ہو سکتی ہیں :۔

(۱) اس مفروضے کی رُو سے کہ ا اور ب ثابت رہتے ہیں مساوات (۱) دفعہ ۱۳۴ سے دفعہ ۱۴۰ کی طرح حسبِ ذیل مساوات حاصل ہوگی :۔

$$\int \frac{\text{م}\ \text{یا}}{\text{آ}\ \text{ئے}}\,\text{فرس} = \int \frac{\text{مہ}\ \text{یا}}{\text{آ}\ \text{ئے}}\,\text{فرس} + \text{م}_{\text{ا}} \int \frac{\text{یا}\ \text{فرس}}{\text{آ}\ \text{ئے}} + \frac{\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ا}}}{\text{ل}} \int \frac{\text{لا}\ \text{یا}\ \text{فرس}}{\text{آ}\ \text{ئے}}$$

$$- \text{ق} \int \frac{\text{یا}^{2}}{\text{آ}\ \text{ئے}}\,\text{فرس} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

جس میں تکمل سلی کے منحنی مرکزی خط کے پورے طول پر لیے گئے ہیں ۔ اگر آ اور ئے مستقل ہوں تو ان کو ہر ایک رقم سے حذف کر دیا جا سکتا ہے ۔

(۲) دفعات ۷۸ اور ۸۰ کی رُو سے اس مفروضے سے کہ سرے مضبوط ثابت ہوں تو کمان کے پورے طول پر مجموعی خماؤ یعنی اصلی سمت سے تبدیلی صفر

ہوگی، حسبِ ذیل مساوات حاصل ہوگی :—

$$\int \frac{\text{م}}{\text{آ ے}}\,\text{فرس} = \int \frac{\text{مہ}}{\text{آ ے}}\,\text{فرس} + \text{م}_{\text{ا}} \int \frac{\text{فرس}}{\text{آ ے}} + \frac{\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ا}}}{\text{ل}} \int \frac{\text{لا فرس}}{\text{آ ے}}$$

$$- \text{ق} \int \frac{\text{ما فرس}}{\text{آ ے}} = \text{۰} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۳})$$

جس میں تکمل منحنی کے پورے طول پر لیے جائینگے اور آ ے مستقل ہو تو حذف کر دیا جائیگا۔

(۳) اگر سرے ا اور ب ایک ہی سطح پر رہیں تو دفعات ۸۷ اور ۸۸ کی طرح

$$\int \frac{\text{م لا}}{\text{آ ے}}\,\text{فرس} = \int \frac{\text{مہ لا}}{\text{آ ے}}\,\text{فرس} + \text{م}_{\text{ا}} \int \frac{\text{لا فرس}}{\text{آ ے}} + \frac{\text{م}_{\text{ب}} - \text{م}_{\text{ا}}}{\text{ل}} \int \frac{\text{لا}^2\,\text{فرس}}{\text{آ ے}}$$

$$- \text{ق} \int \frac{\text{لا ما}}{\text{آ ے}}\,\text{فرس} = \text{۰} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۴})$$

جس میں تکمل ا اور ب کے درمیان منحنی کے پورے طول پر لیے جائینگے اور آ ے صفحہ ۴۲۶
مستقل ہو تو حذف کر دیا جائیگا۔

یہ تین مساواتیں (۲)، (۳) اور (۴) تینوں نامعلوم مقداروں م ا، م ب اور ق کو دریافت کرنے کے لیے کافی ہیں۔ اگر تکملوں کے اندر واقع ہونے والے تمام متغیر ایک واحد متغیر کی رقوم میں بیان ہو سکیں تو تکمل کے معمولی طریقے اختیار کیے جا سکتے ہیں۔ ورنہ کمان اب کو چھوٹے چھوٹے طولوں فرس میں تقسیم کر کے حاصل جمع لینے کا کوئی تقریبی طریقہ یا دفعہ ۸۸ کے جیسے ترسیمی طریقے اختیار کیے جا سکتے ہیں۔

متشاکل لداؤ کی صورت میں م ا = م ب اور مساوات (۴) غیر ضروری ہو جاتی ہے۔ اِس صورت میں مساواتیں (۲) اور (۳) حسبِ ذیل ہو جائینگی :—

$$\int \frac{\text{م ما}}{\text{آ ے}}\,\text{فرس} + \text{م}_1 \int \frac{\text{ما فرس}}{\text{آ ے}} - \text{ق} \int \frac{\text{ما}^2\,\text{فرس}}{\text{آ ے}} = ۰ \quad \cdots\cdots (۵)$$

$$\int \frac{\text{م}}{\text{آ ے}}\,\text{فرس} + \text{م}_1 \int \frac{\text{فرس}}{\text{آ ے}} - \text{ق} \int \frac{\text{ما فرس}}{\text{آ ے}} = ۰ \quad \cdots\cdots (۶)$$

جو اور زیادہ آسان ہو جاتی ہیں اگر آ اور ے مستقل ہوں۔

ایک متبادل تدبیر یہ ہوگی کہ کسی اور تین مقداروں مثلاً ق، ص اور م_1 کو نامعلوم مقداریں لیا جائے۔ یہاں بھی متشاکل لداؤ کی صورت میں نامعلوم مقداریں دو رہ جائینگی کیونکہ ص_1 بوجھ کے نصف کے مساوی ہوگا۔

۱۴۳ - ثابت پسلی میں تپشی زور

دفعہ ۱۴۱ کی ترمیم کے ساتھ سمت اب میں (شکل ۱۸۸) جس میں پھیلاؤ روک دیا گیا ہے دو قبضی پسلی کی طرح :-

$$\int \frac{\text{م ما}}{\text{آ ے}}\,\text{فرس} + \text{ع ت ل} = ۰ \quad \cdots\cdots (۱)$$

نیز (۳) دفعہ ۱۴۲ کی طرح

$$\int \frac{\text{م فرس}}{\text{آ ے}} = ۰ \quad \cdots\cdots (۲)$$

اور (۴) دفعہ ۱۴۲ کی طرح

$$\int \frac{\text{م لا}}{\text{آ ے}} = ۰ \quad \cdots\cdots (۳)$$

فرض کرو کہ تپش کی ت درجے کی تبدیلی سے دونوں سروں پر اُفقی اور انتصابی دھکیل ق اور ص ہیں (ص دونوں سروں پر مساوی اور مخالف ہوگا) اور فرض کرو کہ تپش کی تبدیلی کی وجہ سے سہاروں پر تثبیت کا جفت م_1 پیدا ہوتا ہے۔ تب

$$\text{م} = \text{م}_1 + \text{ص} \times \text{لا} - \text{ق} \times \text{ما} \quad \cdots\cdots (۴)$$

م کی اس قیمت کو اوپر کی تین مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) میں درج کرنے سے م، ص، اور ق کو معلوم کرنے کی ضروری مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ پھر پسلی میں کسی جگہ کا خماؤ کا معیار (۴) سے حاصل ہوگا۔

اگر پسلی فصل کے وسط میں سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد متشاکل ہو تو ص صفر ہوگا اور دونوں مساواتیں (۲) اور (۳) ایک ہو جاتی ہیں اور مساوات (۴) حسبِ ذیل ہو جاتی ہے :-

م = م۱ - ق ا .... (۵)

جس کو (۱) اور (۲) میں درج کرنے سے

م۱ ∫ ا/آ ے فرس - ق ∫ ا۲/آ ے فرس + ع ت ل = ۰ ...... (۶)

اور

م۱ ∫ فرس/آ ے - ق ∫ ا/آ ے فرس = ۰ ...... (۷)

صفحہ ۴۲۷

جن سے م۱ اور ق معلوم ہو سکتے ہیں۔

"دھکیل کا خط" اس صورت میں ایک مستقیم اُفقی خط ہے جس کا فاصلہ اب کے اوپر (شکل ۱۸۸) حسبِ ذیل ہے :-

م۱ / ق

غیر متشاکل پسلی کی صورت میں جو کہ بہت شاذ ہے دھکیل کا خط اب سے مائل ہوگا اور ا سے فاصلہ م۱/ت اور ب سے فاصلہ مب/ت پر سے گزریگا جہاں ت دھکیل ہے جس کے اجزائے ترکیبی ق اور ص ہیں اور مب سرے ب کا تثبیت کا معیار یعنی م۱ + ص × ل ہے۔

مثال ـــ دفعہ ۱۴۱ کے آخر کے مسئلے کو اس صورت کے لیے حل کرو کہ کماندار پسلی دونوں سروں پر سمت میں استوارانہ ثابت ہو۔ نیز صفر خماؤ کے معیار کے نقاط معلوم کرو۔

اِس صورت میں :-

$$\int_{\text{ط}=-\frac{\pi}{6}}^{\text{ط}=\frac{\pi}{6}} \text{ا فرس} = ۲\,\text{ر}^۲ \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left(\text{جم ط} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) \text{فرط} = \text{ر}^۲\left(۱ - \frac{\pi\sqrt{۳}}{۶}\right) = ۰٫۰۹۳۱\,\text{ر}^۲$$

$$\int_{\text{ط}=-\frac{\pi}{6}}^{\text{ط}=\frac{\pi}{6}} \text{ا}^۲\,\text{فرس} = ۰٫۰۰۹۹۶\,\text{ر}^۳ \quad (\text{دیکھو دفعہ ۱۴۱})$$

$$\int_{\text{ط}=-\frac{\pi}{6}}^{\text{ط}=\frac{\pi}{6}} \text{فرس} = \frac{\pi}{۳}\,\text{ر} = ۱٫۰۴۷۲\,\text{ر}$$

ان قیمتوں کو (۶) اور (۷) میں درج کرنے سے

$$۰٫۰۹۳۱\,\text{م}_۱ \times \text{ر}^۲ - ۰٫۰۰۹۹۶\,\text{ر}^۳\,\text{ق} + ۰٫۰۰۰۳۱\,\text{آے ر} = ۰$$

یا

$$۱٫۰۴۷۲\,\text{م}_۱ \times \text{ر} - ۰٫۰۹۳۱۰\,\text{ر}^۲\,\text{ق} = ۰$$

یا

$$\text{م}_۱ = \frac{۰٫۰۹۳۱۰}{۱٫۰۴۷۲}\,\text{ق ر} = ۰٫۰۸۸۹۰\,\text{ق ر}$$

اس لیے

$$\text{ق} = ۱٫۸۴۵\,\frac{\text{آے}}{\text{ر}^۲}$$

$$\text{م}_۱ = ۰٫۱۶۴\,\frac{\text{آے}}{\text{ر}}$$

چوٹی پر (شکل ۱۸۶) $\text{ا} = \left(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\text{ر} = ۰٫۱۳۴\,\text{ر}$

اور مج = ۰٫۱۶۴ آمے/سا − ۱٫۸۴۵ × ۰٫۱۳۴ آمے/سا = − ۰٫۰۸۳ آمے/سا

اعظم خماؤ کا معیار م۲ ہے اور سہاروں پر ہے اور ان تراشوں پر خماؤ کے زور کی انتہائی تبدیلی صفحہ ۴۲۸

ز = (م۲ × گ) / آ۲ = (۰٫۱۶۴ آمے) / (۲ سا آ) × سا/۴۰ = ۰٫۰۰۰۲۰۵ × ۱۳۰۰۰

= ۲٫۶۶۵ ٹن فی مربع انچ

جو دفعہ ۱۴۱ کی قبضہ دار کمان سے تقریباً ۴ گنا ہے۔

صفر خماؤ کے معیار کے نقاط اُس جگہ واقع ہوتے ہیں جہاں ق ما = م۱

یعنی ما = م۱/ق = ۰٫۸۸۹ سا = سا (جم طہ − ۳ط/۲)

جم طہ = ۳ط/۲ + ۰٫۸۸۹ = ۰٫۹۵۴۹

طہ = ۱۷٫۳°

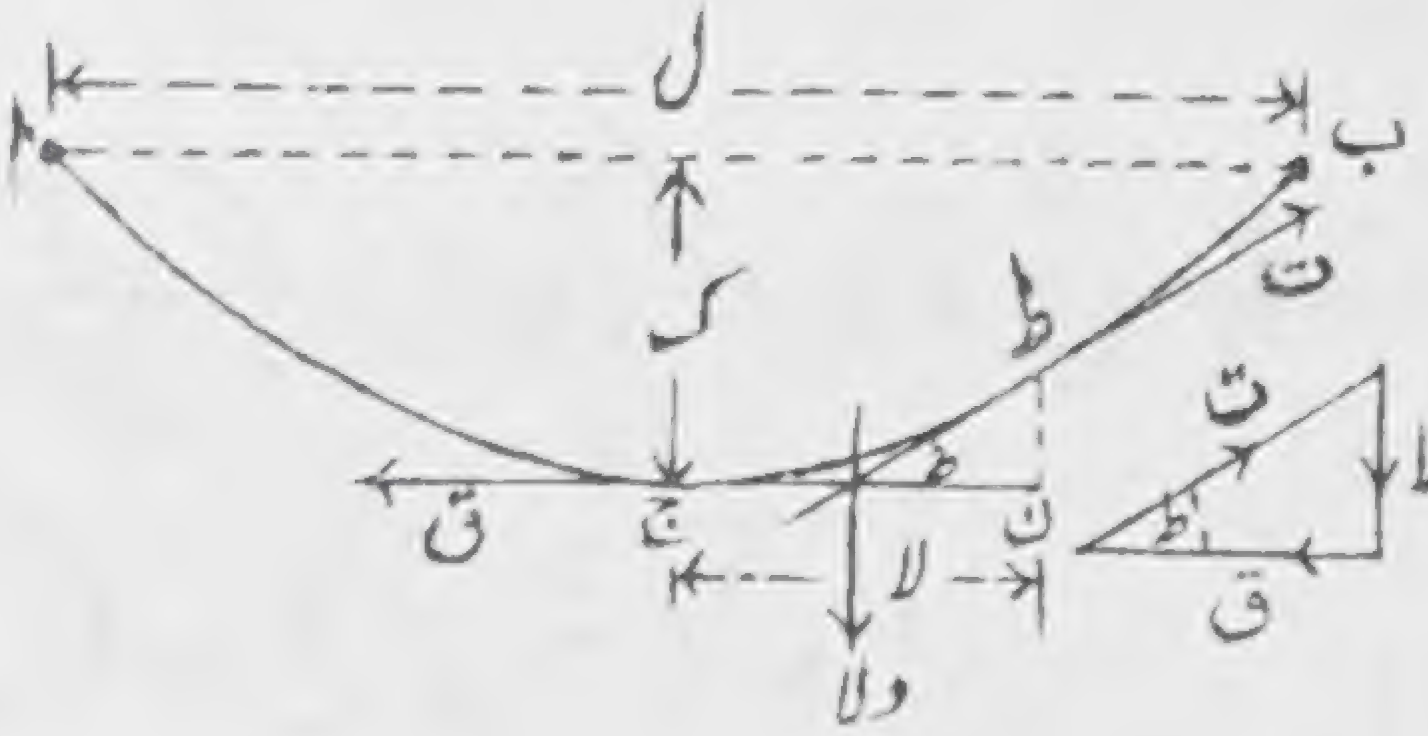
سہارے سے فاصلہ = لا = سا (½ − جب طہ) = ۰٫۲۰۲۶ سا یا فصل کا ۰٫۲۰۲۶ -

۱۴۴ - معلق تار اور زنجیریں ـــــ انتصابی بوجھوں

کے حامل معلق تار یا زنجیر کا مسئلہ کمان دار پسلی کے بہت مماثل ہے۔ نیز یہ ایک بہت لمبی بندھن سلاخ کی انتہائی صورت کے بھی مماثل ہے جس پر جانبی بوجھ ہوں۔ ہم طول کو اتنا بڑا فرض کرینگے کہ خماؤ کی اُستواری معدوم ہوگی اور بوجھ صرف معلق تار کے تناؤ سے سہارے جائینگے۔ تمام صورتوں میں تناؤ کا اُفقی جزوِ ترکیبی لازماً مستقل ہوگا۔ مرتکز بوجھ پر تناؤ کا انتصابی جزوِ ترکیبی اس بوجھ کے بقدر تبدیل ہوگا۔ ایک زنجیر دیئے ہوئے نقاط سے لٹک رہی ہو اور دیئے ہوئے

مقامات پر متفرق بوجھ اُٹھائے ہو تو اس کی شکل اور تناؤ معلوم کرنے کے مسئلے سے سکونیات کے ابتدائی اصولوں سے ترسیمی یا تحلیلی طور پر بحث کی جا سکتی ہے۔ اگر لداؤ مسلسل ہو اور زنجیر یا فصل کے طول کے تفاعل کے طور پر آسانی سے بیان ہو سکے تو تحلیلی حل سب میں آسان ہوگا۔

۱۴۵ - یکساں منقسم بوجھ ـــــ اگر بوجھ فصل پر یکساں پھیلا ہوا ہو (جو صورت کہ چند معلق پُلوں کی طنابوں میں اور تار برقی اور ٹرالی کے تاروں میں پائی جاتی ہے جو خوب تنے ہوئے ہوں اور جن پر صرف ان کا ذاتی وزن عمل کرے) تو تار جس منحنی کی شکل میں لٹکتا ہے وہ مکافی ہوتا ہے۔



شکل ۱۸۹

فرض کرو کہ بوجھ اُفقی فصل کے فی اکائی طول و ہے، کسی نقطہ ط پر تناؤ ت ہے (شکل ۱۸۹) اور تناؤ کا مستقل افقی جزوِ ترکیبی ق ہے۔ مبداء سب میں نچلے نقطے ج پر لو اور محاور لا اور ما علی الترتیب افقی اور انتصابی ہو۔ تب تار یا زنجیر کا طول ج ط تین قوتوں کے تحت تعادل میں ہوگا یعنی ت، ق اور اس کا وزن ولا جہاں لا = ج ن جو ج ط کا اُفقی ظل ہے۔ تب قوتوں کے مثلث سے یا ط کے گرد معیار لینے سے

$$\frac{\text{ق}}{\text{ولا}} = \frac{\text{لا}}{\text{۲ما}} \quad \text{یا} \quad \text{ما} = \frac{\text{ولا}^2}{\text{۲ق}} \quad \dots\dots\dots\dots (۱)$$

جو ایک مکافی کی مساوات ہے جس کا راس مبداء ج پر ہے۔

نیز ـــــ

$$\text{ق} = \frac{\text{و لا}^2}{\text{۲ ہا}} = \frac{\text{و ل}^2}{\text{۸ ک}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

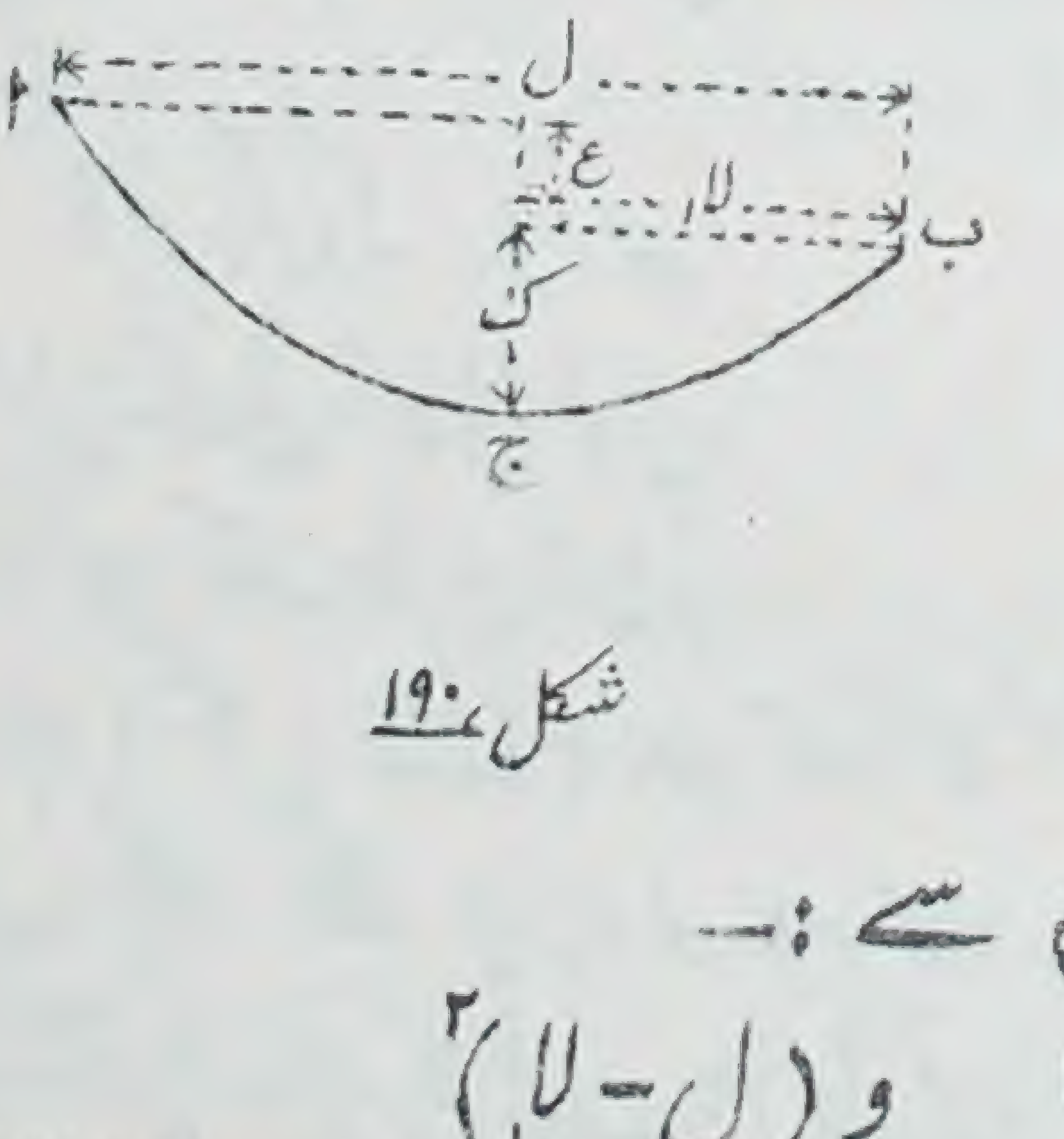
جہاں ل فصل اب ہے اور ک مجموعی جھوک ہے۔ کسی نقطے پر تناؤ

$$\text{ت} = \sqrt{\text{ق}^2 + \text{و}^2\,\text{لا}^2} \quad \ldots\ldots (۳)$$

جو نقاط ا اور ب پر حسبِ ذیل قیمت اختیار کرتا ہے

$$\text{ت} = \sqrt{\text{ق}^2 + \frac{\text{و}^2\,\text{ل}^2}{۴}} = \frac{\text{و ل}^2}{\text{۸ ک}}\sqrt{۱ + \frac{\text{۱۶ ک}^2}{\text{ل}^2}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

جو اگر $\frac{\text{ک}}{\text{ل}}$ ایک چھوٹی کسر ہو تو ق سے زیادہ مختلف نہیں ہوتا۔ اگر نقاطِ تعلیق ایک سطح میں نہ ہوں اور ان کے لیول کا فرق ع ہو (شکل ۱۹۰) اور مکانی سے کے راس کا فاصلہ نچلے سہارے ب سے لا_1 ہو اور جھوک اس سہارے سے ک ہو تو (۱) سے :-



شکل ۱۹۰

$$\text{ق} = \frac{\text{و لا}^2}{\text{۲ ہا}} = \frac{\text{و لا}_1^2}{\text{۲ ک}} = \frac{\text{و}\,(\text{ل} - \text{لا}_1)^2}{۲\,(\text{ک} + \text{ع})} \quad \ldots\ldots (۵)$$

جس سے لا_1 کو ک، ل، اور ع کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں۔ تار میں تنشی زور کی حدت

$$\text{ف} = \frac{\text{ت}}{\text{س}}$$

ہوگی جہاں س تار کا تراشی رقبہ ہے اور اگر ت کے خفیف تغیر کو

نظر انداز کر دیا جائے تو

$$\text{ف} = \frac{\text{ق}}{\text{ما}} = \frac{\text{و}\,\text{ل}^2}{8\,\text{ما}\,\text{ک}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

دیکھو اگر ایک معلق تار پر صرف اس کے ذاتی وزن کا بوجھ ہو تو ف تراشی رقبے ما پر منحصر نہیں ہوگا کیونکہ و اس صورت میں ما کے تناسب ہوگا - نیز یہ کہ اگر و پونڈ فی طولی فٹ میں ہو اور ل اور ک فٹوں میں ہوں تو ف پونڈ فی مربع انچ میں ہوگا اگر ما مربع انچوں میں ہو -

صفحہ ۲۴۳

اس طرح کی سپاٹ مکانی قوس کا طول مبداء سے تقریباً[1]

$$\text{لا} + \frac{2}{3}\,\frac{\text{ما}^2}{\text{لا}}$$

ہوتا ہے - اس طرح تار کا مجموعی طول س حسبِ ذیل ہوگا :-

$$\text{س} = \text{ل} + \frac{8}{3}\,\frac{\text{ک}^2}{\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

تپش کی تبدیلی کا اثر اس طرح کے معلق تار کے طول پر دو طرح سے ہوگا - طولی سکڑاؤ یا پھیلاؤ سے جھوک میں تبدیلی ہوگی - جھوک کی تبدیلی سے تناؤ میں تبدیلی ہوگی لیکن ساتھ ہی تناؤ کی تبدیلی کی وجہ

---

[1] اگر $\text{ما} = \text{ج}\,\text{لا}^2$ تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 2\,\text{ج}\,\text{لا}$

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2} = \text{تقریباً}\ 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 \quad \text{اگر}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\ \text{چھوٹا ہو}$$

$$\text{فرس} = (1 + 2\,\text{ج}^2\,\text{لا}^2)\ \text{فرلا}$$

$$\text{س} = \text{لا} + \frac{2}{3}\,\text{ج}^2\,\text{لا}^3 = \text{لا} + \frac{2}{3}\,\frac{\text{ما}^2}{\text{لا}}$$

سے طول میں ایک تبدیلی لچک کی وجہ سے تپش کے اثرات سے علیحدہ ہوگی - اس طرح تپش کی تبدیلی سے جھوک اور تناؤ میں جو تبدیلی پیدا ہوگی وہ تپش کی تبدیلی، طولی پھیلاؤ کی شرح اور شے کے لچک کے خواص ان سب حالات پر منحصر ہوگی :-

فرض کرو کہ تار کا ابتدائی طول $س_۱$، ابتدائی جھوک $ک_۱$، تنشی زور کی ابتدائی حدت $ف_۱$، تپش کا اضافہ ت، طولی پھیلاؤ کی شرح ع، وزن فی اکائی طول و، تراشش کا رقبہ ر، اور شے کا راست یا کھنچاؤ کا لچک کا مقیاس ے ہے۔ تب وزن فی اکائی حجم $\frac{و}{ر}$ ہوگا اور

$$س_۱ = ل + \frac{۸}{۳}\frac{ک_۱^۲}{ل} \text{،} \quad ف_۱ = \frac{و ل^۲}{۸ ر ک_۱}$$

تپش کی تبدیلی کے بعد

$$س = س_۱\left(۱ + ع ت + \frac{ف - ف_۱}{ے}\right) = ل + \frac{۸}{۳}\frac{ک^۲}{ل} \quad \ldots\ldots (۸)$$

اور (۶) سے ف کی قیمت درج کرنے سے

$$س_۱\left\{۱ + ع ت + \frac{۱}{ے}\left(\frac{و ل^۲}{۸ ر ک} - ف_۱\right)\right\} = ل + \frac{۸}{۳}\frac{ک^۲}{ل} \quad \ldots (۹)$$

اگر $ک_۱$، ل، و، ر، اور ے معلوم ہوں تو $س_۱$ اور $ف_۱$ (۷) اور (۶) سے معلوم ہونگے اور (۹) ک میں ایک کعبی مساوات ہوگی - اور ک معلوم ہو جائے تو اس سے ف مساوات (۶) کے ذریعے معلوم ہوگا - (۹) میں $س_۱$ اور $ف_۱$ کی قیمت درج کرکے $س_۱$ سے تقسیم کرنے سے

$$1 + \text{ع} \,\text{ت} + \frac{\text{و} \,\text{ل}^2}{8 \,\text{سے}\, \text{س}} \times \frac{\text{ک}_2 - \text{ک}_1}{\text{ک}_1 \text{ک}_2} = 1 + \frac{8}{3} \frac{\text{ک}_2^2 - \text{ک}_1^2}{\text{ل}^2} \quad (\text{تقریباً}) \ldots\ldots (10)$$

$$\text{یا}\ (\text{ک}_2 - \text{ک}_1)\left\{\frac{\text{و} \,\text{ل}^2}{8 \,\text{س}\,\text{سے}\, \text{ک}_1 \text{ک}_2} + \frac{8}{3} \frac{\text{ک}_2 + \text{ک}_1}{\text{ل}^2}\right\} - \text{ع} \,\text{ت} = 0 \ldots (11)$$

جوک کی کبھی مساوات ابتدائی جھوک، فصل، تپش کی تبدیلی، اور شے کے مستقلوں کی رقوم میں ہے۔ تپش کی وہ تبدیلی جو جھوک یا تناؤ میں کوئی مختص تبدیلی پیدا کرے مساوات (۱۰) سے آسانی سے محسوب ہو سکتی ہے۔ بہت سی صورتوں میں جن میں معلق تار بہت تنا ہوا نہ ہو کرۂ ہوائی کی تپشی تبدیلیوں سے جھوک کی تبدیلی تقریباً تمام تر راست تپشی تطول ع ت کی وجہ سے ہوتی ہے اور مساوات (۱۰) کی دائیں جانب کی تیسری رقم نظر انداز کی جا سکتی ہے اور مساوات حسب ذیل ہو جاتی ہے:-

$$\text{ک}_2^2 = \text{ک}_1^2 + \frac{3}{8} \,\text{ع} \,\text{ت} \,\text{ل}^2$$

$$\text{ک}_2 = \sqrt{\text{ک}_1^2 + \frac{3}{8} \,\text{ع} \,\text{ت} \,\text{ل}^2}$$

مثال ۱ — ایک فولادی تار میں ۱۰۰ فٹ کے فصل میں جھوک ۳ فٹ ہے۔ تپش کے ۵۰° اتار سے جھوک اور تناؤ کی تبدیلی معلوم کرو۔ فولاد کا وزن ۴۸۰ پونڈ فی مکعب فٹ۔ پھیلاؤ کی شرح ۶۲×۱۰^{-۷} ہے $= ۳۰ \times ۱۰^{۶}$ پونڈ فی مربع انچ۔

تار کا طول $\text{س}_1 = ۱۰۰ + \frac{۸}{۳} \times \frac{۹}{۱۰۰} = ۱۰۰٫۲۴$ فٹ

تپش کے اتار سے سکڑاؤ، لچک کو نظر انداز کر کے $= \text{طول کا}\ ۵۰ \times ۶۲ \times ۱۰^{-۷}$

$= \text{طول کا}\ ۳۱ \times ۱۰^{-۵}$

$\therefore\ \text{س}_2 = ۱۰۰٫۲۴\,(۱ - ۰٫۰۰۰۳۱)$

$= ۱۰۰٫۲۰۹$

اس طرح $\quad ۱۰۰ + \frac{۸}{۳}\frac{ک^{۲}}{۱۰۰} = ۱۰۰٫۲۰۹$

$$ک^{۲} = \frac{۳}{۸} \times ۲۰٫۹ = ۷٫۸۳۷۵$$

ک = ۲٫۸۰ فٹ یعنی ٫۲۰ فٹ کی کمی

تار کے ایک فٹ طول کا وزن ایک مربع انچ تراش کے ساتھ

$= \frac{۴۸۰}{۱۴۴} = \frac{۱۰}{۳}$ پونڈ۔

ابتدائً $\quad ف_{۱} = \frac{۱}{۸} \times \frac{۱۰}{۳} \times \frac{۱۰۰ \times ۱۰۰}{۳} = ۱۳۸۹$ پونڈ فی مربع انچ

اس لیے $\quad ف = \frac{۳}{۲٫۸} \times ۱۳۸۹ = ۱۴۸۸$ " " "

$ف - ف_{۱} = ۹۹$ " " "

لچکدار تطول $= \frac{ف - ف_{۱}}{ی} = \frac{۹۹}{۳۰ \times ۱۰^{۶}} = ۳۳ \times ۱۰^{-۷}$

جو تپش کی تبدیلی سے پیدا ہونے والے سکڑاؤ ۳۱×۱۰^{-۵} کے مقابلے میں قابل نظر اندازی ہے۔ اس طرح معلوم ہوا کہ اوپر کا تقرب حق بجانب ہے۔ اگر ک کے لیے زیادہ صحیح کعبی مساوات (۱۰) کی طرح حاصل کی جائے تو بھی نتیجہ تقریباً یہی رہیگا۔

مثال ۲ - مثال ۱ میں ابتدائی جھوک ۱ فٹ لو۔ صفحہ ۲۳۲

$س_{۱} = ۱۰۰ + \frac{۸}{۳} \times \frac{۱}{۱۰۰} = ۱۰۰٫۰۲۶۷$ فٹ

$ف_{۱} = \frac{۱}{۸} \times \frac{۱۰}{۳} \times ۱۰۰۰۰ = ۴۱۶۷$ پونڈ فی مربع انچ

اس کے بقدر اپنے ٫۰۰۰۳۱ کے کم ہونے سے طول ۱۰۰ فٹ سے کم رہ جائیگا۔ اس لیے اس صورت میں مثال ۱ میں اختیار کیا ہوا تقرب جائز نہ ہوگا۔

مساوات (۱۰) کو استعمال کرنے سے

$$-\text{٫۰۰۰۳۱} + \frac{\text{۱}}{\text{۸}} \times \frac{\text{۱۰}}{\text{۳}} \times \frac{\text{۱۰۰۰۰ (۱ - ک)}}{\text{۳۰} \times \text{۱۰}^{\text{۶}} \times \text{ک}} = \frac{\text{۴}}{\text{۳}} \, \frac{\text{ک}^{\text{۲}} - \text{۱}}{\text{۱۰۰۰۰}}$$

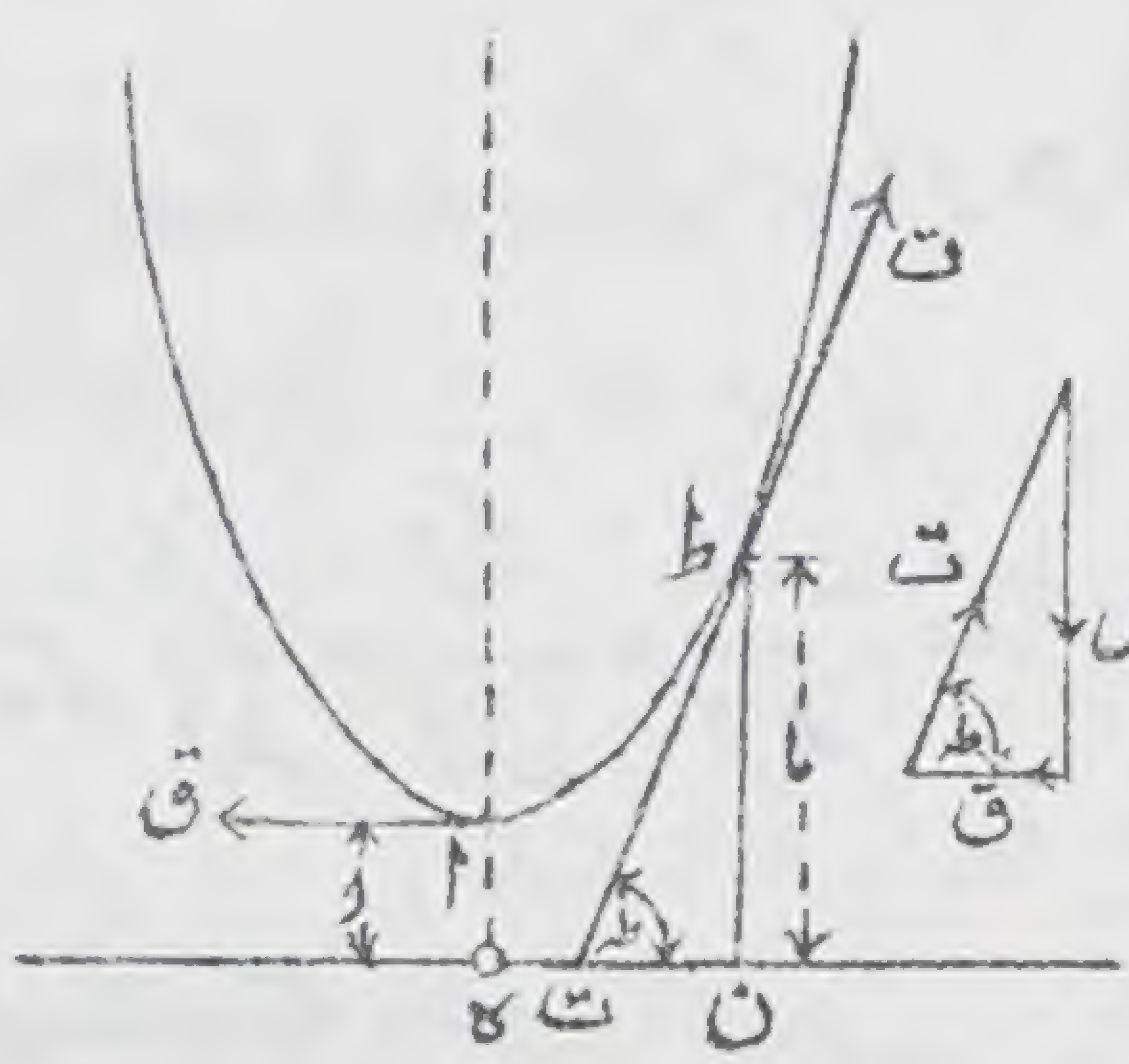
یا

$$\text{ک}^{\text{۳}} + \text{٫۶۸۳ ک} - \text{٫۵۲۱} = \text{۰}$$

اس سے آزمائش کے ذریعے ک = ٫۵۳۷ فٹ = ۶٫۴۴ انچ یعنی ۵٫۵۶ انچ کی کمی - اور زور چونکہ $\frac{\text{۱}}{\text{ک}}$ کے متناسب ہوتا ہے اس لیے

$$\text{ف} = \frac{\text{۴۱۶۷}}{\text{٫۵۳۷}} = \text{۷۷۶۱ پونڈ فی مربع انچ}$$

۱۴۶ - معمولی زنجیرہ ـــــ اگر ایک یکساں تراش کی ڈوری یا تار دو سہاروں سے آزادانہ لٹکے تو اس سے ایک زنجیرہ بنتا ہے۔ اگر جھوک کم ہو تو دفعہ گزشتہ میں فرض کی ہوئی مکافی شکل اس کا ایک بہت تقریبی تقرب ہے۔ دفعہ ۱۴۵ ہی کی ترقیم کے ساتھ اگر و وزن فی اکائی طولِ قوس ہو (بجائے فی اکائی طولِ فصل کے) تو سب میں نچلے نقطے ا کے انتصاباً



شکل ۱۹۱

نیچے مبداء لے کر طول اَ ط = س (شکل ۱۹۱) کے تعادل پر غور کرنے سے :ـــ

$$\text{دس} = \text{ق مس طہ}$$

یا

$$\text{س} = \frac{\text{ق}}{\text{و}} \, \text{مس طہ} = \text{ا مس طہ} \quad \text{.........(۱)}$$

جہاں ا = $\frac{\text{ق}}{\text{و}}$ تار یا ڈوری کے اُس طول کو تعبیر کرتا ہے جو انتصاباً لٹک کر

اپنے ذاتی وزن کی وجہ سے بالائی سرے پر تناؤ ق پیدا کریگا،

$$\text{مس ط} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}،\quad \text{جم ط} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}}،\quad \text{جب ط} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر س}}$$

اور (۱) سے $\frac{\text{فر س}}{\text{فر ط}} = \text{ا قط}^{۲}\text{ ط}$

اس لیے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ط}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر س}} \times \frac{\text{فر س}}{\text{فر ط}} = \text{جب ط} \times \text{ا قط}^{۲}\text{ ط} = \text{ا}\frac{\text{جب ط}}{\text{جم}^{۲}\text{ ط}}$

اور تکمل کرنے سے،

$$\text{ما} = \text{ا}\int \frac{\text{جب ط فر ط}}{\text{جم}^{۲}\text{ ط}} = \text{ا قط ط} \qquad \ldots\ldots(۲)$$

اگر ا = ا جبکہ ط = ۰ یعنی مبدا و نقطہ ا سے بقدر فاصلہ ا کے نیچے لیا جائے۔

نیز $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ط}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}} \times \frac{\text{فر س}}{\text{فر ط}} = \text{جم ط} \times \text{ا قط}^{۲}\text{ ط} = \text{ا قط ط} \qquad \ldots(۳)$

اور تکمل کرنے سے ـــ

$$\text{لا} = \text{ا}\int \text{قط ط فر ط} = \text{ا لوگ}_{\text{و}}\,\text{مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{ط}}{۲}\right)$$

$$= \text{ا لوگ}_{\text{و}}\left(\text{قط ط} + \text{مس ط}\right) \qquad \ldots\ldots(۴)$$

$$\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}} = \text{قط ط} + \text{مس ط} \qquad \ldots\ldots(۵)$$

یا

منکافی لینے سے

$$\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ا}}} = \text{قط ط} - \text{مس ط} \qquad \ldots\ldots(۶)$$

اس لیے جمع کرنے سے $\frac{۱}{۲}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}\right) = \text{قط ط} = \frac{\text{ما}}{\text{ا}}$ (۳) سے

یعنی $\text{جمز}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ما}}{\text{ا}}$

یا $\text{ما} = \text{ا}\,\text{جمز}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ .... (۷)

جو زنجیرہ کی مساوات ہے۔

مساوات (۷) کو پھیلانے سے

$$\text{ما} = \text{ا}\left(۱ + \frac{\text{لا}^{۲}}{۲\,\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۲۴\,\text{ا}^{۴}} + \text{وغیرہ}\right) = \text{ا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۲\,\text{ا}} + \frac{\text{ا}}{۲۴}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{۴} + \text{وغیرہ}$$

اور لا کی چھوٹی قیمتوں کے لیے، تیسری اور بعد کی رقمیں نظر انداز کرنے سے

$$\text{ما} = \text{ا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۲\,\text{ا}} = \text{ا} + \frac{\text{و}\,\text{لا}^{۲}}{۲\,\text{ق}}$$

جو ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے، اور مساوات (۱) دفعہ ۱۴۵ کے مماثل ہے صرف اس فرق کے ساتھ کہ مبداء راس ا سے فاصلہ ا نیچے ہے۔

تناؤ کسی نقطہ ط پر (۲) کی رُو سے حسبِ ذیل ہوگا:-

$$\text{ت} = \text{ق}\,\text{قط}\,\text{ط} = \text{و} \times \text{ما}$$

جو انتصاباً لٹکتے ہوئے طول ما کے بالائی سرے کے تناؤ کے مساوی ہے۔

راس ا سے ناپا ہوا منحنی س کا طول

$$\text{س} = \int \frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}\,\text{فرلا} = \int \sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲}}\,\text{فرلا} = \int \sqrt{۱ + \text{جبز}^{۲}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}\,\text{فرلا}$$

$$= \int \text{جمز}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{فرلا} = \text{ا}\,\text{جبز}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

تکمل کا مستقل صفر ہے، کیونکہ س = ۰ جب کہ لا = ۰

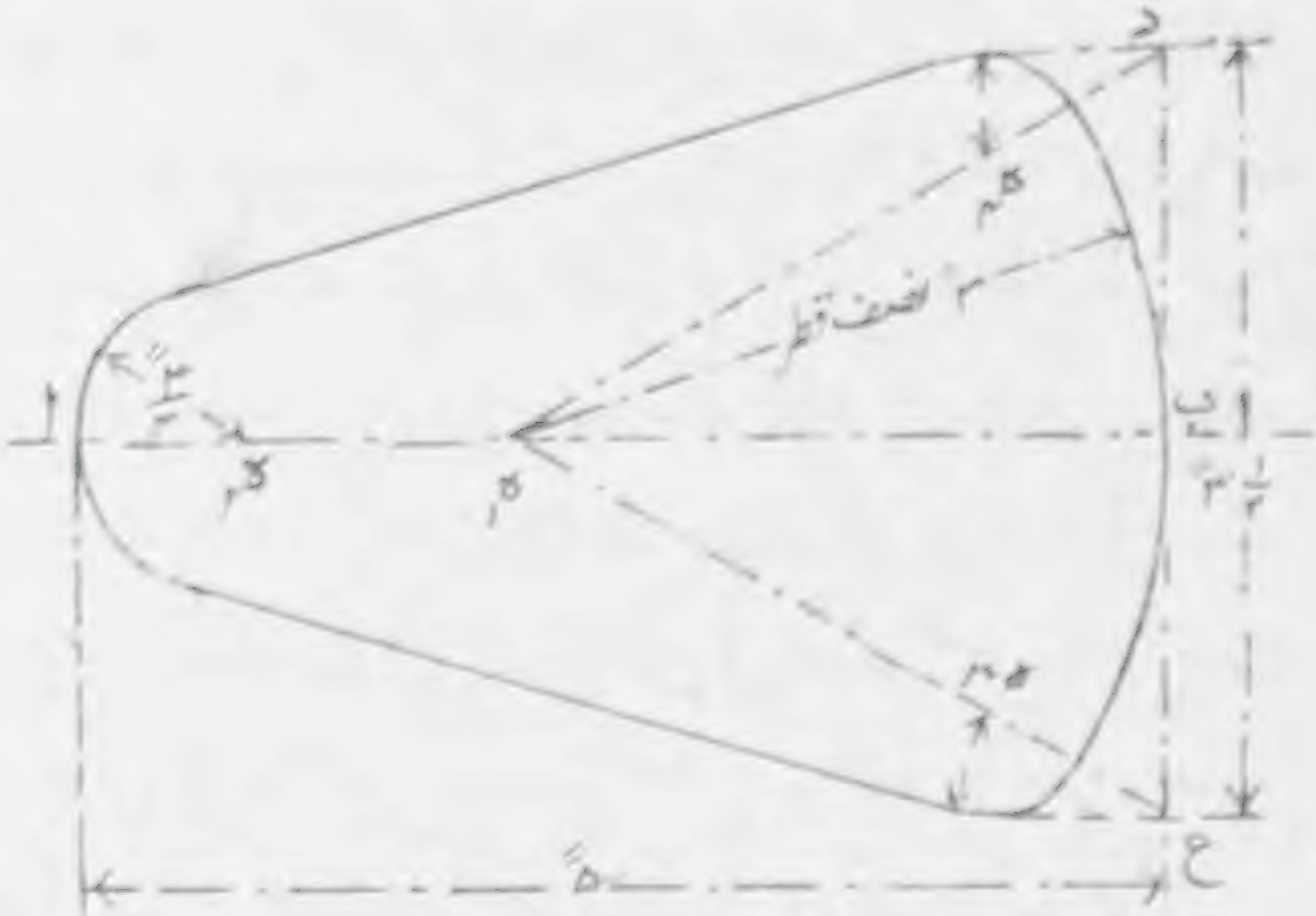
سوالات نمبر ۱۲

ا۔ ایک ۲ انچ چوڑی اور ۳ انچ گہری مستطیلی سلاخ اپنی گہرائی کے متوازی مستوی میں خم کی ہوئی ہے اور انحنا کا اوسط نصف قطر ۴ انچ ہے۔ اگر سلاخ پر ۵ ٹن انچ کا ایک خماؤ کا معیار عمل کرے جو اس کے انحناء کو گھٹانے کا اقتضار کھے تو خماؤ کے تنشی اور فشاری زوروں کی اعظم حدت معلوم کرو۔

۲۔ ایک $\frac{1}{2}$ انچ قطر کی گول فولادی سلاخ $\frac{1}{2}$ انچ کے اوسط نصف قطر پر موڑی ہوئی ہے۔ اگر سلاخ پر ۴۰۰۰ پونڈ انچ کا خماؤ کا معیار عمل کرے جو اس کے نصف قطر انحنا کو اور چھوٹا کرنا چاہیے تو تنشی اور فشاری زور کی اعظم حدت معلوم کرو۔

۳۔ ایک آنکڑے کی خاص تراش ایک متشاکل منحرف ہے جس کی گہرائی ۳ انچ ہے، اور چوڑائی آنکڑے کے اندرونی پہلو پر ۳ انچ اور بیرونی پہلو پر ۱ انچ ہے۔ اس تراش پر آنکڑے کے اندرونی اور بیرونی دونوں کناروں کا مرکز انحناء تراش کے مستوی میں ہے اور اندرونی کنارے سے $2\frac{3}{4}$ انچ کے فاصلے پر ہے اور بوجھ کا خط اندرونی کنارے سے $2\frac{1}{4}$ انچ کے فاصلے پر سے گزرتا ہے۔ اس آنکڑے کے لیے بے خطر بوجھ کا تخمینہ کرو تاکہ اعظم تنشی زور ۷ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو۔

۴۔ شکل میں ایک آنکڑے کی خاص تراش دکھائی گئی ہے۔ گول کونوں کے مرکز ھ اور ھ خطوط ط ع اور ط د پر ہیں۔ آنکڑے کے اندرونی اور بیرونی کنارے کا مرکز انحنا خط ا ب مخروجہ پر ہے اور ب سے $2\frac{1}{2}$ انچ کے فاصلے پر ہے اور بوجھ کا خط مرکز انحنا میں سے گزرتا ہے۔ اگر آنکڑا ۱۰ ٹن کا بوجھ اُٹھائے تو تنشی اور فشاری زور کی اعظم حدت کا تخمینہ کرو۔



مسئلہ ۴ کے لیے شکل

۵ ۔ ۱ انچ قطر کے گول فولاد کا ایک چھلا بنایا گیا ہے جس کا اوسط قطر ۵ انچ ہے۔ چھلے پر ۲۰۰۰ پونڈ کی کھینچ کے تحت تننشی اور فشاری زور کی اعظم حدت معلوم کرو۔

۶ ۔ سوال نمبر ۵ کے چھلے میں کھینچ کے خط میں قطر کا اضافہ اور اس خط کے علی القوائم قطر کا سکڑاؤ معلوم کرو۔ ے = 30×10^{6} پونڈ فی مربع انچ لو۔

۷ ۔ ایک زنجیر کی کڑیاں ۱ انچ گول فولاد کی بنائی گئی ہیں اور ان کے سرے نیم دائری ہیں جن کا اوسط نصف قطر $1\frac{1}{2}$ انچ ہے۔ سروں کو ۱ انچ لمبے مستقیم حصوں سے ملایا گیا ہے۔ زنجیر ۲۰۰۰ پونڈ کا بوجھ اٹھائے تو کڑیوں میں تننشی اور فشاری زور کی اعظم حدت معلوم کرو۔

۸ ۔ مستطیلی تراش کی ایک چپٹی مرغولی کمانی ۱ انچ چوڑی، $\frac{1}{50}$ انچ موٹی اور ۲۰ فٹ لمبی ہے۔ اگر خماؤ کا زور ۱۰۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے تو کمانی ایک مرکزی تکلے پر کتنا مروڑ کا معیار لگا سکتی ہے۔ کمانی درماندہ ہو تو اس کو کتنے مکمل چکر دیے جا سکتے ہیں اور اس طرح اس میں کتنا کام جمع ہوگا۔ اگر کمانی کا بیرونی سرا ۱۰ء۵ انچ کے نصف قطر پر ہو تو کمانی بندش پر کتنی

کھینچ کا عمل کریگی۔

۹۔ ایک متشاکل تین قبضی کماندار پسلی دائری شکل کی ہے اور اس کا فصل ۵۰ فٹ اور ارتفاع ۱۰ فٹ ہے۔ اگر یکساں پھیلا ہوا بوجھ ۱ ٹن فی فٹ فصل ہو تو افقی دھکیل اور ایک سرے سے (افقاً) $\frac{1}{4}$ فصل پر خماؤ کا معیار معلوم کرو۔ صفحہ ۴۳۵؟

۱۰۔ ایک مکافی کماندار پسلی کو جست کے نقاط اور چوٹی پر قبضے لگے ہیں اور اس کا فصل ۵۰ فٹ اور ارتفاع ۱۰ فٹ ہے۔ اگر بوجھ چوٹی سے افقی فاصلے کے ساتھ ہموار طور پر بدلے اور چوٹی پر $\frac{1}{2}$ ٹن فی فٹ فصل اور جست کے نقاط پر ۱ ٹن فی طولی فٹ ہو تو افقی دھکیل اور $\frac{1}{4}$ فصل پر خماؤ کا معیار معلوم کرو۔ ایک پیل پائے سے ۵ فٹ پر عمادی دھکیل اور جزی قوت کیا ہوگی۔

۱۱۔ سوال نمبر ۹ کی کمان میں اگر قبضے صرف سروں پر ہوں تو افقی دھکیل معلوم کرو۔

۱۲۔ ایک مکافی دو قبضی کماندار پسلی کا فصل ۴۰ فٹ اور ارتفاع ۸ فٹ ہے، اور اس کی چوٹی پر ۱۰ ٹن کا ایک بوجھ رکھا ہوا ہے۔ پسلی کی تراشش کا معیارِ جمود ہر جگہ پسلی کے ڈھال کے زاویے کے قاطع کے متناسب ہے۔ افقی دھکیل اور چوٹی پر خماؤ کا معیار معلوم کرو۔ (اشارہ - آ̄ = آ۱ (فرس / فرلا) جہاں آ۱ چھوٹی پر معیارِ جمود ہے)۔

۱۳۔ ایک دائری کماندار پسلی میں جس کا فصل ۵۰ فٹ اور ارتفاع ۱۰ فٹ ہے اور جس کو دونوں سروں پر قبضے لگے ہیں تپش کے ۶۰° ف کے اضافے سے خماؤ کے زور کی اعظم حدت معلوم کرو۔ پسلی کی گہرائی مستقل ہے اور ۱۲ انچ ہے۔ پھیلاؤ کی شرح $\frac{2}{3} \times 10^{-5}$ ہے۔ ے = ۱۲۵۰۰ ٹن فی مربع انچ۔

۱۴۔ ایک نیم دائری کمان پر جس کا فصل ل ہے اور جو دونوں سروں پر ثابت ہے چوٹی پر ایک بوجھ و ہے۔ سروں اور چوٹی پر خماؤ کا معیار، عمادی دھکیل، اور جزی قوت معلوم کرو۔

۱۵ - ایک انچ مربع فولاد کو ۲۰ انچ اوسط نصف قطر کے ایک نیم دائرے کی شکل میں موڑا گیا ہے اور دونوں سرے مضبوطی کے ساتھ شکنجہ کر دیے گئے ہیں - فولاد کی تپش میں ۱۰۰° ف کی تبدیلی سے پیدا ہونے والا اعظم خماؤ کا زور معلوم کرو - چوٹی سے صفر خماؤ کے معیار کے نقاط کا زاویئی فاصلہ کیا ہے - (پھیلاؤ کی شرح = ۶۲×۱۰^{-۷} ، ہے = ۳۰×۱۰^{۶} پونڈ فی مربع انچ) -

۱۶ - ایک ٹرالی کے تار کی تراش $\frac{۱}{۲}$ مربع انچ، فصل ۱۲۰ فٹ، جھوک ۱۰ انچ اور وزن ۱۱۵ پونڈ فی ۱۰۰ گز ہے - تار میں تناؤ کی حدت معلوم کرو -

۱۷ - ۱ فٹ کے اعظم جھوک اور ۷۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کے اعظم تناؤ کے ساتھ ایک تانبے کے تار کا اعظم فصل کیا ہوگا - تانبے کا وزن ۰٫۳۲ پونڈ فی مکعب انچ ہے -

۱۸ - ۶۰ فٹ کے فصل میں ایک فولادی تار کا جھوک ۲ فٹ ۳ انچ ہے - تپش کے ۵۰° ف اضافے سے جھوک کا اضافہ معلوم کرو - (پھیلاؤ کی شرح ۶۷×۱۰^{-۷} اور فولاد کا وزن ۴۸۰ پونڈ فی مکعب فٹ ہے) -

۱۹ - ایک فولادی تار کا فصل ۱۰۰ فٹ اور جھوک ۹۰° ف پر ۱ فٹ ہے - تار میں تنشی زور کی حدت کیا ہوگی؟ کس تپش پر جھوک گھٹ کر ۶ انچ ہو جائیگا اور اُس وقت تار میں زور کیا ہوگا - ہے = ۳۰×۱۰^{۶} پونڈ فی مربع انچ - فولاد ۴۸۰ پونڈ فی مکعب فٹ -

۲۰ - سوال نمبر ۱۹ کے تار کا جھوک اور زور کیا ہوگا اگر تپش گر کر ۲۰° ف ہو جائے -

۲۱ - ایک یکساں تار جس کا طول ۲۰۰ فٹ اور وزن ۹ پونڈ فی فٹ طول ہے دو نقطوں سے لٹکا ہوا ہے جن کا باہمی فاصلہ ۱۰۰ فٹ ہے اور جو ایک ہی لیول پر ہیں - جھوک، سب سے نچلے نقطے پر تناؤ، اور سہارے کے نقطوں پر تناؤ معلوم کرو -

صفحہ ۴۳۶

تیرہواں باب

چپٹی تختیاں

۷۴۱- چپٹی تختیاں کناروں پر سہاری ہوئی ہوں اور ان کے چپٹے رُخوں کے علی القوائم بوجھ عمل کریں تو تختیوں میں جھکاؤ پیدا ہوگا۔ اس طرح اِن کی مضبوطی کی بحث کسی قدر سیدھے شہتیروں کے مشابہ ہے لیکن ایک اہم فرق ہے اور وہ یہ کہ تختیوں میں خماؤ سارے کا سارا ایک ہی مستوی میں اس کے متوازی نہیں بلکہ چپٹے چہروں کے ہر علی القوائم مستوی میں واقع ہوتا ہے۔

متشا کلاً لدی ہوئی دائری تختی سادہ ترین صورت ہے کیونکہ اس کے کنارے کے ردِ عمل یا سہارنے والی قوتیں ہر قطر کے گرد متشاکل ہوتی ہیں۔ اور یہ غالباً بے تھام چپٹی تختی کی سب میں اہم صورت بھی ہے۔ ہم دائری تختی زوروں اور فسادوں پر برنولی آئیلر کے سادہ نظریے کی روشنی میں غور کرینگے اور اس نظریے میں مناسب ترمیم کرلینگے جو اس وجہ سے ضروری ہے کہ خماؤ ایک سے زیادہ مستویوں میں واقع ہوتا ہے۔ سیدھے شہتیروں کی طرح یہاں بھی دو صورتوں میں تمیز کرنا ہوگا ایک تو یہ کہ

تختی کنارے پر مضبوطی کے ساتھ جکڑی ہوئی ہو دوسرے یہ کہ سادہ طور پر سہاری گئی ہو - اس نظریے کی رُو سے جو زور حاصل ہونگے اُن کے ذریعے ایک سادہ تقریبی طریقے سے نتائج کی جانچ کی جاسکتی ہے - یہ تقریبی طریقہ یہ ہے کہ مختلف شکلوں کی تختیوں کے لیے نتائج ایک عددی سر کو قیمتیں دے کر حاصل کیے جائیں -

۱۴۸ - دائری تختی میں زور اور فساد[1] — ذیل کے دفعات میں جو زور اور فساد محسوب کیے گئے ہیں وہ گراشاف[ہ] کے دیے ہوئے ہیں اور ان کی اکثر پیروی کی جاتی ہے - گراشاف نے اعظم فساد کو لچکدار مضبوطی کا ناپ مانا (دیکھو دفعہ ۲۵) - لیکن اکثر یہ ہوتا ہے کہ اُس کی دی ہوئی قیمت

ے × (اعظم فساد)

کو غلطی سے اعظم زور کہہ دیا جاتا ہے - حالانکہ اعظم زور دراصل اس سے زیادہ ہوتا ہے[2] - اگر تختی کے چہرے کے علی القوائم خاص زور کو نظر انداز کیا جائے تو اعظم جزی زور یا "زور کے فرق" والے نظریے (دفعہ ۲۵) کی رُو سے مضبوطی کا ناپ اعظم خاص زور ہوگا -

شہتیروں کی صورت میں یہ مانا جاتا ہے کہ تراشی ابعاد طول کے مقابلے میں چھوٹے ہیں - اسی طرح دائری تختیوں میں خماؤ کے زور محسوب کرنے میں ہم فرض کرینگے کہ موٹائی قطر کے مقابلے میں چھوٹی ہے - نیز چونکہ وسطی سطح پر کے فساد کو نظر انداز کر دیا جاتا ہے اس لیے اگر وسطی انصراف قابلِ لحاظ ہو مثلاً تختی کی موٹائی کے $\frac{1}{5}$ سے زیادہ ہو تو یہ سادہ نظریہ کامل طور پر قابلِ اعتبار نہیں رہیگا - یہ بھی فرض

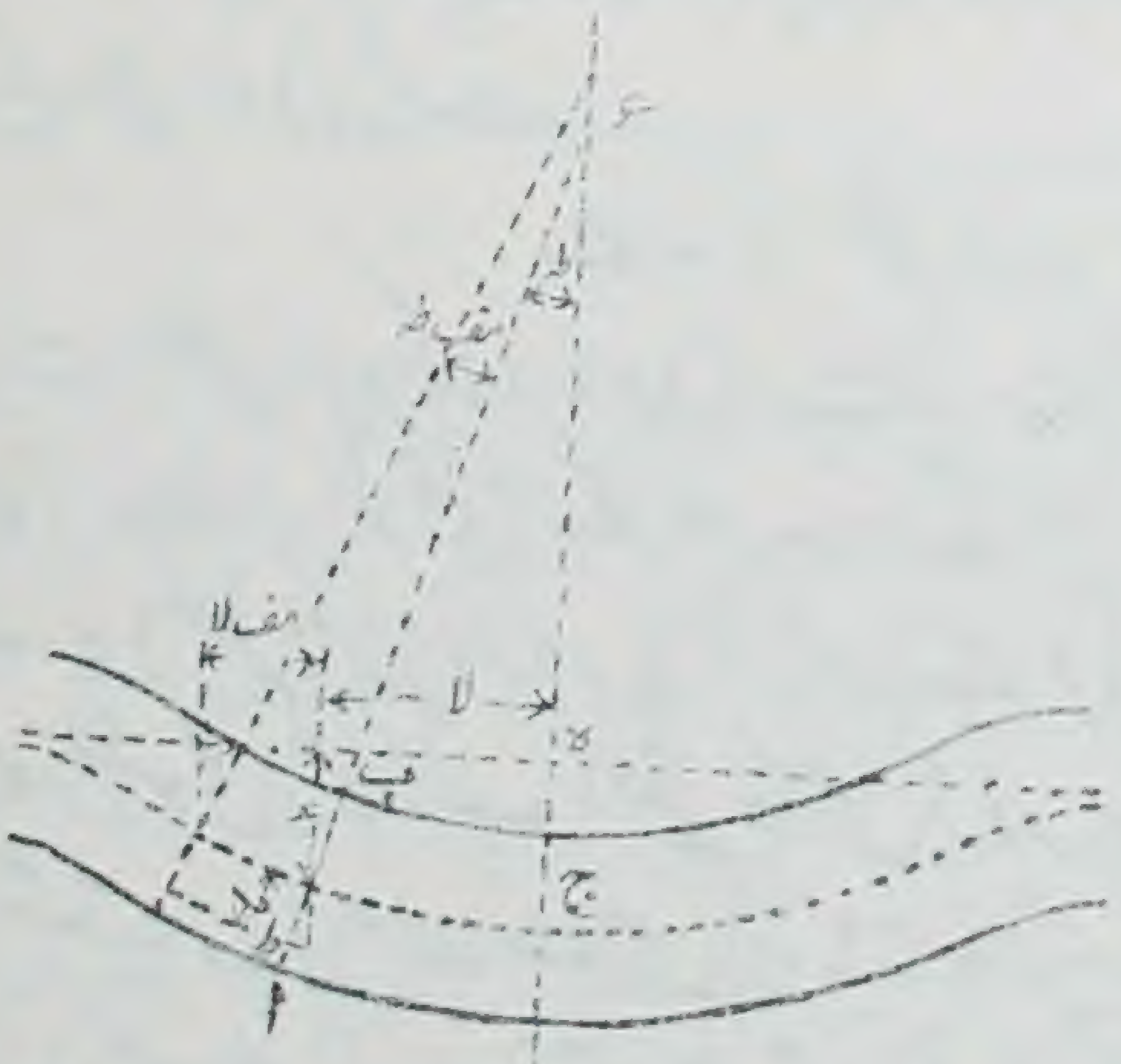
---

[1] اس نظریہ کی تجرباتی توثیق کے لیے جو دفعہ ۱۵۰ والی صورت کے لیے کی گئی دیکھو ڈبلیو جے کرافرڈ کا مضمون "چپٹی تختیوں کی لچکدار مضبوطی" (روداد رائل سوسائٹی آف ایڈنبرا سنہ ۱۹۱۱-۱۲ جلد ۳۲ حصہ چہارم صفحہ ۳۴۸)۔

[2] دیکھو پرسکٹ (Prescott) کی "اطلاقی لچک" باب ۱۵ جس میں دیا ہوا نظریہ زیادہ صحیح ہے لیکن زیادہ مشکل بھی ہے - تجرباتی تصدیق کے لیے دیکھو کیرنگٹن کا مضمون رسالہ انجینیرنگ ۱۳ جنوری سنہ ۱۹۲۵ء میں -

Carrington Grashop ہ

کیا جائیگا کہ لداؤ متشاکل ہے اور اس طرح زور اور فساد ایک محور کے گرد متشاکل ہونگے جو تختی کے علی القوائم ہے اور اس کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ صفحہ ۲۲۳
آسانی کے لیے ہم تختی کو اُفقی اور بوجھوں کو انتصابی سمجھینگے - ہم فرض کرینگے کہ تختی کے انتصابی خطوط جو ابتدا میں انتصابی ہوں فساد کے بعد انتصابی محور کے ساتھ مائل ہوجاتے ہیں۔ تشاکل کی وجہ سے تمام مستقیم خطوط میں جو ابتدا میں انتصابی اور ایک ہی نصف قطر پر ہوں میلان کی تبدیلی مساوی ہوگی اور سب کے سب انتصابی محور کو ایک ہی نقطہ پر ملینگے - یعنی ایک مستدیر استوانی سطح جس کا محور ج د ع تھا (شکل ۱۹۲) اسی محور کے ساتھ ایک مخروطی سطح میں تبدیل ہوجائیگی - فرض کرو کہ فساد سے پہلے تختی کے کسی نقطہ ط کا فاصلہ (شکل ۱۹۲) مرکزی محور سے جو تختی کے علی القوائم ہے لا ہے اور تختی کے وسطی مستوی سے ی ہے جس کو نیچے کی طرف مثبت سمجھا جائیگا اور فرض کرو کہ نصف قطر لا پر جو خطوط ابتدا میں انتصابی تھے فساد کے بعد ان کا میلان انتصابی سمت سے ط ہوجاتا ہے - فرض کرو کہ محیطی سمت لاحقہ ی سے اور نیم قطری سمت لاحقہ لا سے تعبیر ہوتی ہے - اس طرح س ی اور س لا علی الترتیب محیطی اور نیم قطری فساد اور ف ی اور ف لا محیطی اور نیم قطری زور کی حدتیں ہونگی جن کو تناؤ کے لیے مثبت سمجھا جائیگا - جس طرح لمبے شہتیروں میں



شکل ۱۹۲

جزی زور اور فساد نظر انداز کر دیے گئے تھے اسی طرح پتلی تختیوں میں فا اور فا کے علی القوائم جزی زور نظر انداز کر دیے جائینگے -

فساد کے بعد صریحاً تختی کا مقعر چہرہ نیم قطری اور محیطی دونوں سمتوں میں فشار میں اور محدب چہرہ تناؤ میں ہوگا - وسطی مستوی صریحاً بے فساد ہوگا یعنی تعدیلی مستوی ہوگا - طا کا نصف قطر بڑھ کر

$$\text{لا} + \text{طہ}\ \text{ما}$$

ہوجائیگا - اس لیے تعدیلی مستوی سے گہرائی ما پر محیطی فساد

$$\text{س}_{\text{ی}} = \frac{۲\pi\,(\text{لا} + \text{طہ}\ \text{ما}) - ۲\pi\,\text{لا}}{۲\pi\,\text{لا}} = \frac{\text{طہ}\ \text{ما}}{\text{لا}} \quad\text{......(۱)}$$

جس کو $\frac{\text{ما}}{\text{سا}}$ لکھ سکتے ہیں جہاں $\text{سا} = \frac{\text{لا}}{\text{طہ}}$ = نصف قطر لا پر کے نقطے طا میں سے ابتداءً اُفقاً گزرنے والے مستوی کا وہ نصف قطرِ انحنا جو ایسے مستوی میں ہے جو ب ع میں سے گزرتا ہے اور ب ع اور ہ ع کے مستوی کے علی القوائم ہے (مقابلہ کرو دفعہ ۶۱ سے) - نیز اگر نصف قطر لا + مف لا پر ابتداءً انتصابی خطوط کا میلان انتصابی سمت سے طہ + مف طہ ہو تو گہرائی ما پر فاصلہ مف لا بڑھ کر

$$\text{مف}\ \text{لا} + \text{ما}\ \text{مف}\ \text{طہ}$$

ہوجائیگا، اور اس طرح نیم قطری فساد

$$\text{س}_{\text{لا}} = \text{ما} \times \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}} \quad\text{......(۲)}$$

ہوگا جس کو $\frac{\text{ما}}{\text{سا}}$ لکھ سکتے ہیں، جہاں $\text{سا} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}}$ = تختی کا نصف قطرِ انحنا صفحہ ۴۲۸
ب ع اور ج ع میں سے گزرنے والے نصف النہاری مستوی میں (مقابلہ کرو دفعہ ۱۶ سے) -

اس طرح چونکہ محور ہ ع کے متوازی سمت کا خاص زور صفر ہے

اس لیے دفعہ ۱۹ کی رُو سے محیط کی سمت میں

$$ش_ی = \frac{طہ\ ما}{لا} = \frac{۱}{ہے}\left(ف_ی - \frac{ف_{لا}}{م}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اور نیم قطری سمت میں

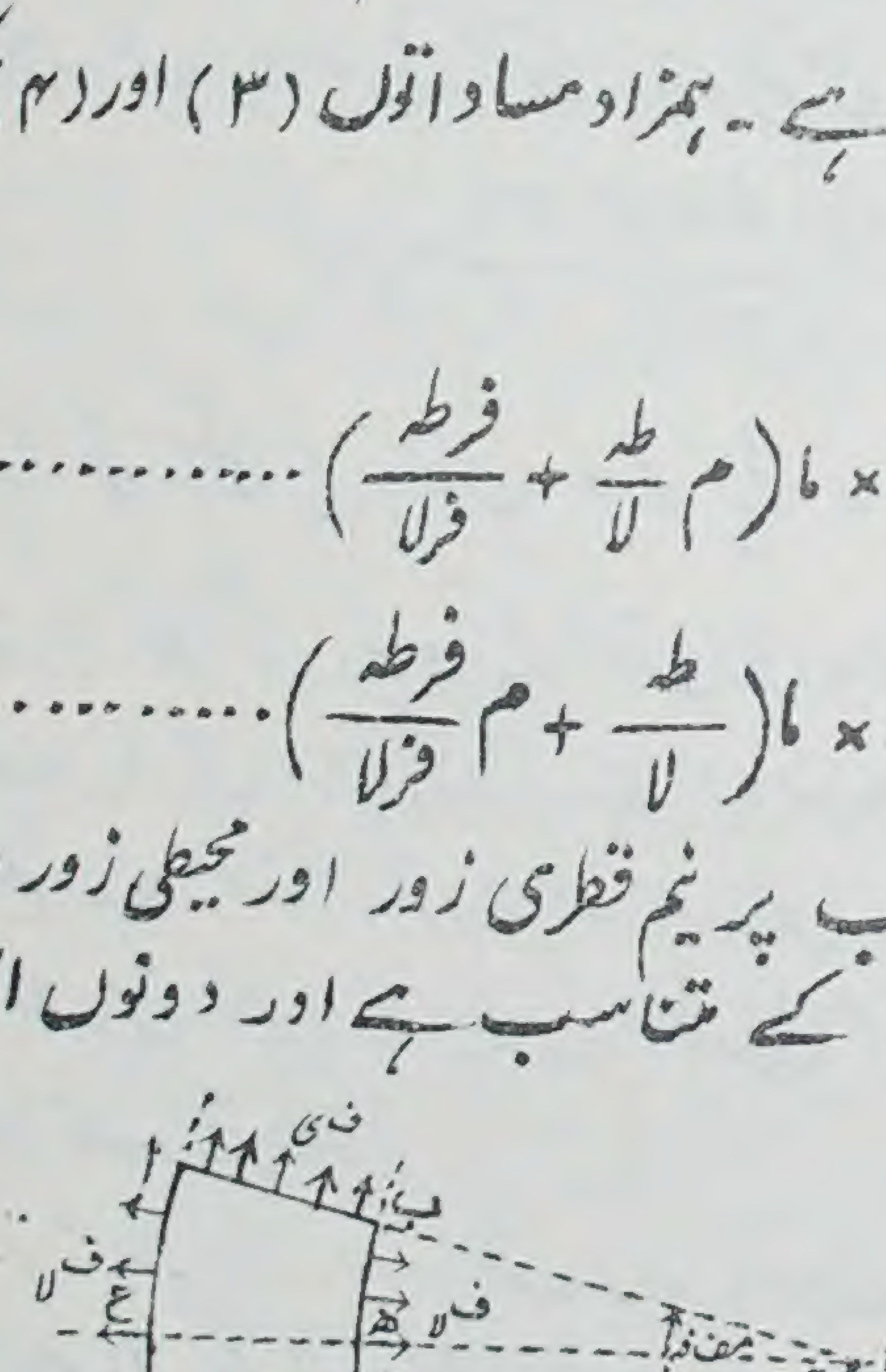
$$ش_{لا} = ما\ \frac{فرطہ}{فرلا} = \frac{۱}{ہے}\left(ف_{لا} - \frac{ف_ی}{م}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

جہاں $\frac{۱}{م}$ پواسن کی نسبت ہے۔ ہمزاد مساواتوں (۳) اور (۴) کو حل کرنے سے —

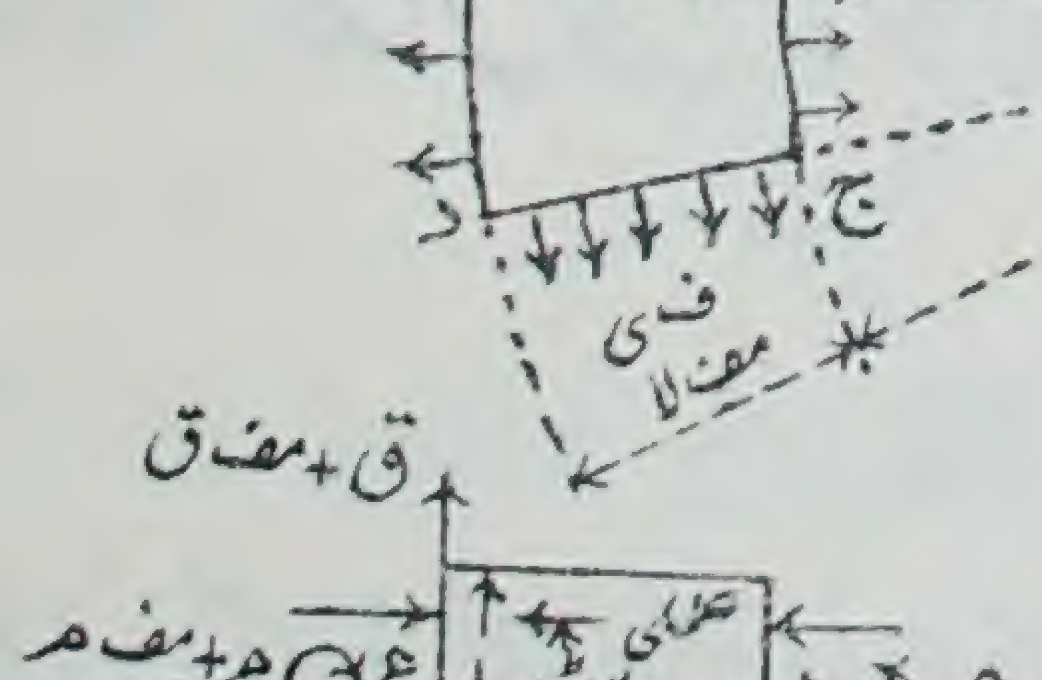
$$ف_ی = \frac{ہے م^۲}{م^۲-۱} \times ما\left(م \frac{طہ}{لا} + \frac{فرطہ}{فرلا}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

$$ف_{لا} = \frac{ہے م^۲}{م^۲-۱} \times ما\left(\frac{طہ}{لا} + م \frac{فرطہ}{فرلا}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

جس سے ظاہر ہے کہ تراش اب پر نیم قطری زور اور محیطی زور دونوں کی حدت تعدیلی محور سے فاصلہ ما کے متناسب ہے اور دونوں اسی طرح دکھائے جاسکتے ہیں جس طرح شکل ۱۷۵ میں شہتیر کے خمائے کے زور دکھائے گئے ہیں۔



اب تختی کے ایک ٹکڑے کے تعادل پر غور کرو (شکل ۱۹۳) جو نصف قطر لا اور لا + مف لا کے درمیان



شکل ۱۹۳

ہے اور دو انتصابی نصف النہاری مستویوں کے درمیان ہے جن کا درمیانی زاویہ

مف فہ بہت چھوٹا ہے (شکل ۱۹۳) ۔ شکل ۱۹۳ کا بالائی حصہ ایک اُفقی تراش کو تعبیر کرتا ہے جو تعدیلی سطح کے نیچے لیا گیا ہے اس لیے زور ف اور فی تنشی زور کی شکل میں ہیں ۔ تعدیلی سطح سے اوپر کے حصے میں جہاں ما منفی ہے نیم قطری اور محیطی زور فشاری ہونگے ۔

ٹکڑے پر محیطی زور کا حاصل ــــ چہروں اب اور ج د پر جو قوتیں فی عمل کرتی ہیں (شکل ۱۹۳) وہ وسطی نصف قطر ہ ع سے زاویہ (π/۲ − مف فہ/۲) بناتی ہیں ۔ دونوں چہروں میں سے کسی چہرے کے چھوٹے رقبے مف ب پر قوت فی × مف ب ہوگی ۔ اس کو ع ھ کے متوازی اور علی القوائم تحلیل کرنے سے ع ھ کے علی القوائم قوتوں کا حاصل صفر ہوگا کیونکہ اب اور ج د میں جو متناظر چھوٹے رقبوں کے جوڑے ہونگے ان ہیں اس سمت میں جزوِ ترکیبی مساوی اور مخالف ہونگے
اور ایک دوسرے کو زائل کردینگے ۔ اس طرح کے دو متناظر چھوٹے رقبے مف ب لیے جائیں صفحہ ۴۳۹
ایک اب میں اور دوسرا ج د میں تو ان سے ع ھ کے متوازی قوت چھوٹی مقداروں کے پہلے رُتبے تک

۲ فی × مف ب × جیب (مف فہ/۲) = فی × مف ب × مف فہ

ہوگی ۔ اب چونکہ فی تعدیلی سطح کے اوپر اور نیچے مخالف علامت کا ہوتا ہے اِس لیے تختی کے اس ٹکڑے پر ع ھ کے متوازی مجموعی قوت جو محیطی زور سے پیدا ہوتی ہے صفر ہوگی ۔ البتہ ان قوتوں سے ایک جفت پیدا ہوگا جس کا معیار ایک محور کے گرد جو تعدیلی مستوی میں ہے اور نصف قطر ہ ھ کے علی القوائم ہے حسبِ ذیل ہوگا :-

مف فہ ∫ (ما × فی × مف ب)

یہ حاصل جمع چہروں اب یا ج د میں سے کسی ایک پر لیا جائیگا ۔ اور (۵) سے فی کی قیمت درج کرنے سے مجموعی معیار حسبِ ذیل ہوگا :-

$$\text{مف فہ}\ \frac{\text{ے م}}{\text{۱ - م}^2}\left(\text{م}\ \frac{\text{ط}}{\text{لا}} + \frac{\text{فرط}}{\text{فرلا}}\right) \equiv \left(\text{ما}^2 \times \text{مف ب}\right) \ldots\ldots (۷)$$

اگر تختی کی موٹائی ٹ ہو تو ≡ (ما² مف ب) جو مستطیلی چہرے ا ب کا معیارِ جمود ہے $\frac{۱}{۱۲}$ × مف لا × ٹ³ کے مساوی ہوگا اور ع ھ کے علی القوائم محور کے گرد محیطی زور کا معیار

$$\frac{۱}{۱۲} \times \text{مف لا} \times \text{مف فہ} \times \text{ٹ}^3 \times \frac{\text{ے م}}{\text{۱ - م}^2}\left(\text{م}\ \frac{\text{ط}}{\text{لا}} + \frac{\text{فرط}}{\text{فرلا}}\right) \ldots\ldots (۸)$$

ہوگا جس کو ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں :-

$$\text{ص}_{\text{ی}} \times \frac{۲}{۳}\ \text{ٹ}$$

جہاں $\text{ص}_{\text{ی}}$ = مف فہ ≡ (ف$_{\text{ی}}$ × مف ب) = ا ب اور د ج پر تعدیلی مستوی کے ایک جانب محیطی زور سے حاصل ہونے والی مجموعی قوت بسمت ع ھ ہیں۔ اور جفت کا بازو جو کھینچ کے مرکز اور دباؤ کے مرکز کا درمیانی فاصلہ ہے $\frac{۲}{۳}$ ٹ ہے (دیکھو شکل ۱۹۳) - اگر ط مثبت ہو یعنی مخروطی سطح کا راس ع (شکل ۱۹۲) تختی کے اوپر ہو اور $\frac{\text{فرط}}{\text{فرلا}}$ مثبت ہو، یعنی تختی نیچے کو محدب ہو تو مقدار (۸) ٹکڑے کے پہلو د ج سے دیکھنے سے مخالف سمتِ ساعت ہوگی۔

ٹکڑے پر نیم قطری زور کا حاصل —— چہرے ب ج کے ایک چھوٹے رقبہ مف ب پر کی قوت کو ع ھ کے متوازی تحلیل کریں تو چھوٹی مقداروں کے پہلے رتبے تک

$$\frac{\text{ف} \times \text{مف ب}}{\text{لا}}$$

حاصل ہوگا - چہرے ب ج پر نیم قطری زور کی وجہ سے مجموعی قوت صفر ہوگی اور حاصل ایک جفت ہوگا جو تعدیلی مستوی کے اوپر اور نیچے کی مساوی

اور مخالف قوتوں سے پیدا ہوگا اور جس کا معیار

$$\Sigma\,(\text{ف}_{\text{لا}} \times \text{ما} \times \text{مف ب})$$

ہوگا۔ اس میں حاصل جمع چہرہ ب ج پر لیا گیا ہے جس کا رقبہ ٹ × لا × مف فہ ہے۔ (۶) سے $\text{ف}_{\text{لا}}$ کی قیمت درج کرنے سے معیار

$$\text{ھ} = \frac{\text{ے م}}{\text{م}^2 - 1}\left(\frac{\text{ط}}{\text{لا}} + \text{م}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}}\right)\Sigma\,(\text{ما}^2\,\text{مف ب})$$

$$= \frac{\text{لا} \times \text{مف فہ} \times \text{ٹ}^3}{12} \times \frac{\text{ے م}}{\text{م}^2 - 1}\left(\frac{\text{ط}}{\text{لا}} + \text{م}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}}\right) \cdots\cdots (۹)$$

صفحہ ۴۴۰ اسی طرح چہرہ ا د پر کے معیار ھ + مف ھ کو لا + مف لا اور طہ + مف طہ کی رقوم میں لکھا جا سکتا ہے۔ ھ + مف ھ اور ھ کا فرق مف ھ $= \frac{\text{فرھ}}{\text{فرلا}} \times \text{مف لا}$ جو (۹) کو تفرق کرنے سے حسبِ ذیل ہوگا:

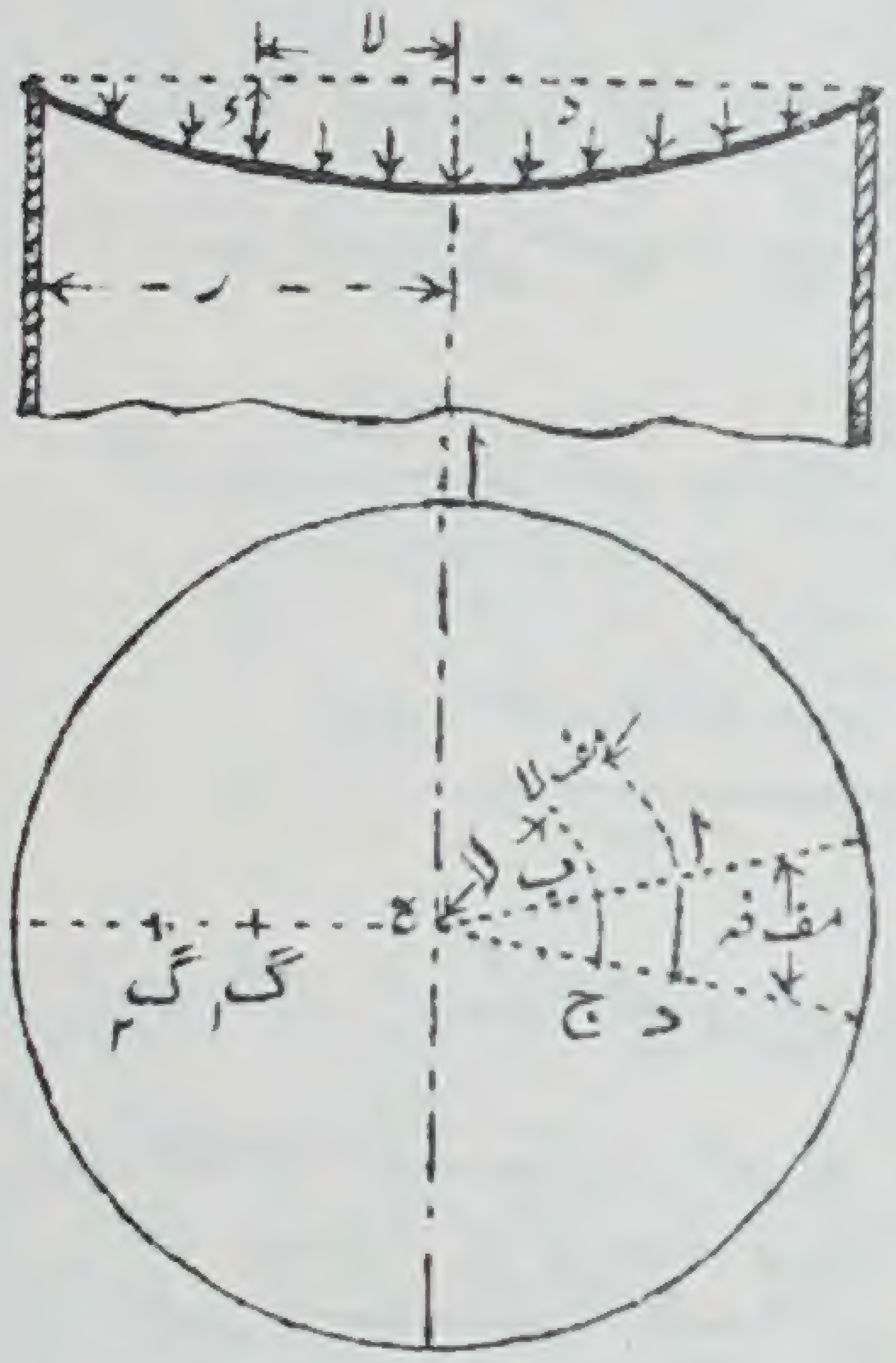
$$\frac{1}{12}\,\frac{\text{مف لا} \times \text{مف فہ} \times \text{ٹ}^3 \times \text{ے} \times \text{م}}{\text{م}^2 - 1}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}} + \text{م}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}} + \text{م لا}\,\frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرلا}^2}\right) \cdots\cdots (۱۰)$$

اگر حسبِ سابق طہ اور $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}}$ مثبت ہوں (۸) کی مطابقت سے معیار اثر (۹) بھی مخالف سمتِ ساعت ہوگا۔ اگر ان کے علاوہ $\frac{\text{فرھ}}{\text{فرلا}}$ بھی مثبت ہو یعنی لا کے بڑھنے سے ھ بڑھے تو ا د پر کا موافق سمتِ ساعت معیار ھ + مف ھ چہرہ ب ج پر کے مخالف سمتِ ساعت معیار سے زیادہ ہوگا اور (۱۰) ایک موافق سمتِ ساعت اور (۸) کے مخالف معیار ہوگا جو زیرِ بحث ٹکڑے پر نیم قطری زور کی وجہ سے پیدا ہوگا۔

اب یہ جو دو جفت ہیں (۸) اور (۱۰) ان کا حاصل بیرونی قوتوں کے ساتھ توازن میں ہونا چاہیے جن میں بوجھ اور ردِّ عمل شامل ہیں۔ اب ہم خاص صورتوں کو لیں گے۔

۱۴۹ - دائری تختی محیط پر آزادانہ سہاری ہوئی اور

چہرے پر یکساں دباؤ کے تحت —— فرض کرو کہ یکساں دباؤ تختی کے فی اکائی رقبہ د ہے اور فرض کرو کہ تختی کا نصف قطر ر اور موٹائی ٹ ہے (شکل ۱۹۴)۔ ایک دائری حصّہ پر جو پوری تختی کے ساتھ ہم مرکز ہو اور جس کا نصف قطر لا ہو بیرونی انتصابی قوت د × π لا² ہوگی۔ اس طرح اُس انتصابی اُستوانی سطح پر جو اُس حصّے کو باقی حصے سے جدا کرتی ہے مجموعی انتصابی جزی قوت د π لا² ہوگی اور چہرہ ب ج (اشکال ۱۹۳، ۱۹۴) پر انتصابی جزی قوت



شکل ۱۹۴

$$ق = د\,\pi\,لا^2 \times \frac{مف\,فہ}{\pi\,2} = \frac{د\,لا^2}{2} \times مف\,فہ \;\dots\dots\dots (1)$$

ہوگی۔

اسی طرح چہرہ ا د پر انتصابی جزی قوت

$$\frac{د}{2}\,(لا + مف\,لا)^2 \times مف\,فہ$$

ہوگی۔

بیرونی قوتوں کا معیار ایک ایسے محور کے گرد لیں جو تعدیلی مستوی میں ہے اور ع ھ کے علی القوائم ہے (شکل ۱۹۳) اور دوسرے رُتبے کی چھوٹی مقداروں کو نظر انداز کردیں، مثلاً ا ب ج د پر کے انتصابی بوجھ اور ع سے اس کے مرکز کے فاصلے کا حاصل ضرب، تو یہ معیار

حسبِ ذیل ہوگا :۔

$$\text{ق} \times \text{مف لا} = \frac{\text{د لا}^2}{2} \times \text{مف فہ} \times \text{مف لا} \quad \cdots\cdots (2)$$

یہ دج سے دیکھنے سے موافق سمتِ ساعت ہوگا۔

اب ٹکڑے اب ج د پر تعادل کی شرائط لگائیں تو اِن شرائط کے پورا ہونے کے لیے ضروری ہے کہ معیار (۲) اور دفعہ ۱۴۸ کے معیار (۸) اور (۱۰) مل کر جبری طور پر صفر ہوں۔ اس لیے مخالف سمتِ ساعت معیار حسبِ ذیل ہوگا :۔

$$\frac{1}{12}\,\frac{\text{ے م ٹ}^3}{\text{م}^2-1} \times \text{مف لا} \times \text{مف فہ}\left\{\left(\text{م}\frac{\text{طہ}}{\text{لا}} + \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}}\right) - \left(\text{م لا}\frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}} + \text{م}\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}}\right)\right\} - \frac{\text{د لا}^2}{2} \times \text{مف فہ} \times \text{مف لا} = 0$$

یا $\frac{\text{ے م}^2\text{ٹ}^3}{12(\text{م}^2-1)} \times \text{مف لا} \times \text{مف فہ}$ سے تقسیم کرکے تحویل کرنے سے

$$\text{لا}\frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{طہ}}{\text{لا}} = -\frac{6(\text{م}^2-1)\,\text{د}}{\text{ے م}^2\text{ٹ}^3}\,\text{لا}^2 \quad \cdots\cdots (3)$$

اور اس کی وہی شکل ہے جو مساوات (۱۰) دفعہ ۱۴۶ کی ہے۔

تکمل حل دفعہ ۱۴۶ کی طرح حسبِ ذیل ہوگا :

$$\frac{\text{طہ}}{\text{لا}} = \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}^2} - \frac{3}{4}\,\frac{(\text{م}^2-1)\,\text{د}}{\text{ے م}^2\text{ٹ}^3} \times \text{لا}^2 \quad \cdots\cdots (4)$$

$$\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}} = \text{ا} - \frac{\text{ب}}{\text{لا}^2} - \frac{9}{4}\,\frac{(\text{م}^2-1)\,\text{د}}{\text{ے م}^2\text{ٹ}^3} \times \text{لا}^2 \quad \cdots\cdots (5)$$

تکمل کے مستقل ا اور ب مرکز اور محیط پر کے حالات سے معلوم ہو سکتے ہیں۔ صریحاً مرکز یعنی لا = ۰ پر طہ = ۰، اس لیے (۴) سے ب = ۰، کنارے پر یعنی لا = ر پر فلا = ۰، اس لیے دفعہ ۱۴۸ کی مساوات (۶) میں (۴) اور (۵) کی قیمتیں درج کرنے سے

$$۰ = \frac{ط}{لا} + م\frac{فرط}{فرلا} = ا(م+۱) - (۳م+۱)\frac{۳}{۴}\frac{(م^۲-۱)د}{ے م^۲ ٹ^۳}\times ر^۲$$

$$ا = \frac{۳م+۱}{م+۱}\times\frac{۳}{۴}\frac{(م^۲-۱)د ر^۲}{ے م^۲ ٹ^۳}$$

اس کو (۴) اور (۵) میں درج کرنے سے

$$\frac{ط}{لا} = \frac{۳}{۴}\frac{(م^۲-۱)د}{ے م^۲ ٹ^۳}\left(\frac{۳م+۱}{م+۱}ر^۲ - لا^۲\right) \quad \text{..............} (۶)$$

$$\frac{فرط}{فرلا} = \frac{۳}{۴}\frac{(م^۲-۱)د}{ے م^۲ ٹ^۳}\left(\frac{۳م+۱}{م+۱}ر^۲ - ۳لا^۲\right) \quad \text{............} (۷)$$

اس لیے (۵) دفعہ ۱۴۸ سے محیطی زور کی حدت

$$ف_ی = \frac{۳}{۴}\frac{د ما}{م ٹ^۳}\left\{(۳م+۱)ر^۲ - (م+۳)لا^۲\right\} \quad \text{..........} (۸)$$

اور (۶) دفعہ ۱۴۸ سے نیم قطری زور کی حدت صفحہ ۴۴۲

$$ف_{لا} = \frac{۳}{۴}\frac{د ما}{م ٹ^۳}(۳م+۱)(ر^۲ - لا^۲) \quad \text{..............} (۹)$$

زور کی یہ دونوں حدتیں مرکز لا = ۰ پر تختی کے دونوں جانب $ما = \pm\frac{ٹ}{۲}$ پر اعظم قیمت کو پہنچتی ہیں اور یہ اعظم قیمت حسبِ ذیل ہے:—

$$(اعظم)\ ف_{لا} = (اعظم)\ ف_ی = \pm\frac{۳}{۸}\frac{د ر^۲}{ٹ^۲}\cdot\frac{۳م+۱}{م} \quad \text{.........} (۱۰)$$

اگر م = ۳، تو $(اعظم)\ ف_{لا} = (اعظم)\ ف_ی = \frac{۵}{۴}د\frac{ر^۲}{ٹ^۲}$ .... (۱۱)

اگر م = ۴، تو $(اعظم)\ ف_{لا} = (اعظم)\ ف_ی = \frac{۳۹}{۳۲}د\frac{ر^۲}{ٹ^۲}$ ...... (۱۲)

اگر ر اور ٹ ایک ہی اکائی میں ہوں، مثلاً انچوں میں، تو زور کی حدتیں $ف_{لا}$ اور $ف_ی$ اُنہی اکائیوں میں ہونگے جن میں د ہوگا جو عام طور پر

پونڈ فی مربع انچ ہوتی ہیں ۔

(۶) اور (۷) سے قیمتیں درج کرنے سے مساوات (۱) اور (۲) دفعہ ۱۴۸ حسبِ ذیل ہونگے :-

$$\text{س}_{\text{ی}} = \text{ما} \times \frac{\text{ط}}{\text{لا}} = \frac{3}{4}\,\frac{(\text{م}^2-1)\,\text{دما}}{\text{ے م}^2\,\text{ٹ}^3}\left(\frac{3\text{م}+1}{\text{م}+1}\,\text{ر}^2 - \text{لا}^2\right) \quad \ldots\ldots (13)$$

$$\text{س}_{\text{لا}} = \text{ما} \times \frac{\text{فرط}}{\text{فرلا}} = \frac{3}{4}\,\frac{(\text{م}^2-1)\,\text{دما}}{\text{ے م}^2\,\text{ٹ}^3}\left(\frac{3\text{م}+1}{\text{م}+1}\,\text{ر}^2 - 3\text{لا}^2\right) \quad \ldots\ldots (14)$$

یہ دونوں لا = ۰، ما = $\pm \frac{\text{ٹ}}{2}$ پر ایک ہی اعظم قیمت کو پہنچتے ہیں اور اس وقت

$$(\text{اعظم})\ \text{ے} \times \text{س}_{\text{لا}} = (\text{اعظم})\ \text{ے} \times \text{س}_{\text{ی}} = \pm \frac{3}{8}\,\frac{(\text{م}-1)(3\text{م}+1)}{\text{م}^2} \times \text{د} \times \frac{\text{ر}^2}{\text{ٹ}^2} \quad \ldots (15)$$

اگر م = ۳، تو $(\text{اعظم})\ \text{ے} \times \text{س}_{\text{لا}} = (\text{اعظم})\ \text{ے} \times \text{س}_{\text{ی}} = \frac{5}{6}\,\text{د} \times \frac{\text{ر}^2}{\text{ٹ}^2}$ ....(16)

اگر م = ۴، تو $(\text{اعظم})\ \text{ے} \times \text{س}_{\text{لا}} = (\text{اعظم})\ \text{ے} \times \text{س}_{\text{ی}} = \frac{117}{128} \times \text{د} \times \frac{\text{ر}^2}{\text{ٹ}^2}$ ...(17)

اور یہ لچکدار مضبوطی کے "اعظم فساد" والے نظریے (دفعہ ۲۵) کی رُو سے لچکدار مضبوطی کا ناپ ہے ۔ دیکھو ایک متشاکل لداؤ اور سہاروں کی دائری تختی کے مرکز پر ف$_{\text{ی}}$ = ف$_{\text{لا}}$، اور چونکہ چہروں کے علی القوائم زور کو ہم نظر انداز کر رہے ہیں اس لیے دفعہ ۱۹ سے

$$\text{ے} \times \text{س}_{\text{ی}} = \text{ے} \times \text{س}_{\text{لا}} = \frac{\text{م}-1}{\text{م}} \times \text{ف}_{\text{ی}} = \frac{\text{م}-1}{\text{م}} \times \text{ف}_{\text{لا}}$$

دیگر تمثیلیں دفعات ۱۵۰ تا ۱۵۲ میں دی گئی ہیں ۔

تختی میں جزی زور — سیدھے شہتیروں کے طریقے (دفعہ ۱۷) کی پیروی کر کے انتصابی جزی زور تقریبی طور پر معلوم کیا جا سکتا ہے ۔ (۱) سے اس کی اوسط حدت نصف قطر لا پر حسبِ ذیل ہوگی :

ق ÷ (ٹ × لا × مف فد) یا د ۳ لا۲ ÷ ۲ ۳ لاٹ = دلا/ٹ۲

اور اگر اس کو تختی کی موٹائی میں اسی طرح بدلتا ہوا مانا جائے جس طرح مستطیلی تراش کے شہتیر کی گہرائی میں بدلتا ہے (شکل ۹۵ اور دفعہ ۱۷) تو اس کی اعظم حدت جو وسطی سطح ما = ۰ پر واقع ہوگی اوسط کی ۳/۲ ہوگی یعنی ——

۳/۴ . دلا/ٹ

اس کی اعظم قیمت

۳/۴ . در/ٹ .... (۱۸)

محیط لا = ر پر واقع ہوتی ہے ۔ اس کی مقدار (۱۰) کے مقابلے میں اسی صورت میں قابل لحاظ ہوگی کہ ٹ/ر چھوٹا نہ ہو ۔ ہم اپنے نظریے میں زور کی حدت میں (۱۸) کی جیسی مقداریں نظر انداز کر دیے رہے ہیں اور نیز انتصابی راست فشاری زور کو نظر انداز کر رہے ہیں جس کی قیمت تختی کے بالائی چہرے پر ف ہے اور بدلتے ہوئے نچلے چہرے پر صفر ہوتی ہے ۔ (۱۸) کی مقدار کے متمم جزی زوروں سے انہی مقدار کے دو مساوی اور مخالف خاص زور پیدا ہونگے اور ان سے ایک اعظم خاص فساد سَ پیدا ہوگا جس کے لیے دفعہ ۹ اکی رُو سے

م + ۱/م × ۳/۴ در/ٹ = سَ × مے

انصراف کی شکل —— فرض کرو کہ نصف قطر لا پر تختی کی تعدیلی یا وسطی سطح کا انصراف ابتدائی محل سے ی ہے (دیکھو اشکال ۱۹۲ اور ۱۹۴)۔ تب کوئی نصف النہاری مستوی تعدیلی سطح کو جس خط پر قطع کرے اس کے اُفق سے ڈھال کا مماس —— فری/فرلا = مس طہ ہوگا ۔ انصراف اور ڈھال شہتیر کی طرح خفیف فرض کیے گئے ہیں اس لیے مس طہ کو طہ کے مساوی لیا جا سکتا ہے اور (۶) سے :—

$$-\frac{\text{ف ی}}{\text{ف لا}} = \text{ط} = \frac{3}{4}\,\frac{(\text{م}^2-1)\,\text{د}}{\text{ے م}^2\,\text{ط}^3}\left(\frac{3\text{م}+1}{\text{م}+1}\,\text{ر}^2\,\text{لا} - \text{لا}^3\right) \quad \text{(۱۹)}$$

$$\text{ی} = -\frac{3}{4}\,\frac{(\text{م}^2-1)\,\text{د}}{\text{ے م}^2\,\text{ط}^3}\left(\frac{3\text{م}+1}{\text{م}+1}\,\frac{\text{ر}^2\,\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^4}{4} + \text{ج}\right) \quad \text{(۲۰)}$$

اور چونکہ لا = ر پر ی = ۰ اس لیے

$$\text{ج} = -\frac{\text{ر}^2}{4}\cdot\frac{5\text{م}+1}{\text{م}+1}$$

اور $$\text{ی} = -\frac{3}{8}\,\frac{(\text{م}^2-1)\,\text{د}}{\text{ے م}^2\,\text{ط}^3}\left(\frac{3\text{م}+1}{\text{م}+1}\,\text{ر}^2\,\text{لا}^2 - \frac{\text{لا}^4}{2} - \frac{5\text{م}+1}{\text{م}+1}\,\frac{\text{ر}^4}{2}\right) \quad \text{(۲۱)}$$

جو مرکز لا = ۰ پر اپنی اعظم قیمت

$$\frac{3}{16}\,\frac{(\text{م}-1)(5\text{م}+1)\times \text{د ر}^4}{\text{م}^2\,\text{ے ط}^3} \quad \text{(۲۲)}$$

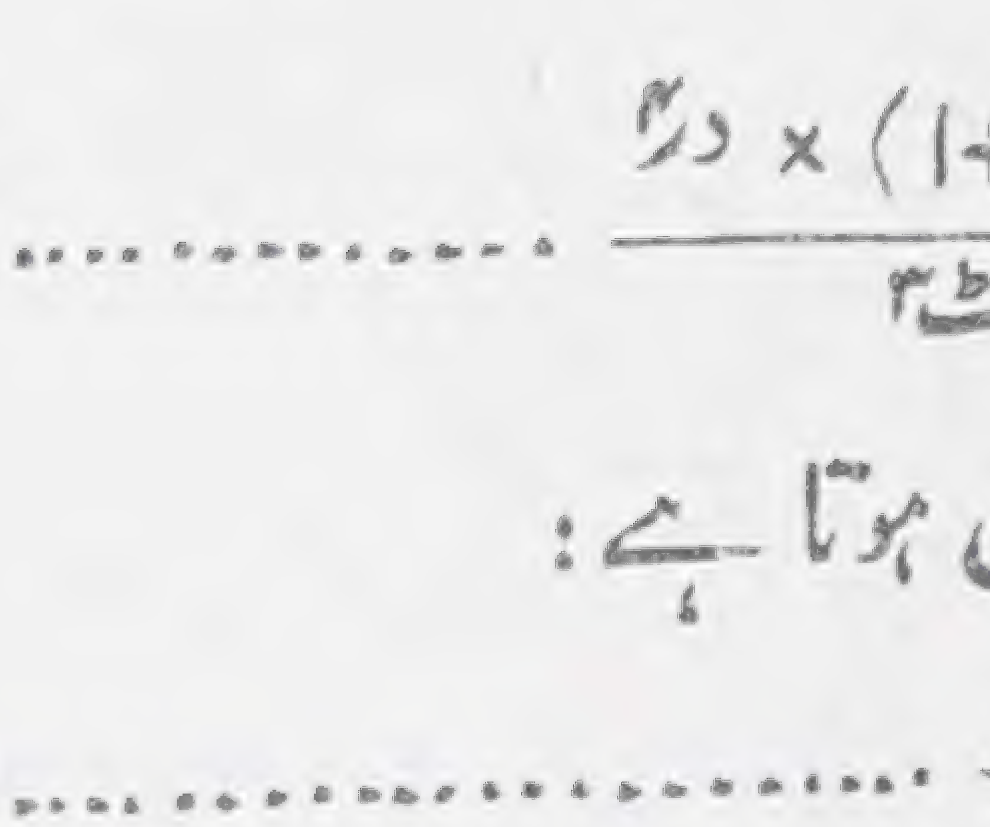
کو پہنچتا ہے اور م = ۳ کے لیے حسبِ ذیل ہوتا ہے:

$$\frac{2}{3}\,\frac{\text{د ر}^4}{\text{ے ط}^3} \quad \text{(۲۳)}$$

۱۵۰ - دائری تختی محیط پر جکڑی ہوئی اور چہرے پر یکساں دباؤ کے تحت

صفحہ ۴۴۴

اُفقی دائری تختی اُفقی سمت (شکل ۱۹۵) میں مضبوط جکڑی ہوئی ہو تو اس کو محیط پر آزادانہ سہاری ہوئی تختی کے ساتھ وہی نسبت ہے جو سروں پر چنے ہوئے شہتیر کو سروں پر آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے ساتھ ہوتی ہے۔ دفعہ ۱۴۹ کا عمل مساوات (۵) تک صحیح رہیگا۔



شکل ۱۹۵

اب چونکہ لا = ۰ پر ط = ۰ اس لیے ب = ۰، ا کا تعین کرنے والی شرط یہ ہے کہ محیط لا = ر پر ط = ۰، اس لیے مساوات (۴) دفعہ ۱۴۹ سے

$$\text{ا} = \frac{۳}{۴}\,\frac{(\text{م}^{۲}-۱)\,\text{و}}{\text{ے}\,\text{م}^{۲}\,\text{ٹ}^{۳}}\,\text{ر}^{۲} \qquad \text{(۱)}$$

اس کو (۴) اور (۵) دفعہ ۱۴۹ میں درج کرنے سے

$$\frac{\text{ط}}{\text{لا}} = \frac{۳}{۴}\,\frac{(\text{م}^{۲}-۱)\,\text{و}}{\text{ے}\,\text{م}^{۲}\,\text{ٹ}^{۳}}\left(\text{ر}^{۲}-\text{لا}^{۲}\right) \qquad \text{(۲)}$$

$$\frac{\text{فرط}}{\text{فرلا}} = \frac{۳}{۴}\,\frac{(\text{م}^{۲}-۱)\,\text{و}}{\text{ے}\,\text{م}^{۲}\,\text{ٹ}^{۳}}\left(\text{ر}^{۲}-۳\,\text{لا}^{۲}\right) \qquad \text{(۳)}$$

اس لیے (۵) دفعہ ۱۴۸ میں درج کرنے سے

$$\text{ف}_{\text{ی}} = \frac{۳}{۴}\,\frac{\text{و ما}}{\text{م}\,\text{ٹ}^{۳}}\left\{(\text{م}+۱)\,\text{ر}^{۲}-(\text{م}+۳)\,\text{لا}^{۲}\right\} \qquad \text{(۴)}$$

اور (۶) دفعہ ۱۴۸ میں درج کرنے سے

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{۳}{۴}\,\frac{\text{و ما}}{\text{م}\,\text{ٹ}^{۳}}\left\{(\text{م}+۱)\,\text{ر}^{۲}-(۳\,\text{م}+۱)\,\text{لا}^{۲}\right\} \qquad \text{(۵)}$$

یہ دونوں زور کی حدتیں تختی کے چہروں پر مرکز لا = ۰ اور محیط لا = ر پر مخالف علامتوں کی انتہائی قیمتوں کو پہنچتے ہیں - تختی میں خاؤ کے زور کی سب میں بڑی حدت وہ ہے جو محیط پر نیم قطری زور کی ہے - (۵) میں لا = ر رکھنے سے

$$\text{ف}_{\text{لا}} = -\frac{۳}{۴}\,\frac{\text{و ما}\,\text{ر}^{۲}}{\text{ٹ}^{۳}} \qquad \text{(۶)}$$

جو $\pm \frac{\text{ٹ}}{۲}$ کے لیے حسب ذیل ہو جاتا ہے :-

$$(\text{اعظم})\ \text{ف}_{\text{لا}} = \mp\,\frac{۳}{۴}\,\frac{\text{ر}^{۲}}{\text{ٹ}^{۲}} \times \text{و} \qquad \text{(۷)}$$

مرکز لا = ۰ اور ما = $\pm \frac{\text{ط}}{2}$ پر نیم قطری اور محیطی زور حسبِ ذیل ہونگے:۔

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \text{ف}_{\text{ی}} = \frac{3}{8} \times \frac{\text{م}+1}{\text{م}} \times \frac{\text{ر}^2}{\text{ط}^2} \times \text{د} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

سب میں بڑے فساد صریحاً لا = ر پر کے نیم قطری فساد ہیں، اور (۳) سے لا = ر، ما = $\pm \frac{\text{ط}}{2}$ پر قیمتیں حسبِ ذیل ہونگی :۔

$$(\text{اعظم})\ \text{س}_{\text{لا}} = \pm \text{ما} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}} = \mp \frac{3}{2}\ \frac{\text{م}^2-1}{\text{ے م}^2} \times \frac{\text{ر}^2}{\text{ط}^2}\ \text{د} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

لا = ۰ پر علامتیں بدل جاتی ہیں اور مقداریں نصف ہو جاتی ہیں اور $\text{س}_{\text{ی}}$ کی وہی قیمت ہوتی ہے جو $\text{س}_{\text{لا}}$ کی ہوتی ہے۔

$$\text{اگر م} = 3 \text{ تو (اعظم) سے } \text{س}_{\text{لا}} = \frac{2}{3}\ \frac{\text{ر}^2}{\text{ط}^2} \times \text{د} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$\text{اگر م} = 4 \text{ تو (اعظم) سے } \text{س}_{\text{لا}} = \frac{45}{64}\ \frac{\text{ر}^2}{\text{ط}^2} \times \text{د} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

دفعہ گزشتہ کی طرح، ڈھال کے زاویے کو اس کے مماس کے مساوی رکھیں اور تکمل کریں تو

$$-\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{طہ} = \frac{3}{4}\ \frac{(\text{م}^2-1)\,\text{د}}{\text{ے م}^2\,\text{ط}^3} \left(\text{ر}^2\,\text{لا} - \text{لا}^3 \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

انصراف $\qquad \text{ی} = -\frac{3}{4}\ \frac{(\text{م}^2-1)\,\text{د}}{\text{ے م}^2\,\text{ط}^3} \left(\frac{\text{ر}^2\,\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^4}{4} + \text{ج} \right) \quad \ldots\ldots\ldots (13)$

اور چونکہ لا = ر پر ی = ۰ اس لیے

$$\text{ج} = -\frac{\text{ر}^4}{4}$$

$$\text{ی} = \frac{3}{16}\ \frac{(\text{م}^2-1)\,\text{د}}{\text{ے م}^2\,\text{ط}^3} \left(\text{ر}^2 - \text{لا}^2 \right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

جو مرکز لا = ۰ پر اپنی اعظم قیمت

$$\frac{\text{۳}}{\text{۱۶}}\;\frac{(\text{م}^{\text{۲}}-\text{۱})}{\text{ے م}^{\text{۲}}\,\text{ٹ}^{\text{۳}}}\times \text{در}^{\text{۴}}$$

کو پہنچتا ہے اور اگر م = ۳ تو یہ حسبِ ذیل ہو جاتا ہے:

$$\frac{\text{۱}}{\text{۶}}\;\frac{\text{در}^{\text{۴}}}{\text{ے ٹ}^{\text{۳}}} \qquad (\text{۱۵})$$

جو آزادانہ سہاری ہوئی تختی کی قیمت (۲۳) دفعہ ۱۴۹ کا $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ ہے۔ انتصابی جزی زور کی حدت کا تخمینہ آزادانہ سہاری ہوئی تختی کی طرح کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۱ — ایک ۱۶ انچ قطر کے اُستوانے کا ایک سرا چپٹا اور ۱ انچ موٹا ہے۔ اگر اُستوانے میں دباؤ ۱۲۰ پونڈ فی مربع انچ ہو تو سرے میں زور کی اعظم حدت معلوم کرو اگر سرا اپنے محیط پر (ا) آزادانہ سہارا ہوا (ب) مضبوط جکڑا ہوا ہو۔ دونوں صورتوں میں معلوم کرو کہ کتنے سادہ راست زور سے یہی اعظم فساد پیدا ہونگے۔ پوائی سن کی نسبت $\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$ لو۔

(ا) مساوات (۱۱) دفعہ ۱۴۹ سے — صفحہ ۴۴۶

$$(\text{اعظم})\ \text{ف}_{\text{ل}} = \frac{\text{۵}}{\text{۴}}\times\text{۱۲۰}\times\text{۶۴} = \text{۹۶۰۰}\ \text{پونڈ فی مربع انچ}$$

(۱۶) دفعہ ۱۴۹ سے

$$(\text{اعظم})\ \text{ے}\times\text{س}_{\text{ل}} = \frac{\text{۵}}{\text{۶}}\times\text{۱۲۰}\times\text{۶۴} = \text{۶۴۰۰}\ \text{" " "}$$

(ب) مساوات (۷) دفعہ ۱۵۰ سے

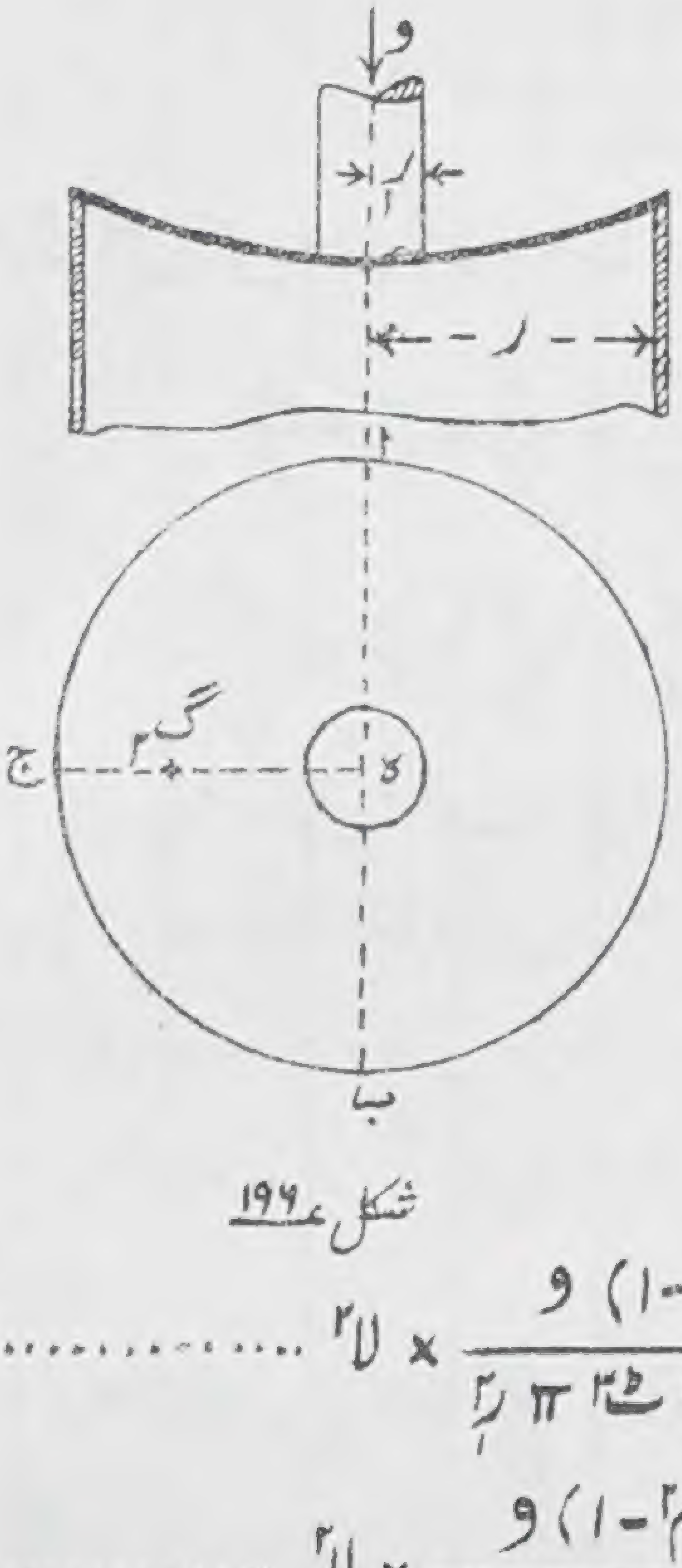
$$(\text{اعظم})\ \text{ف}_{\text{ل}} = \frac{\text{۳}}{\text{۴}}\times\text{۱۲۰}\times\text{۶۴} = \text{۵۷۶۰}\ \text{" " "}$$

(۱۰) دفعہ ۱۵۰ سے

$$(\text{اعظم})\ \text{ے}\times\text{س}_{\text{ل}} = \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\times\text{۱۲۰}\times\text{۶۴} = \text{۵۱۲۰}\ \text{" " "}$$

۱۵۱ — دائری تختی محیط پر آزادانہ سہاری ہوئی اور

مرکز پر لدی ہوئی ---- اگر ہم بوجھ کو تختی کے مرکز پر ایک نقطے پر مرتکز مانیں تو اگر تختی کا مادہ کامل لچکدار ہو تو مرکز پر زور اور فساد لاتناہی حاصل ہونگے۔ اس لیے ہم مرکزی بوجھ کو ایک چھوٹے دائری رقبہ پر پھیلا ہوا مانینگے جس کا نصف قطر $ر_ا$ ہے اور جو تختی کے ساتھ ہم مرکز ہے۔ تختی کا نصف قطر ر ہے (شکل ۱۹۶ء)۔ اس طرح تختی دو حصّوں میں تقسیم ہوگی اور اِن حصوں سے علیحدہ علیحدہ بحث کرنا ضروری ہے۔ اگر مجموعی بوجھ و ہو تو اندرونی یعنے لدے ہوئے حصے پر ایک یکساں بوجھ د فی اکائی رقبہ ہوگا جہاں



شکل ۱۹۶ء

$$د = \frac{و}{\pi\, ر_ا^۲}$$

اس طرح دفعہ ۱۴۹ کی مساوات (۳) کا حل حسبِ ذیل ہوگا:—

$$\frac{ط}{لا} = ا + \frac{ب}{لا^۲} - \frac{۳}{۴}\,\frac{و\,(م^۲-۱)}{ے\,م^۲\,ط^۳\,\pi\,ر_ا^۲} \times لا^۲ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\frac{فرط}{فرلا} = ا - \frac{ب}{لا^۲} - \frac{۹}{۴}\,\frac{و\,(م^۲-۱)}{ے\,م^۲\,ط^۳\,\pi\,ر_ا^۲} \times لا^۲ \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

تختی کے بیرونی حصے کے لیے ٹکڑے ا ب ج د (شکل ۱۹۳ء) پر بیرونی قوتوں کا معیار

$$\frac{د لا^۲}{۲} \times مف\,فہ \times مف\,لا \text{ کی بجائے } ق \times مف\,لا = \frac{د ر_ا^۲}{۲} \times مف\,فہ \times مف\,لا$$

ہوگا اور چونکہ $د = \frac{و}{\pi\, ر_ا^۲}$ اس لیے دفعہ ۱۴۹ کی مساوات (۳) حسبِ ذیل ہوجائیگی:—

$$\text{لا}\,\frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{طہ}}{\text{لا}} = -\frac{6(\text{م}^2-1)\,\text{و}}{2\,\text{ے}\,\text{م}^2\,\text{ط}^3} = \text{مستقل} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

صفحہ ۴۴۷ متمم تفاعل حسب سابق ہوگا، اور خاص تکملی حسب ذیل ہوگا :-

$$\text{طہ} = -\frac{3(\text{م}^2-1)\,\text{و}}{2\,\text{ے}\,\text{م}^2\,\text{ط}^3} \times \text{لا}^2\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

اس طرح مکمل حل یوں لکھا جاسکتا ہے :-

$$\frac{\text{طہ}}{\text{لا}} = \text{ج} + \frac{\text{د}}{\text{لا}^2} - \frac{3(\text{م}^2-1)\,\text{و}}{2\,\text{ے}\,\text{م}^2\,\text{ط}^3}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}} = \text{ج} - \frac{\text{د}}{\text{لا}^2} - \frac{3(\text{م}^2-1)\,\text{و}}{2\,\text{ے}\,\text{م}^2\,\text{ط}^3}\left(\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا} + 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

ان چار مستقلوں ا، ب، ج، د کو ذیل کی چار شرطوں سے معلوم کیا جاسکتا ہے جن سے چار سادہ ہمزاد مساواتیں حاصل ہوتی ہیں :

(۱) لا = ۰ پر ڈھال طہ = ۰ اس لیے (۱) میں ب = ۰

(۲) لا = ر$_1$ پر ڈھال طہ مساواتوں (۱) اور (۵) دونوں سے ایک ہی حاصل ہونا چاہیے۔

(۳) لا = ر$_1$ پر انحنا $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}}$ مساواتوں (۲) اور (۶) دونوں سے ایک ہی حاصل ہونا چاہیے۔

یہ تین شرطیں تختی جکڑی ہوئی ہو یا آزاد ہو دونوں صورتوں میں صحیح ہیں۔
آزاد تختی کے لیے باقی شرط یہ ہے :-

(۴) لا = ر پر زور کی حدت ف$_{\text{لا}}$ = ۰، اس لیے (۶) دفعہ ۱۴۸ سے

$$\frac{\text{طہ}}{\text{لا}} + \text{م}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}} = 0 \quad \text{جب کہ لا = ر}$$

شرائط (۲)، (۳) اور (۴) سے ا، ج، د میں جو تین سادہ ہمزاد مساواتیں حاصل ہونگی اُن کو حل کرنے سے

$$ا = \frac{۳(م^۲-۱)و}{\pi\ ے\ م^۲\ ٹ^۳}\left(\frac{م}{م+۱} + لوک_و \frac{ر}{ر_۱} - \frac{م-۱}{م+۱}\ \frac{ر_۱^۲}{۴ ر^۲}\right) \ldots\ldots (۷)$$

$$ج = \frac{۳(م^۲-۱)و}{\pi\ ے\ م^۲\ ٹ^۳}\left(\frac{م}{م+۱} + لوک_و ر - \frac{م-۱}{م+۱}\ \frac{ر_۱^۲}{۴ ر^۲}\right) \ldots\ldots (۸)$$

$$د = -\frac{۳}{۴}\ \frac{(م^۲-۱)\ و\ ر_۱^۲}{\pi\ ے\ م^۲\ ٹ^۳} \ldots\ldots (۹)$$

ان قیمتوں کو (اور ب = ۰ کو) (۱)، (۲)، (۵) اور (۶) میں درج کریں اور دفعہ ۱۴۸ کے ربط (۱)، (۲)، (۵) اور (۶) استعمال کریں تو تختی کے کسی حصے میں فساد اور زور معلوم ہونگے۔ ان کی اعظم قیمت معلوم کرنا کافی ہے جو مرکز پر واقع ہوگی۔

زور — تنشی زور اور فساد مثبت مانے گئے ہیں۔ $لا = ۰$، $ما = \pm \frac{ٹ}{۲}$ پر جہاں ٹ تختی کی موٹائی ہے :—

$$(اعظم)\ ف_{لا} = (اعظم)\ ف_ی = \frac{ے\ م\ ما}{م^۲-۱}\ (م+۱)\ ا$$

$$= \pm \frac{۳(م+۱)و}{۲\pi\ م\ ٹ^۲}\left(\frac{م}{م+۱} + لوک_و \frac{ر}{ر_۱} - \frac{م-۱}{م+۱}\ \frac{ر_۱^۲}{۴ ر^۲}\right) \ldots\ldots (۱۰)$$

جو $ر_۱ = ر$ کے لیے نتیجہ (۱۰) دفعہ ۱۴۹ کی شکل اختیار کرلیتا ہے۔ اگر م = ۳ تو صفحہ ۴۴۸

$$(اعظم)\ ف_{لا} = (اعظم)\ ف_ی = \frac{و}{\pi\ ٹ^۲}\left(\frac{۳}{۲} + ۲\ لوک_و \frac{ر}{ر_۱} - \frac{۱}{۴}\ \frac{ر_۱^۲}{ر^۲}\right) \ldots\ldots (۱۱)$$

اگر $\frac{ر_۱}{ر}$ چھوٹا ہو تو (۱۰) اور (۱۱) میں آخری رقم قابلِ نظرانداز ہوگی۔ دیکھو $ر_۱$ اگر صفر کے قریب آئے تو رقم $لوک_و \frac{ر}{ر_۱}$ بہت بڑی ہو جاتی ہے۔ لیکن موجودہ نظریے کو جو محض تقریبی ہے اس حد تک نہیں لے جانا چاہیے۔ بوجھ کے عمل کے مقام پر جو بیکر پذیر مغلوبیت پیدا ہوگی اس سے لچک کی مفروضہ شرائط میں ترمیم ہو جائیگی۔ بوجھ کے نیچے کا انتصابی فشاری زور $\frac{و}{\pi\ ر_۱^۲}$ بھی جس کو نظرانداز

کر دیا گیا ہے ر کے صفر کے قریب آنے سے لاتناہی کے قریب آتا ہے۔

جزی زور — اعظم انتصابی جزی زور نصف قطر لا = ر پر واقع ہوگا اور وہاں اس کی اوسط حدت $\frac{و}{۲\pi ر ٹ}$ ہوگی اور اعظم حدت اس کی تقریباً ۱۰۵ گنی ہوگی سوائے اس صورت کے کہ ر موٹائی ٹ سے بہت چھوٹا ہو اس جلے کی اعظم قیمت (۱۱) سے بہت کم ہوگی۔

فساد — مقدار (ے × اعظم خاص فساد) جو "اعظم فساد والے نظریے" (دفعہ ۲۵) کی رُو سے لچکدار مضبوطی کا ناپ ہے لا = ۰، ا = $\frac{ٹ}{۲}$ پر حسبِ ذیل ہوگا:—

$$(\text{اعظم})\ ے \times س_{لا} = (\text{اعظم})\ ے \times س_{ی} = ے \times ا \times \frac{ط}{لا}\ \text{یا}\ ے\ ا\ \frac{\text{فرط}}{\text{فرلا}}$$

$$= ے\ ا\ ا$$

$$= \frac{۳(م^۲-۱)و}{۲\pi م^۲ ٹ^۲}\left(\frac{م}{م+۱} + لوک_و \frac{ر}{ر_۱} - \frac{م-۱}{م+۱}\frac{ر_۱^۲}{۴ر^۲}\right) \quad \text{.........} (۱۲)$$

جو ہ = ر کے لیے نتیجہ (۱۵) دفعہ ۱۴۹ کی شکل اختیار کر لیتا ہے۔ اور م = ۳ کے لیے

$$(\text{اعظم})\ ے \times س = \frac{و}{\pi ٹ^۲}\left(۱ + \frac{۴}{۳} لوک_و \frac{ر}{ر_۱} - \frac{۱}{۶}\frac{ر_۱^۲}{ر^۲}\right) \quad \text{.........} (۱۳)$$

$\frac{ر_۱}{ر}$ چھوٹا ہو تو (۱۲) اور (۱۳) کی آخری رقم قابلِ نظر اندازی ہوگی۔

انصراف — تختی میں کسی مقام پر انصراف بیرونی حصے کی صورت میں (۵) سے $\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}}$ یا ط کو تکمل کرنے سے اور تکمل کے مستقل کو شرط (لا = ر پر د = ۰) سے حاصل کرنے سے حاصل ہوگا۔ اندرونی حصے کے لیے شرط یہ ہے کہ لا = ر پر د کی قیمت (۱) سے اور (۵) سے ایک ہی حاصل ہونی چاہیے۔ اگر ر، ر کے مقابلے میں چھوٹا ہو تو یہ کافی ہوگا کہ لا = ر پر بیرونی حصے کا انصراف معلوم کر لیا

جائے کیونکہ مرکز کا انصراف اس سے کچھ ہی زیادہ ہوگا۔

$$-\frac{\text{فر}_۱}{\text{فرلا}} = \text{ط} = \text{ج لا} + \frac{\text{د}}{\text{لا}} - \frac{۳(\text{م}^۲-۱)\,\text{و}}{\pi\,\text{ے}\,\text{م}^۲\,\text{ط}^۳} \times \text{لا لوک}_\text{و}\text{لا} \quad ......(۱۴)$$

ج اور د کی قیمت درج کریں اور تکمل کرکے مستقل اس شرط کے ذریعے حاصل کریں کہ لا = ر پر ء = ۰، اور اس کے بعد ان سب رقموں کو حذف کر دیں جن میں ر۱ بطور جزوِ ضربی کے شریک ہوتا ہو تو لا = ر پر

$$\text{ء} = \frac{۳(\text{م}-۱)(۳\text{م}+۱)\,\text{و}\,\text{ر}^۲}{۴\pi\,\text{ے}\,\text{م}^۲\,\text{ط}^۳} \text{(تقریباً)} \quad ....(۱۵)$$

اور اگر م = ۳ تو انصراف حسبِ ذیل حاصل ہوتا ہے:—

$$\frac{۵}{۳\pi}\,\frac{\text{و}\,\text{ر}^۲}{\text{ے}\,\text{ط}^۳} \quad ....(۱۶)$$

یعنی اس انصراف کا تقریباً ۲٫۵ گنا جو اسی بوجھ کے ساری تختی پر پھیلے ہونے کی صورت میں پیدا ہوتا ہے (دیکھو (۲۳) دفعہ ۱۴۹)۔

۱۵۲۔ دائری تختی محیط پر جکڑی ہوئی اور مرکز پر لدی ہوئی

لدی ہوئی — اس صورت کی بحث دفعہ گزشتہ کی آزادانہ سہاری ہوئی تختی کے مماثل ہے صرف اس فرق کے ساتھ کہ (۱)، (۲)، (۵) اور (۶) کے مستقل معلوم کرنے کے لیے چوتھی شرط یہ ہے کہ لا = ر پر ط = ۰۔ ا، ج، د کی سادہ مساواتیں حل کرنے سے

$$\text{ا} = \frac{۳(\text{م}^۲-۱)\,\text{و}}{\pi\,\text{ے}\,\text{م}^۲\,\text{ط}^۳}\left(\text{لوک}_\text{و}\frac{\text{ر}}{\text{ر}_۱} + \frac{\text{ر}_۱^۲}{۴\text{ر}^۲}\right) \quad ....(۱)$$

$$\text{ج} = \frac{۳(\text{م}^۲-۱)\,\text{و}}{\pi\,\text{ے}\,\text{م}^۲\,\text{ط}^۳}\left(\text{لوک}_\text{و}\text{ر}_۱ + \frac{\text{ر}_۱^۲}{۴\text{ر}^۲}\right) \quad ....(۲)$$

$$\text{د} = -\frac{۳}{۴}\,\frac{(\text{م}^۲-۱)\,\text{و}\,\text{ر}_۱^۲}{\pi\,\text{ے}\,\text{م}^۲\,\text{ط}^۳} \quad ....(۳)$$

ان قیمتوں سے (اور ب = ۰ سے) اور دفعہ ۱۵۱ کے ربط (۱)، (۲)، (۵)، (۶) اور دفعہ ۱۴۸ کے ربط (۱)، (۲)، (۵) اور (۶) سے تختی میں ہر جگہ کے فِشار اور زور معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ ہم مرکز اور محیط کے لیے اِن پر غور کرینگے۔ تنشی قیمتیں مثبت سمجھی جائینگی۔

زور — لا = ۰، ما = $\pm \frac{ٹ}{۲}$ پر —

$$ف_{لا} = ف_{ی} = \frac{ے م ما}{م^۲ - ۱}(م+۱)\,ا = \frac{۳(م+۱)\,و}{۳۲\, م\, ٹ^۲}\left(لوک_و \frac{ر}{ر_۱} + \frac{ر_۱^۲}{۴\, ر^۲}\right) \quad \text{......(۴)}$$

اگر $\frac{ر_۱}{ر}$ چھوٹا ہو تو اخیر رقم قابلِ نظر اندازی ہوگی اور $ر_۱ = ر$ کے لیے اس کی مقدار (۸) دفعہ ۱۵۰ کی شکل اختیار کر لیتی ہے۔ اگر م = ۳ تو (۴) حسبِ ذیل ہو جاتی ہے:-

$$ف_{لا} = ف_{ی} = \frac{و}{۳۲\, ٹ^۲}\left(۲\, لوک_و \frac{ر}{ر_۱} + \frac{ر_۱^۲}{۲\, ر^۲}\right) \quad \text{..........(۵)}$$

جو آزادانہ سہاری ہوئی تختی کی قیمت (۱۱) دفعہ ۱۵۱ سے ہمیشہ کم ہوگی۔ لا = ر کے لیے دفعہ ۱۴۸ کی مساوات (۶) اور دفعہ ۱۵۱ کی مساوات (۵) اور (۶) اور دفعہ ہذا کے مستقل استعمال کرنے سے

$$ف_{لا} = \frac{ے م ما}{م^۲-۱}\left[(م+۱)\,ج - (م-۱)\frac{د}{ر^۲} - \frac{۳(م^۲-۱)\,و}{۳۲\, ے\, م^۲\, ٹ^۳}\left\{(م+۱)\,لوک_و ر + م\right\}\right]$$

صفحہ ۴۵۰ اور ما = $\pm \frac{ٹ}{۲}$ کے لیے ج اور د کی قیمتیں رکھنے سے

$$ف_{لا} = \mp \frac{۳}{۲}\frac{و}{۳۲\, ٹ^۲}\left(۱ - \frac{ر_۱^۲}{۲\, ر^۲}\right) \text{ یا } \frac{و}{۳۲\, ٹ^۲}\left(\frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۴}\frac{ر_۱^۲}{ر^۲}\right) \quad \text{.........(۶)}$$

جو $ر_۱ = ر$ کے لیے (۷) دفعہ ۱۵۰ کی شکل اختیار کر لیتا ہے۔

اب (۵) اور (۶) کی اضافی مقداروں کو دیکھنا باقی ہے۔

لا = ۰ پر کا $ف_{لا}$، لا = ر پر کے $ف_{لا}$ سے بڑا ہوگا

اگر $۲\, لوک_و \frac{ر}{ر_۱} + \frac{ر_۱^۲}{۲\, ر^۲} > \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۴}\frac{ر_۱^۲}{ر^۲}$

یعنی اگر $\text{لوک}_\text{و}\frac{\text{ر}}{\text{ر}_۱} > \frac{۳}{۴} - \frac{۵}{۸}\left(\frac{\text{ر}_۱}{\text{ر}}\right)^۲$

جو $\frac{\text{ر}}{\text{ر}_۱} >$ تقریباً ۱٫۷ کے لیے پورا ہوتا ہے یعنی تختی میں مرکز پر کی زور کی حدت سب میں زیادہ ہوگی اگر تختی کا قطر بوجھ کے نیچے کے رقبے کے ۱٫۷ گنے سے زیادہ ہو۔

فساد — مرکز $\text{لا} = ۰$ پر

$$\text{ے}\times\text{س}_\text{لا} = \text{ے}\times\text{س}_\text{ی} = \text{ے}\times\text{ما}\times۲$$

$$= -\frac{۳(\text{م}^۲-۱)\,\text{و}\,\text{ما}}{\pi\,\text{م}^۲\,\text{ط}^۳}\left(\text{لوک}_\text{و}\frac{\text{ر}}{\text{ر}_۱} + \frac{\text{ر}_۱^۲}{۴\text{ر}^۲}\right)$$

اور $\text{ما} = \pm\frac{\text{ط}}{۲}$، $\text{لا} = ۰$ پر

$$\text{ے}\times\text{س}_۱ = \pm\frac{۳(\text{م}^۲-۱)\,\text{و}}{۲\pi\,\text{م}^۲\,\text{ط}^۲}\left(\text{لوک}\frac{\text{ر}}{\text{ر}_۱} + \frac{\text{ر}_۱^۲}{۴\text{ر}^۲}\right) \quad \text{..........} (۷)$$

اگر $\frac{\text{ر}_۱}{\text{ر}}$ چھوٹا ہو تو آخری رقم قابلِ نظراندازی ہوگی۔ $\text{م} = ۳$ کے لیے

$$\text{ے}\times\text{س}_۱ = \frac{\text{و}}{\pi\,\text{ط}^۲}\left(\frac{۴}{۳}\text{لوک}\frac{\text{ر}}{\text{ر}_۱} + \frac{۱}{۳}\frac{\text{ر}_۱^۲}{\text{ر}^۲}\right) \quad \text{..........} (۸)$$

محیط پر $\text{لا} = \text{ر}$، $\text{ما} = \pm\frac{\text{ط}}{۲}$ کے لیے ج اور د کی اوپر کی قیمتیں استعمال کرنے سے

$$\text{ے}\times\text{س}_\text{لا} = \text{ے}\times\text{ما}\times\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}} = \mp\frac{۳(\text{م}^۲-۱)\,\text{و}}{۲\pi\,\text{م}^۲\,\text{ط}^۲}\left(۱-\frac{\text{ر}_۱^۲}{۲\text{ر}^۲}\right) \quad \text{....} (۹)$$

جو $\text{ر}_۱ = \text{ر}$ کے لیے (۹) دفعہ ۱۵۰ سے مطابق ہوتا ہے۔ اگر $\text{م} = ۳$ تو

$$\text{ے}\times\text{س}_\text{لا} = \frac{\text{و}}{\pi\,\text{ط}^۲}\left(\frac{۴}{۳} - \frac{۲}{۳}\frac{\text{ر}_۱^۲}{\text{ر}^۲}\right) \quad \text{............} (۱۰)$$

ہے × س لا کی قیمت مرکز پر محیط سے (م کی تمام قیمتوں کے لیے) زیادہ ہوگی اگر

$$\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{ر}}{\text{ر}_{\text{۱}}} + \frac{\text{ر}_{\text{۱}}^{\text{۲}}}{\text{۴ ر}^{\text{۲}}} > \text{۱} - \frac{\text{ر}_{\text{۱}}^{\text{۲}}}{\text{۲ ر}^{\text{۲}}}$$

یعنی اگر

$$\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{ر}}{\text{ر}_{\text{۱}}} > \text{۱} - \frac{\text{۳}}{\text{۴}} \frac{\text{ر}_{\text{۱}}^{\text{۲}}}{\text{ر}^{\text{۲}}}$$

جو $\frac{\text{ر}}{\text{ر}_{\text{۱}}}$ > تقریباً ۴،۲ کے لیے پورا ہوتا ہے یعنی تختی میں مرکز پر کا فساد نسب میں زیادہ ہوگا اگر تختی کا قطر بوجھ کے نیچے کے رقبے کے قطر کے ۴،۲ گنے سے زیادہ ہو۔

انتصابی جزی زور آزادانہ سہاری ہوئی تختی کے مماثل ہوگا۔

انصراف ـــــ دفعہ گزشتہ کی طرح یہ کافی ہوگا کہ $\frac{\text{ر}_{\text{۱}}}{\text{ر}}$ کی چھوٹی قیمت کے لیے اعظم انصراف پر غور کیا جائے۔ ج اور د کی اوپر کی قیمتیں (۱۴) دفعہ ۱۵۱ میں درج کریں، تکمل کریں اور تکمل کا مستقل اس شرط کے ذریعے معلوم کریں کہ لا = ر پر د = ۰ اور اس کے بعد وہ تمام رقمیں حذف کر دیں جن میں $\text{ر}_{\text{۱}}^{\text{۲}}$ بطور جزوِ ضربی کے شریک ہوتا ہے تو لا = $\text{ر}_{\text{۱}}$ کے لیے

$$\text{د} = \frac{\text{۳ (م}^{\text{۲}}\text{ - ۱) و}}{\text{۳۱ ہے م}^{\text{۲}}\text{ ٹ}^{\text{۳}}} \times \frac{\text{ر}^{\text{۲}}}{\text{۴}} \quad \text{.................(۱۱)}$$

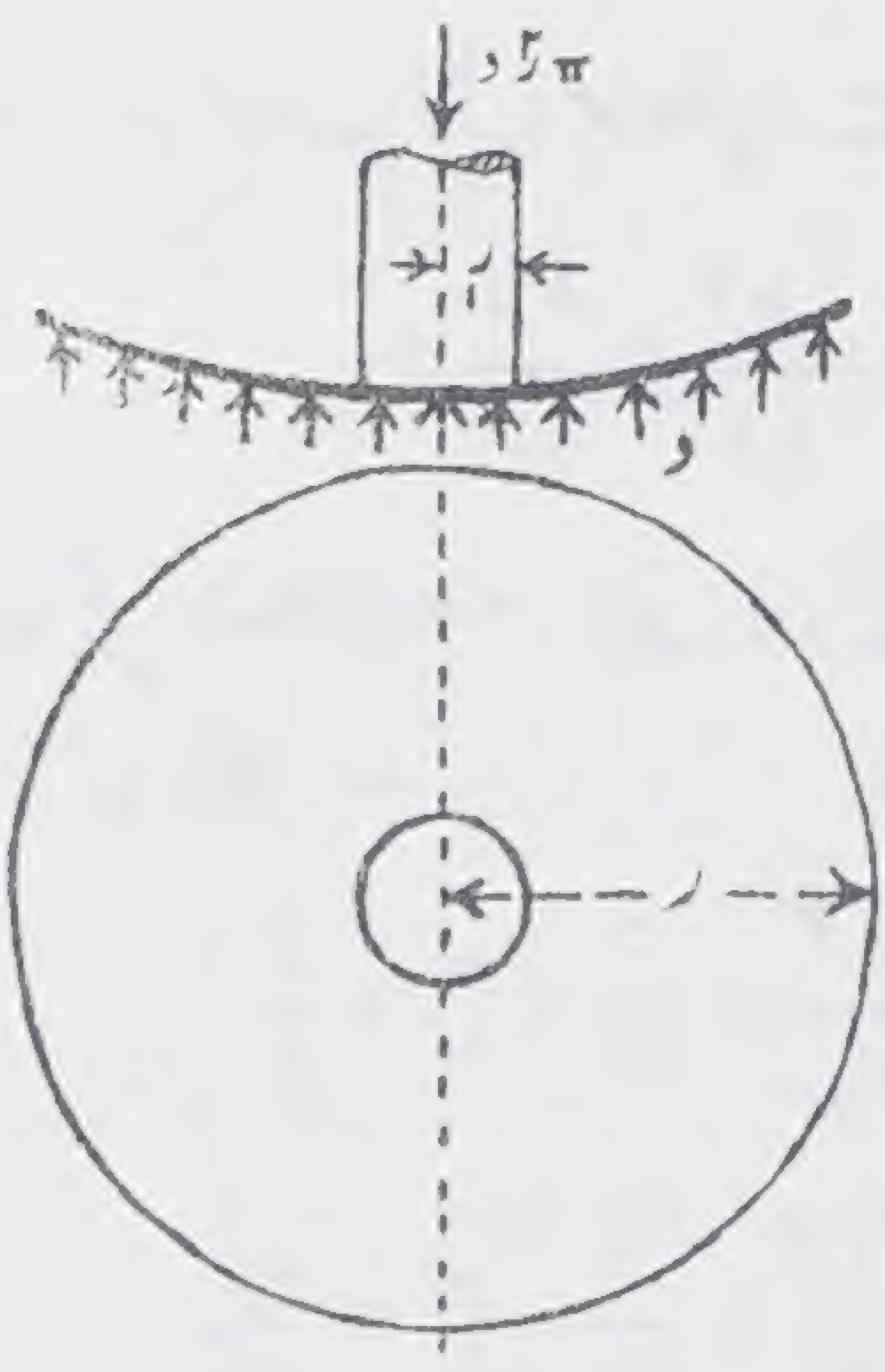
م = ۳ کے لیے اُس سے حاصل ہوتا ہے :ـــ

$$\text{د} = \frac{\text{۲}}{\text{۳۱۳}} \; \frac{\text{و ر}^{\text{۲}}}{\text{ہے ٹ}^{\text{۳}}}$$

جو آزادانہ سہاری ہوئی تختی کے انصراف (۱۶) دفعہ ۱۵۱ کا $\frac{۲}{۵}$ ہے۔

۱۵۳- دائری تختی یکساں دباؤ کے تحت اور مرکز پر سہاری ہوئی

سہاری ہوئی —— اس صورت کے لیے (شکل ۱۹۷) عمل بہت کچھ گزشتہ صورتوں کے عمل کے جیسا ہے اور اس سے بحث اختصار کے ساتھ کی جاسکتی ہے۔ سہارے کو سمجھا جائیگا کہ ایک یکساں دباؤ ایک دائری رقبے کے اوپر ہے جس کا نصف قطر ر ہے اور جو تختی کے ساتھ ہم مرکز ہے۔ تختی کا نصف قطر ر ہے۔ اندرونی حصے پر موثر دباؤ جس سے خماؤ پیدا ہوگا



شکل ۱۹۷

$$= د\left(۱ - \frac{ر^۲}{ر_۱^۲}\right) = د\,\frac{ر_۱^۲ - ر^۲}{ر_۱^۲}$$

اس لیے اندرونی حصے کے لیے دفعہ ۱۴۹ کی طرح :-

$$لا\,\frac{فر^۲طه}{فرلا^۲} + \frac{فرطه}{فرلا} - \frac{طه}{لا} = -\frac{۶\,(م^۲-۱)\,(ر^۲-ر_۱^۲)\,د}{ہ\,م^۲\,ٹ^۳\,ر_۱^۲}\,لا^۲ \quad .... (۱)$$

$$\frac{طه}{لا} = ا + \frac{ب}{لا^۲} - \frac{۳}{۴}\,\frac{(م^۲-۱)\,(ر^۲-ر_۱^۲)\,د}{ہ\,م^۲\,ٹ^۳\,ر_۱^۲}\,لا^۲ \quad ...... (۲)$$

$$\frac{فرطه}{فرلا} = ا - \frac{ب}{لا^۲} - \frac{۹}{۴}\,\frac{(م^۲-۱)\,(ر^۲-ر_۱^۲)\,د}{ہ\,م^۲\,ٹ^۳\,ر_۱^۲}\,لا^۲ \quad ...... (۳)$$

اور چونکہ لا = ۰ پر طه = ۰ اس لیے ب = ۰۔ (اگر تختی سہارے کو جکڑی ہوئی

ہوتی اور اس طرح لا = ر_1 پر ط = ۰ ہوتا تو اگر ر_1 چھوٹا ہو تو نتیجہ موجودہ صورت سے زیادہ مختلف نہیں ہوگا) ۔ بیرونی حصے کے لیے (۲) دفعہ ۱۴۹ کی بجائے یہ حاصل ہوگا:- صفحہ ۴۵۲

$$\text{ق} = \frac{\text{د}}{2}\,\text{مف فہ}\left(\text{ر}^2 - \text{لا}^2\right)$$

اور مساوات حسبِ ذیل ہو جاتی ہے :-

$$\text{لا}\frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{فرط}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{ط}}{\text{لا}} = -\frac{6\left(\text{م}^2-1\right)\text{د}}{\text{ے}\,\text{م}^2\,\text{ٹ}^3}\left(\text{ر}^2 - \text{لا}^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

اور خاص تکملی دفعات ۱۴۹ اور ۱۵۱ کے نتائج کی طرح ہوتا ہے اور اس طرح حل حسبِ ذیل ہوگا :-

$$\frac{\text{ط}}{\text{لا}} = \text{ج} + \frac{\text{د}}{\text{لا}^2} - \frac{3\left(\text{م}^2-1\right)\text{د}}{\text{ے}\,\text{م}^2\,\text{ٹ}^3}\left(\text{ر}^2\,\text{لوگ}_{\text{و}}\,\text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{4}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\frac{\text{فرط}}{\text{فرلا}} = \text{ج} - \frac{\text{د}}{\text{لا}^2} - \frac{3\left(\text{م}^2-1\right)\text{د}}{\text{ے}\,\text{م}^2\,\text{ٹ}^3}\left\{\text{ر}^2\left(\text{لوگ}_{\text{و}}\,\text{لا} + 1\right) - \frac{3\,\text{لا}^2}{4}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

ا، ج، د کو معلوم کرنے کے لیے تین سادہ مساواتیں ان شرطوں سے حاصل ہوتی ہیں کہ لا = ر_1 پر ط کی قیمت (۲) اور (۵) سے ایک ہی حاصل ہونی چاہیے، لا = ر_1 پر $\frac{\text{فرط}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت (۳) اور (۶) سے ایک ہی حاصل ہونی چاہیے،

اور چونکہ لا = ر پر ف = ۰۔ اس لیے لا = ر پر $\frac{\text{ط}}{\text{لا}} + \text{م}\frac{\text{فرط}}{\text{فرلا}} = 0$۔

ان مساواتوں کو حل کرنے سے :-

$$\text{ا} = \frac{3\left(\text{م}^2-1\right)\text{د}}{\text{ے}\,\text{م}^2\,\text{ٹ}^3}\left\{\text{ر}^2\,\text{لوگ}_{\text{و}}\frac{\text{ر}}{\text{ر}_1} + \frac{1}{4}\,\frac{\text{م}-1}{\text{م}+1}\left(\text{ر}^2 - \text{ر}_1^2\right)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\text{ج} = \frac{3\left(\text{م}^2-1\right)\text{د}}{\text{ے}\,\text{م}^2\,\text{ٹ}^3}\left\{\text{ر}^2\,\text{لوگ}_{\text{و}}\,\text{ر} + \frac{1}{4}\,\frac{\text{م}-1}{\text{م}+1}\left(\text{ر}^2 - \text{ر}_1^2\right)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\text{د} = -\frac{3}{4}\,\frac{\left(\text{م}^2-1\right)\text{د}\,\text{ر}^2\,\text{ر}_1^2}{\text{ے}\,\text{م}^2\,\text{ٹ}^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

ان قیمتوں سے کسی جگہ کے زور اور فساد دفعہ ۱۴۸ کے ربطوں کے استعمال سے لکھے جا سکتے ہیں۔

زور — مرکز لا = ۰ اور ما = $\pm \frac{\text{ٹ}}{2}$ پر

$$(\text{اعظم})\,\text{ف}_{\text{ی}} = (\text{اعظم})\,\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{\text{ے م ما}}{\text{م}^2-1}(\text{م}+1)\,\text{ا}$$

$$= \pm \frac{3\,\text{د}\,\text{ر}_1^2}{2\,\text{م}\,\text{ٹ}^2}\left\{(\text{م}+1)\,\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{ر}}{\text{ر}_1} + \frac{1}{4}(\text{م}-1)\left(1-\frac{\text{ر}^2}{\text{ر}_1^2}\right)\right\} \ldots (10)$$

جو ر = ر کے لیے صفر ہوتا ہے۔ اور م = ۳ کے لیے حسبِ ذیل ہوتا ہے :۔

$$(\text{اعظم})\,\text{ف}_{\text{لا}} = \pm\,\text{د}\,\frac{\text{ر}_1^2}{\text{ٹ}^2}\left\{2\,\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{ر}}{\text{ر}_1} + \frac{1}{4}\left(1-\frac{\text{ر}^2}{\text{ر}_1^2}\right)\right\} \ldots\ldots (11)$$

اگر $\frac{\text{ر}}{\text{ر}_1}$ چھوٹا ہو تو رقم $\frac{\text{ر}^2}{\text{ر}_1^2}$ کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ اس کا مقابلہ (۱۱) دفعہ ۱۵۱ اور (۵) دفعہ ۱۵۲ سے کرو۔ صفحہ ۴۵۳

فساد — لا = ۰، ما = $\pm \frac{\text{ٹ}}{2}$ پر

$$(\text{اعظم})\,\text{ے}\times\text{س}_{\text{لا}} = (\text{اعظم})\,\text{ے}\times\text{س}_{\text{لا}} = \text{ے}\times\text{ا}\times\text{ما}$$

$$= \pm \frac{3(\text{م}^2-1)\,\text{د}\,\text{ر}_1^2}{2\,\text{م}^2\,\text{ٹ}^2}\left\{\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{ر}}{\text{ر}_1} + \frac{1}{4}\,\frac{\text{م}-1}{\text{م}+1}\left(1-\frac{\text{ر}^2}{\text{ر}_1^2}\right)\right\} \ldots (12)$$

جو ر = ر کے لیے صفر ہوتا ہے۔ اور م = ۳ کے لیے حسبِ ذیل ہوتا ہے :۔

$$(\text{اعظم})\,\text{ے}\times\text{س} = \pm\,\text{د}\,\frac{\text{ر}_1^2}{\text{ٹ}^2}\left\{\frac{4}{3}\,\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{ر}}{\text{ر}_1} + \frac{1}{6}\left(1-\frac{\text{ر}^2}{\text{ر}_1^2}\right)\right\} \ldots\ldots (13)$$

اگر $\frac{\text{ر}}{\text{ر}_1}$ چھوٹا ہو تو رقم $\frac{\text{ر}^2}{\text{ر}_1^2}$ نظر انداز کی جا سکتی ہے۔ اس کا مقابلہ (۱۳) دفعہ ۱۵۱ اور (۸) دفعہ ۱۵۲ سے کرو۔

انصراف — گزشتہ دو دفعات کی طرح انصراف معلوم کریں تو $\frac{\text{ر}}{\text{ر}_1}$ کے چھوٹے ہونے کی صورت میں

$$(\text{اعظم})\,\text{ی} = \frac{3(\text{م}-1)(7\,\text{م}+3)}{16\,\text{م}^2}\,\frac{\text{د}\,\text{ر}_1^4}{\text{ے}\,\text{ٹ}^3} \ldots\ldots (14)$$

اور م = ۳ کے لیے

$$\text{(اعظم)}\ ا = \frac{\text{د ر}^{۲}}{\text{ے ط}^{۳}}$$

جو اس صورت کا $\frac{۳}{۵}$ ہے جب کہ تختی اسی مرکزی بوجھ کے ساتھ اپنے کنارے پر سہاری ہوئی ہو (دیکھو (۱۶) دفعہ ۱۵۱)۔

۱۵۴۔ غیر دائری تختیوں کے لیے تقریبی طریقے ــــ

ذیل کے موٹے تقریبی طریقے سے متشاکل شکل کی تختیوں میں اعظم خماؤ کا زور ایک محورِ تشاکل کے علی القوائم اوسط خماؤ کے زور سے تخمیناً معلوم ہوسکتا ہے۔ نتائج میں ایک عددی سرشریک ہوتا ہے جس کا تخمینہ تجربے سے یا دفعات گزشتہ کی دائری تختیوں کی بحث سے مقابلہ کرنے سے ہوسکتا ہے۔ یہ طریقہ اِس پر مشتمل ہے کہ ایک محور تشاکل میں سے گزرنے والی تراش پر خماؤ کا معیار اس محور کے ایک جانب کے بوجھوں اور سہاروں کے ردِ عملوں سے معلوم کیا جائے اور اس طرح یہ طریقہ صرف سہاری ہوئی تختیوں کے لیے کارآمد ہے، جکڑی ہوئی تختیوں کے لیے نہیں۔ لیکن دفعات گزشتہ سے معلوم ہوتا ہے کہ دائری تختیوں کی صورت میں زور اور فساد سادہ سہاری ہوئی تختیوں میں زیادہ ہوتے ہیں اور نیز عملاً اس پر بھروسہ بھی نہیں کیا جا سکتا کہ تختی کے کناروں کو جکڑنے سے وہ چھوٹے میلان بالکل رُک جائینگے جو کنارے پر "آزاد سہارے" کی صورت میں پیدا ہوتے ہیں۔ آزادانہ سہاری ہوئی تختی میں اعظم زور عموماً مرکز پر واقع ہوگا اور "جکڑی ہوئی" تختی میں عموماً ایک بیرونی کنارے پر ہوگا۔ ناقص جکڑنے سے یہ ہوسکتا ہے کہ سہارے ہوئے کناروں کا اتنا میلان رفع ہو جائے کہ تختی کے مرکز اور کناروں پر زور مساوی ہو جائیں اور اس طرح تختی کی اعظم مضبوطی حاصل ہو۔ اس کی مماثل صورت یعنی "در لبستہ" شہتیروں کے متعلق بھی اسی طرح کا ریمارک دفعہ ۸۴ میں کیا گیا تھا۔

دائری تختیوں پر اطلاق ــ یکساں دباؤ فی اکائی رقبہ ــ

صفحہ ۴۵۴ (شکل ۱۹۴) - نصف تختی ا ج ب پر غور کرو - اِس پر دباؤ $\frac{\pi ر^2}{2} د$ ہے اور حاصل دباؤ کا خطِ عمل مرکزِ ہندسی گ$_1$ میں سے گزرتا ہے جہاں ہ گ$_1$ = $\frac{4 ر}{3 \pi}$ - کنارے ا ج ب کا ردِّ عمل بھی $\frac{\pi ر^2}{2} د$ ہے اور اس کا مرکزِ عمل گ$_2$ ہے جو ہ سے $\frac{2 ر}{\pi}$ کے فاصلے پر ہے - بوجھ اور ردِّ عمل کی وجہ سے تراش ا ہ ب پر پیدا ہونے والے خماؤ کا معیار حسبِ ذیل ہوگا:-

$$م = \frac{\pi ر^2}{2} . د \left(\frac{2 ر}{\pi} - \frac{4 ر}{3 \pi} \right) = \frac{د ر^3}{3} \quad \text{.........} \quad (1)$$

ہم تراش ا ہ ب کی بیرونی سطحوں پر ا ب کی علی القوائم سمت میں خماؤ کے زور کی ایک اوسط حدت اس طرح محسوب کر سکتے ہیں کہ خماؤ کے معیار کو تراش کے مقیاس یعنی $\frac{1}{6} \times 2 ر \times ط^2$ یعنی $\frac{1}{3} ر ط^2$ سے تقسیم کریں جس سے حسبِ ذیل اوسط حدت حاصل ہوگی:-

$$\frac{د ر^3}{3} \div \frac{1}{3} ر ط^2 = د \times \frac{ر^2}{ط^2} \quad \text{.........} \quad (2)$$

لیکن (۱۰) دفعہ ۱۴۹ سے معلوم ہوتا ہے کہ زور کی اعظم حدت حاصل کرنے کے لیے جو ہ پر ہوتی ہے اس اوسط قیمت کو ایک عددی سر $\frac{3}{8} \times \frac{3 م + 1}{م}$ سے ضرب دینا چاہیے جو م = ۳ کے لیے ۱٫۲۵ کے مساوی ہوتا ہے اور اِس طرح زور کی اعظم حدت $1.25 \, د \frac{ر^2}{ط^2}$ حاصل ہوتی ہے۔

زور (ے × س) معلوم کرنے کے لیے، جو اکیلا عمل کر کے یہی اعظم فساد پیدا کریگا، یہ کرنا ہوگا کہ ایک اور عددی سر $\frac{م - 1}{م}$ سے ضرب دیا جائے جو م = ۳ کے لیے $\frac{2}{3}$ ہوتا ہے اور اس طرح زور $\frac{5}{6} . د \frac{ر^2}{ط^2}$ حاصل ہوتا ہے۔

مرکزی بوجھ و ـــــ اگر بوجھ و ایک نصف قطر ر۱ کے ہم مرکز دائرے پر یکساں پھیلا ہوا ہو (شکل ۱۹۶) تو اب کے گرد معیار حسبِ ذیل ہوگا:-

$$\frac{و}{۲}\left(\frac{ر^{۲}}{\pi}-\frac{ر_{۱}^{۴}}{\pi\,۳}\right)=\frac{و}{\pi}\left(ر-\frac{ر_{۱}^{۲}}{۳}\right)$$

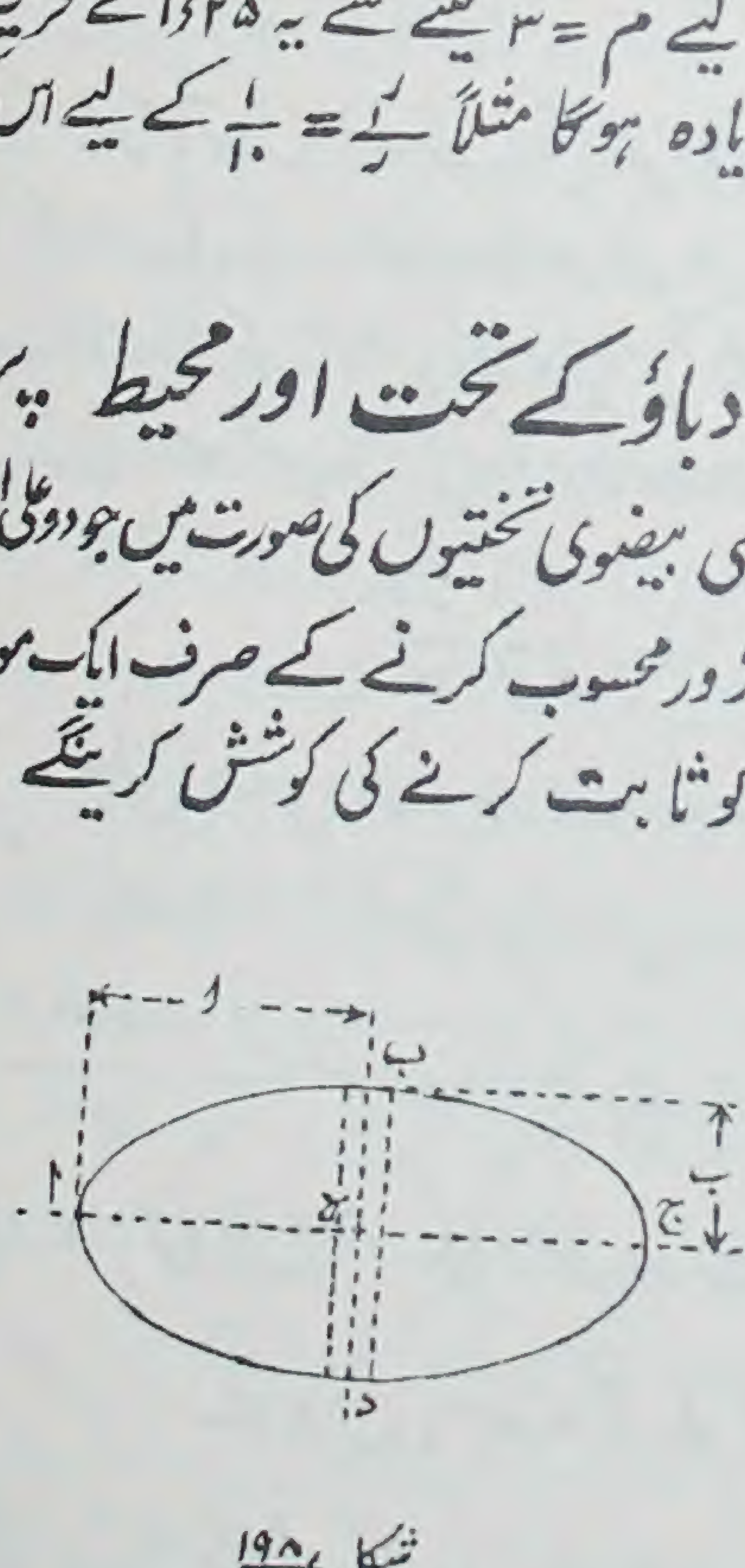
اور چونکہ مقیاس اوپر کی طرح $\frac{۱}{۳}$ ر ط۲ ہے اس لیے خماؤ کے زور کی اوسط حدت حسبِ ذیل ہوگی:-

$$\frac{و}{\pi\,ط^{۲}}\left(۳-۲\frac{ر_{۱}}{ر}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (۴)$$

مرکز پر زور کی اعظم حدت بتانے والا عددی سر (۱۰) دفعہ ۱۵۱) ر۱ اور ر کی نسبت پر منحصر ہوگا - $\frac{ر}{ر_{۱}}$ کی بڑی قیمتوں کے لیے م = ۳ لینے سے یہ ۱٫۲۵ کے قریب آئیگا، اور چھوٹی قیمتوں کے لیے اس سے زیادہ ہوگا مثلاً $\frac{ر_{۱}}{ر}=\frac{۱}{۱۰}$ کے لیے اس کی قیمت تقریباً ۲٫۲ ہوتی ہے۔

۱۵۵- بیضوی تختی یکساں دباؤ کے تحت اور محیط پر سہاری ہوئی

ـــــ ناقصی یا دیگر ایسی بیضوی تختیوں کی صورت میں جو دو علی التوالی محوروں کے گرد متشاکل ہوں ہم خماؤ کا زور محسوب کرنے کے صرف ایک موٹے تقریبی آزمائشی قاعدے کی معقولیت کو ثابت کرنے کی کوشش کرینگے جو انتہائی صورتوں کے لیے کام دینے کی غرض سے تجویز کیا گیا ہے - اگر



شکل ۱۹۸

اب ج د (شکل ۱۹۸) اس طرح کی ایک بیضوی تختی محیط پر سہاری ہوئی ہو اور اس کے خاص نیم محاور ھ ا اور ھ ب علی الترتیب ا اور ب ہوں تو اعظم انصراف صریحاً مرکز ھ پر واقع ہوگا اور وہاں ڈھال طہ صفر ہوگا - ھ ب پر اوسط ڈھال $\frac{صہ}{ب}$ ہوگا اور اوسط انحنا

یعنی ڈھال کی تبدیلی فی اکائی طول $\frac{\text{ص}}{\text{ب}^{2}}$ ہوگی۔ کسی نصف النہاری مستوی میں حقیقی انحنا متغیر ہوگا اور ہ پر اعظم قیمت کو پہنچیگا۔ اسی طرح ہ ا میں سے گزرنے والے نصف النہاری مستوی میں اوسط انحنا $\frac{\text{ص}}{\text{ا}^{2}}$ ہوگا اور اعظم قیمت ہ پر ہوگی۔ مرکز ہ پر جہاں کہ ڈھال صفر ہے ہم خماؤ کے نظریے کی رُو سے یا (۲) دفعہ ۱۴۸ سے یہ تسلیم کر سکتے ہیں کہ مختلف سمتوں میں خماؤ کے زور کی حدت انحنا $\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرلا}}\right)$ کے تناسب میں بدلتی ہے، اور اگر ہ ا اور ہ ب میں زور کا تغیر اِسی قاعدے کا پابند ہو تو ہ پر سمت ہ ب میں کا خماؤ کا زور یعنی تراش ا ج پر آڑا زور اس کے علی القوائم سمت کے زور کا $\frac{\text{ا}^{2}}{\text{ب}^{2}}$ گنا ہوگا۔ اس لیے اگر ا، ب سے بڑا ہو تو ہ پر سمت ہ ب میں خماؤ کا زور اس کے علی القوائم سمت سے زیادہ ہوگا اور ہر سمت سے زیادہ ہوگا۔

ایک بہت لمبے بیضوی پر غور کرو جس میں ا بہت بڑا ہے اور ب بہت چھوٹا۔ اب اگر ب د کو مرکزی خط لے کر کوئی پتلی پٹی مثلاً اکائی عرض کی کاٹ لی جائے تو اس پر یکساں دباؤ د نقطہ ہ پر خماؤ کا معیار $\frac{1}{8}\text{د}(\text{۲ب})^{2}$ یا $\frac{1}{2}\text{د ب}^{2}$ پیدا کریگا اور چونکہ اس پٹی کی تراش کا مقیاس $\frac{1}{6}\text{ٹ}^{2}$ ہے اس لیے خماؤ کے زور کی حدت $\frac{1}{2}\text{د ب}^{2} \div \frac{1}{6}\text{ٹ}^{2}$ ہوگی یعنی

$$\text{۳ د}\,\frac{\text{ب}^{2}}{\text{ٹ}^{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

کسی حقیقی بیضوی میں جس میں اس طرح پٹیاں نہ کاٹی جائیں پاس کی پٹیوں کا (جو اس مرکزی پٹی سے چھوٹی ہیں) اثر یہ ہوگا کہ قیمت (۱) کم ہو جائیگی۔ اس طرح قیمت (۱) کو ایک بالائی حد سمجھنا چاہیے جو بہت لمبے بیضوی کے لیے اختیار کی جا سکتی ہے۔

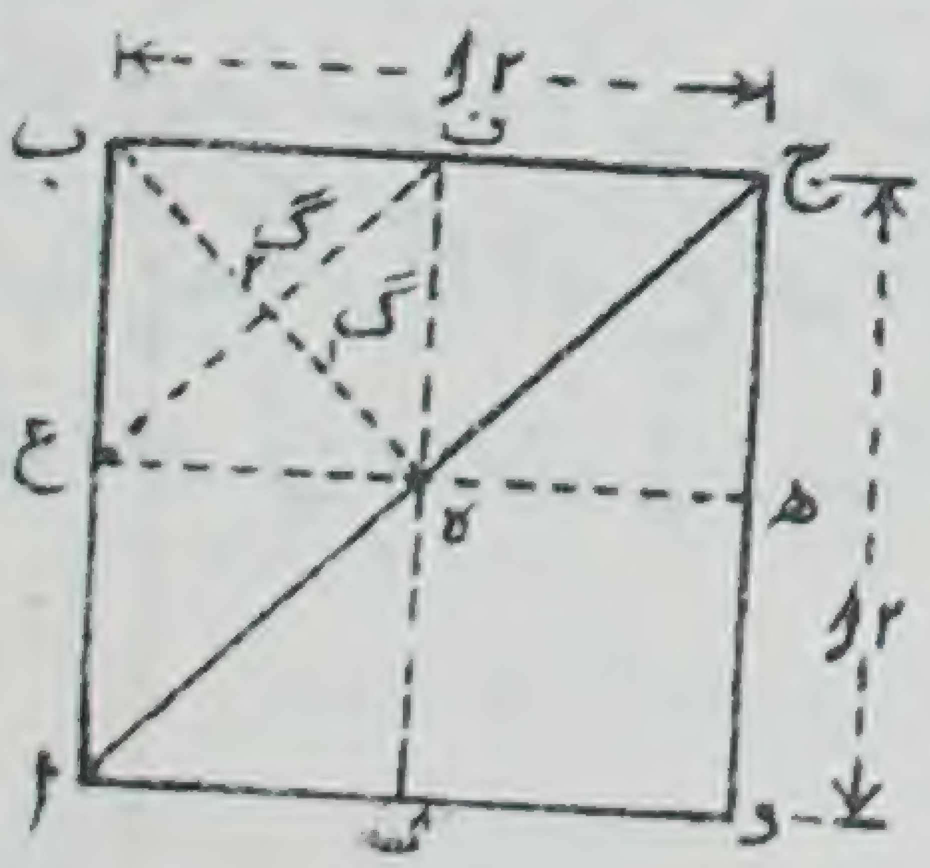
ناقص کی دوسری انتہائی صورت یہ ہے کہ دائرہ بن جائے اور

ا = ب ، اس صورت میں مرکز پر زور تقریباً ۱٫۲۵ د $\frac{ب^2}{ط^2}$ ہوگا (۱۱) دفعہ ۱۴۹)۔
درمیانی صورتوں کے لیے ایک آزمائشی قاعدہ اس طرح وضع کیا جا سکتا ہے کہ ایک ایسا عددی سر استعمال کیا جائے جو $\frac{ب}{ا}$ کا ایک خطی تفاعل ہو اور جس کی قیمت $\frac{ب}{ا}$ = ۰ پر ۳ کے قریب مثلاً ۲$\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{ب}{ا}$ = ۱ پر ۱٫۲۵ ہو۔ اس طرح خماؤ کے زور کی اعظم حدت تقریباً حسب ذیل ہوگی :—

$$۱٫۲۵ \left(۲ - \frac{ب}{ا}\right) د \frac{ب^2}{ط^2} \quad .... \quad (۲)$$

مرکزی بوجھ کے لیے بھی اسی طرح کا ایک قاعدہ بنایا جا سکتا ہے۔ صفحہ ۴۵۶

۱۵۶۔ مربع تختی یکساں دباؤ کے تحت اور محیط پر سہاری ہوئی —— فرض کرو کہ ا ب ج د (شکل ۱۹۹) ایک مربع کو تعبیر کرتی ہے جو اپنے محیط ا ع ب ف ج ھ د ک پر سہارا گیا ہے۔



شکل ۱۹۹

خماؤ کے معیار ایک وتر کے گرد یا ایک ضلع کے علی القوائم محور تشاکل کے گرد لیے سکتے ہیں۔ دوسری صورت میں کناروں پر ردِّ عمل کی نا معلوم تقسیم سے دقت پیش آئیگی اس لیے وتر ا ج کی تراش اختیار کی جائیگی۔ لیکن ہ پر خماؤ کے زور کی حدت تشاکل کی وجہ سے علی القوائم سمتوں ہ ج اور ہ ب میں مساوی ہوگی۔ نیز تشاکل کی رُو سے حدت علی القوائم سمتوں ہ ف اور ہ ھ میں بھی مساوی ہوگی۔ اس لیے تختی کے مرکزی نقطے ہ کے لیے زور کا ناقص (دفعہ ۱۶) ایک دائرہ ہوگا اور خماؤ کا زور کسی سمت میں

اس سے زیادہ نہیں ہوگا جو تختہ وتر ا ج کے علی القوائم ہے۔ اگر مربع کے ضلع کا طول ۲ ل ہو اور دباؤ فی اکائی رقبہ د ہو تو نصف مربع پر دباؤ ۲ ل^{۲} د ہوگا۔ اب کسی ضلع مثلاً ب ج پر جو ردِ عمل د ل^{۲} ہوگا وہ کسی طرح منقسم ہو اس کا حاصل ضلع کے وسطی نقطہ ف پر ہوگا۔ اسی طرح کنارے ا ب کے ردِ عمل کا حاصل د ل^{۲} نقطہ ع پر ہوگا۔ اس لیے ا ب اور ب ج کا مجموعی ردِ عمل ع اور ف کے وسطی نقطہ گ پر ہوگا جس کا فاصلہ ا ج سے $\frac{ل}{\sqrt{۲}}$ ہے۔ مثلث ا ب ج پر دباؤ کا مرکز گ$_{۱}$ ہوگا جو ا ج سے فاصلہ $\frac{۱}{۳}$ ہ ب یا $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ل ہے۔

اس طرح تراش ا ج پر خماؤ کا معیار

$$= ۲ ل^{۲} د \left(\frac{ل}{\sqrt{۲}} - \frac{\sqrt{۲}}{۳} ل \right) = \frac{۲ ل^{۳} د}{۳ \sqrt{۲}}$$

اور تختی کی موٹائی ط ہے اس لیے تراش ا ج کا مقیاس

$$= \frac{۱}{۶} \times ۲ \sqrt{۲} ل \times ط^{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۳} ل ط^{۲}$$

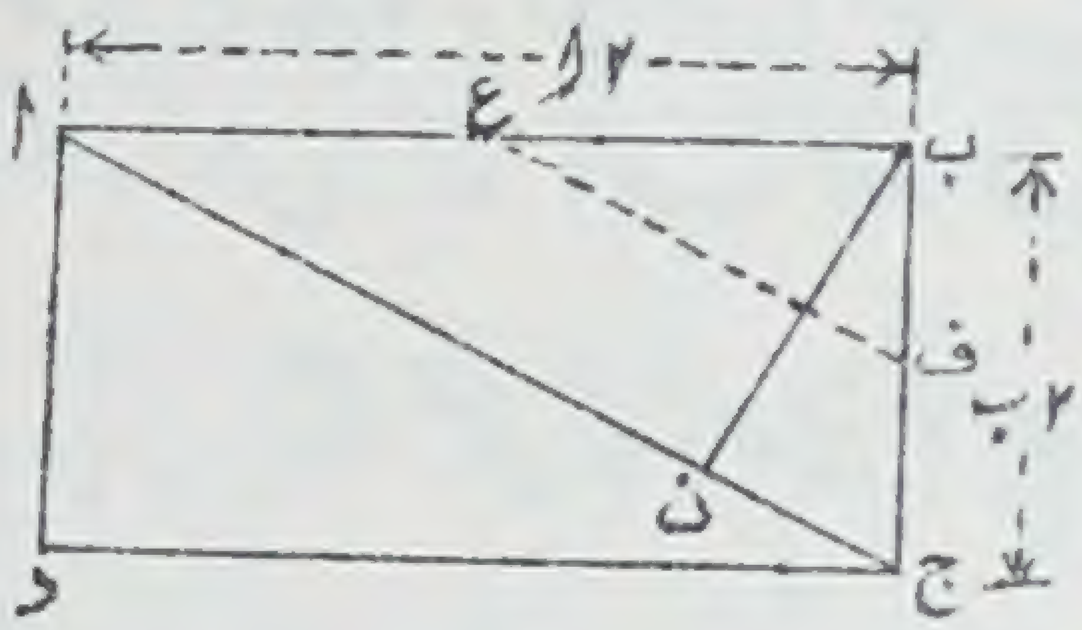
اس لیے بیرونی سطحوں میں خماؤ کی وجہ سے ا ج پر آڑے زور کی اوسط حدت

$$= \frac{۲ ل^{۳} د}{۳ \sqrt{۲}} \div \frac{\sqrt{۲}}{۳} ل ط^{۲} = د \times \frac{ل^{۲}}{ط^{۲}} \quad \text{.................} (۱)$$

اور یہ اُس قیمت کے مساوی ہے جو ایک دائرے کی صورت میں حاصل ہوتی ہے جس کا قطر مربع کے ضلع کے مساوی ہو (۲) دفعہ ۱۵۴)۔

۱۵۷۔ مستطیلی تختی یکساں دباؤ کے تحت اور محیط پر سہاری ہوئی ـــــ فرض کرو کہ مستطیلی ا ب ج د (شکل ۲۰۰) کے اضلاع ا ب اور ب ج علی الترتیب ۲ ل اور ۲ ب ہیں۔ تب اگر اضلاع بہت نامساوی نہ ہوں تو ہم یہ تسلیم کرسکتے ہیں کہ وتر ا ج پر

آڑا زور دوسری سمتوں سے زیادہ مختلف نہیں۔ ب سے ا ج پر عمود ب ن کھینچو۔ چونکہ کناروں ا ب اور ب ج پر حاصل ردِّ عمل ان کے وسطی نقاط



شکل ۲۰۰

صفحہ ۴۵۷ ع اور ف پر ہوگا اس لیے نصف مستطیل ا ب ج پر کے حاصل ردِّ عمل کا نقطۂ عمل خط ع ف میں ہوگا اور ا ج سے فاصلہ $\frac{۱}{۲}$ ب ن پر ہوگا۔ مثلث ا ب ج پر کے دباؤ کا مرکز مرکزِ ہندسی پر ہوگا جو ا ج سے $\frac{۱}{۳}$ ب ن کے فاصلے پر ہے اور دباؤ اور ردِّ عمل دونوں کی مقدار ۲ ا ب × د ہوگی۔ اس طرح ا ج پر خماؤ کا معیار

$$= \text{۲ ا ب} \times \text{د} \left(\frac{۱}{۲}\,\text{ب ن} - \frac{۱}{۳}\,\text{ب ن}\right) = \frac{۱}{۳}\,\text{ا ب د} \times \text{ب ن}$$

اور

$$\frac{\text{ب ن}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ج}}$$

یا

$$\text{ب ن} = \frac{\text{۴ ا ب}}{\text{۲}\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}} = \text{۲}\,\frac{\text{ا ب}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}}$$

تراش ا ج کا مقیاس

$$= \frac{۱}{۶} \times \text{۲}\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}} \times \text{ط}^{۲} = \frac{\text{ط}^{۲}}{۳}\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}$$

اس لیے ا ج پر آڑے خماؤ کے زور کی اوسط حدت

$$= \frac{۲}{۳}\,\frac{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}} \times \text{د} \div \frac{\text{ط}^{۲}}{۳}\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}} = \frac{\text{۲ ا}^{۲}}{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}} \times \text{د} \times \frac{\text{ب}^{۲}}{\text{ط}^{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

بہت لمبے مستطیل کے لیے جس میں $\frac{ل}{ب}$ بڑا ہو یہ حسبِ ذیل قیمت کے قریب آئیگا :-

$$۲د \frac{ب^{۲}}{ٹ^{۲}}$$

اور بہت لمبے بیضوی کی انتہائی صورت کے لیے جو استدلال کیا گیا تھا اس طرح استدلال کرنے سے ہم اس نتیجے پر پہنچ سکتے ہیں کہ لمبے ضلعوں کے متوازی محور پر آڑے زور کا اوسط

$$۳ \times د \times \frac{ب^{۲}}{ٹ^{۲}}$$

کے قریب آتا ہے - یہ ضابطہ ایسے فرش کے لیے استعمال ہوسکتا ہے جو کڑیوں سے سہارا ہوا ہو اور جس میں کڑیوں کے متوازی خم قابلِ نظر اندازی ہو۔

سوالات نمبر ۱۳

۱ - ایک دائری تختی کا قطر ۲۰ انچ اور موٹائی $\frac{۳}{۴}$ انچ ہے - اگر یہ محیط پر سادہ طور پر سہاری ہوئی ہو تو یہ کتنے دباؤ فی مربع انچ کو برداشت کریگی بغیر اس کے کہ زور کی حدت ۱۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ سے زیادہ ہو - (پوائی سن کی نسبت ۰.۳ لو) -

صفحہ ۵۸ ۲ - سوال نمبر ۱ کی تختی پر کتنا دباؤ جائز رکھا جا سکتا ہے اگر اعظم خاص فساد کو اس حد تک محدود رکھنا ہو جو ۱۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ کے سادہ راست زور سے پیدا ہو۔

۳ - سوال نمبر ۱ کو اس صورت کے لیے حل کرو کہ تختی کنارے پر جکڑی ہوئی ہو۔

۴ - سوال نمبر ۲ کو اس صورت کے لیے حل کرو کہ تختی کنارے پر جکڑی ہوئی ہو۔

۵ - ایک بے تھام دائری تختی $\frac{۱}{۲}$ انچ موٹی ہے اور محیط پر سہاری ہوئی ہے اور اس پر ۱۰۰ پونڈ فی مربع انچ کا دباؤ ہے - اگر اعظم زور کو ۵ ٹن فی مربع انچ تک

محدود رکھنا ہو تو اعظم جائز قطر معلوم کرو۔ (پوائی سن کی نسبت = ۰،۳)

۶ - ایک بیضوی تختی ۱ انچ موٹی ہے اور محیط پر سادہ طور پر سہاری ہوئی ہے۔ اگر اس کا سب میں بڑا طول ۳۰ انچ اور سب میں بڑا عرض ۱۰ انچ ہو اور جائز زور ۱۰۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہو تو تختی پر بے خطر دباؤ معلوم کرو۔

چودھواں باب

ارتعاش اور فاصل رفتاریں

۱۵۸۔ لچکدار ارتعاش ــــ اگر ایک جسم کو جو اپنے محل پر لچکدار قیود کی وجہ سے ٹھیرا ہوا ہو اس کے تعادل کے محل سے سرکا دیا جائے تو یہ جسم ارتعاش کرنے لگیگا جن کی نوعیت نظام کی کمیت یا جمود، اُن قیود کی صلابت جن کی لچکدار قوتیں حرکت پر اقتدار رکھتی ہیں، اور سرکاؤ یا خلل کی مقدار پر منحصر ہوگی۔ حرکت کا حیطہ جتنا بڑا ہو فساد اور اس کی وجہ سے وہ زور اتنے ہی بڑے ہونگے جو جسم کے سہاروں یا قیود میں پیدا ہونگے۔ انہی فسادوں اور زوروں کی وجہ سے ارتعاش کی بحث مضبوطئ اشیا کے فن میں ایک اہم بحث ہوتی ہے۔ اور یہ یاد رکھنا چاہیے کہ ارتعاشی زور گھٹتے بڑھتے رہتے ہیں اور اکثر متبادل نوعیت کے ہوتے ہیں جس کی وجہ سے زور کی حدتوں کو اُن حدتوں سے کم رکھنا چاہیے جو سکونی بوجھوں کی صورت میں جائز رکھی جاتی ہیں۔

ایک مرتعش لچکدار نظام کی حرکت کا ٹھیک ٹھیک حساب اکثر بہت پیچیدہ ہوتا ہے۔ لیکن اس کے تقریبی حسابات اکثر بہت آسان ہوتے ہیں۔

سیدھی سلاخوں کے تین قسم کے ارتعاشوں سے بحث کی جائیگی طولی، عرضی، اور مروڑ کے ارتعاش۔ ان میں لچکدار قوتیں سلاخ کے طولی فساد، خماؤ کے فساد، اور مروڑ کے فساد سے پیدا ہوتی ہیں۔ بعض صورتوں میں سلاخ کا جمود اس کو لگائی ہوئی کمیتوں کے مقابلے میں نظر انداز کیا جاسکیگا اور بعض صورتوں میں لگائی ہوئی کمیتیں صفر ہونگی یا ان کا جمود سلاخ کے مقابلے میں نظر انداز کیا جاسکیگا۔

۱۵۹ - آزاد یا طبعی ارتعاش ــــ فرض کرو کہ ایک جسم ایسے سہاروں کے ذریعے اپنے محل پر قائم ہے جن میں جسم کی وجہ سے فساد پیدا ہوتے ہیں جو لچک کی حد کے اندر ہیں۔ سہاروں یا قیود کی لچکدار قوتیں عین اتنی ہیں کہ جسم کو تعادل میں رکھیں۔ اب اگر جسم کو کسی ذریعے سے مثلاً دھکے سے یا ایک معین کمیت بڑھا دینے یا نکال لینے سے ایک خطی یا زاویئی ہٹاؤ پہنچایا جائے تو قیود کی لچکدار قوتیں اس نئے محل میں عموماً تعادل میں نہیں ہونگی اور اس طرح ارتعاش شروع ہونگے۔ ایسے ارتعاش جو محض قیود کی لچکدار قوتوں کے تحت قائم رہتے ہیں آزاد یا طبعی ارتعاش کہلاتے ہیں۔ ان کا تعدد نظام کے جمود اور لچکدار قیود کی صلابت پر اور حیطہ ابتدائی ہٹاؤ کی مقدار پر منحصر ہوتا ہے۔ اگر اس کے بعد کوئی خلل واقع نہ ہو تو ارتعاش اُس وقت تک جاری رہتے ہیں کہ رگڑ کی مزاحم قوتیں ان کو بتدریج فنا کر دیں۔ یہ رگڑ کی قوتیں کتنی ہی خفیف کیوں نہ ہوں ہمیشہ موجود رہتی ہیں۔

چونکہ لچکدار قوتیں ہمیشہ ہٹاؤ کے متناسب ہوتی ہیں اس لیے طبعی ارتعاش صفحہ ۴۶۰ کی حرکت ”سادہ موسیقی“ نوعیت کی ہوگی۔ اس کی ایک معروف مثال ایک مرغولی کمانی سے لٹکتا ہوا وزن ہے۔ اس صورت میں ارتعاش اکثر اتنے بڑے حیطے اور اتنے پست تعدد کے ہوتے ہیں کہ آنکھ سے آسانی سے مشاہدہ ہو سکتے ہیں۔ دیگر صورتوں میں اعظم فساد سے پیدا ہونے والی حرکت اتنی خفیف اور اتنی تیز ہوتی ہے کہ صاف نظر نہیں آتی۔

بنیادی اور اعلیٰ ارتعاش ــــ مضبوطی اشیا کے مضمون میں کسی دی ہوئی قسم کا سب میں اہم ارتعاش وہ ہوتا ہے جو سب میں سست ہو یعنی بنیادی ارتعاش۔ اکثر دیگر ارتعاش بھی ممکن ہیں جو زیادہ تعدد اور چھوٹے حیطے کے ہوتے ہیں جن کا بنیادی ارتعاش سے تعلق آواز کی پیدائش کے نقطۂ نظر سے اہمیت رکھتا ہے۔

جمود، صلابت، اور تعدد کا تعلق ــــ (۱) خطی ارتعاش

فرض کرو کہ پوری مرتعش کمیت کی ایک ہی خطی حرکت ہے اور اس کا وزن و پونڈ ہے اور فرض کرو کہ سہاروں کی صلابت یعنی لچکدار قوت فی اکائی انصراف یا وکے فی اکائی خطی حرکت ص پونڈ ہے۔ تب سادہ موسیقی حرکت کا معمولی ضابطہ استعمال کریں اور ایک مکمل "پیش و پس" ارتعاش کی مدت ت ثانیے ہو تو

$$\text{ت} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{و}}{\text{ص ج}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

تعدد یا ارتعاشوں کی تعداد —

$$\text{ن} = \frac{1}{\text{ت}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{ص ج}}{\text{و}}} \ \text{فی ثانیہ}$$

$$\text{اور} \quad \text{ن} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{\text{ص ج}}{\text{و}}} \ \text{فی منٹ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

جہاں ج اسراع بوجہ جاذبہ ہے، یعنی ۲ء۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ اگر صلابت پونڈ فی فٹ انصراف میں ہو، اور ۲ء۳۲ × ۱۲ انچ فی ثانیہ فی ثانیہ اگر صلابت پونڈ فی انچ انصراف میں ہو۔ مساواتیں (۱) اور (۲) یوں بھی لکھی جاسکتی ہیں :-

$$\text{ت} = \frac{2\pi}{\text{ف}} ،\quad \text{ن} = \frac{\text{ف}}{2\pi} \ \text{فی ثانیہ} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

جہاں ف اُس ذرّے کی مستقل زاویئی رفتار ہے جو ایک دائرے میں حرکت کرے، اور جس کا اس دائرے کے ایک قطر پر ظل مرتعش وزن و کی سادہ موسیقی حرکت کو تعبیر کرے۔

(۲) زاویئی یا مروڑ کے ارتعاش — فرض کرو کہ پوری کمیت کی ایک ہی زاویئی حرکت ہے، اور اس کا وزن و پونڈ ہے اور حرکت کے محور کے گرد اس کا گردشی نصف قطر گ (فٹ یا انچ) ہے اور مروڑ میں جسم کی استواری

یا صلابت ایک معیارِ اثر ع (پونڈ فٹ یا پونڈ انچ) مروڑ کے فی نیم قطری زاویہ ہے تب (۱) کے متناظر فٹ یا انچ کی اکائی کے ساتھ:-

$$ت = ۲\pi\sqrt{\frac{مج}{ع}} \quad \text{.................(۴)}$$

جہاں $مج = \frac{و}{ج}$ گ۲ یعنی وزن و کا (کمیتی) معیارِ جمود جاذبی اکائیوں میں۔ صفحہ ۷۶۱ پر

اس میں ج = ۳۲٫۲ اگر طولی اکائی فٹ ہو اور = ۳۲٫۲ × ۱۲ اگر اکائی انچ ہو۔

ارتعاش کا تعدد:-

$$ن = \frac{۱}{ت} = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{ع}{مج}} \text{ فی ثانیہ یا } ن = \frac{۳۰}{\pi}\sqrt{\frac{ع}{مج}} \text{ فی منٹ} \quad \text{.......(۵)}$$

یہ نتائج سادہ موسیقی حرکت کی تفرقی مساوات اور اس کے حل سے صاف نکل آتے ہیں۔

۱۶۰- قسری ارتعاش — فاصل تعدد — خطرناک رفتاریں

اگر ایک جسم پر، جو لچکدار قیود کے تحت اپنے محل پر ہو، ایک دوری متخلل قوت عمل کرے تو ارتعاش پیدا ہونگے جن کا تعدد وہی ہوگا جو متخلل قوت کا ہے۔ ان کا حیطہ اور اس طرح ان سے پیدا ہونے والے زور اُس ربط پر منحصر ہونگے جو متخلل قوت کے تعدد میں اور لچکدار سہاروں کے زیرِ عمل جسم کے آزاد یا طبعی ارتعاشوں کے تعدد میں ہوگا۔

ارتعاش کے دوران میں نظام کی (جو مثلاً فرض کرو کہ ایک واحد بوجھ و اور اس کے لچکدار سہاروں پر مشتمل ہے) توانائی قسم کے لحاظ سے بدلیگی لیکن مقدار کے لحاظ سے نہیں۔ وسطی یا مرکزی محل میں حرکت کی رفتار اعظم ہوگی، اور نظام کی توانائی بالکل بالحرکت ہوگی۔ انتہائی محلوں میں توانائی کی بھی، مقدار بالکل بالقوہ ہوگی اور (جاذبہ کے اثرات اگر ہوں تو ان کو نظر انداز کرتے ہوئے) سہاروں یا قیود کی لچکدار فسادی توانائی کی شکل میں

ہوگی ۔ درمیانی محلوں میں یہی مجموعی توانائی کچھ بالحرکت اور کچھ بالقوہ ہوگی۔ لچکدار قیود کے اندر زور کی حدت ہر صورت میں لچکدار فسادی توانائی یا بازگشتگی کے جذر کے متناسب ہوگی (دیکھو دفعات ۴۲، ۹۳، ۱۱۶)۔

فاصل تعدد ــــ اگر دوری قوت کا تعدد بالکل وہی ہو جو ایک طبعی ارتعاش کا ہے تو ہر بار جب کہ قوت لگائی جائے نظام کی مجموعی توانائی میں اضافہ ہوگا کیونکہ قوت ہمیشہ سمتِ حرکت میں عمل کریگی۔ اور اس کے خلاف کبھی نہیں۔ توانائی کے اضافے سے فسادی توانائی بڑھیگی جس سے قیود پر زور بڑھیگا خاص کر انتہائی محلوں میں، اور یہ اضافہ جاری رہے تو آخرکار فسادی توانائی سے زور کی حدت اتنی زیادہ ہوگی کہ لچک کی حد واقع ہوجائیگی اور لچک کی شرائط برقرار نہیں رہینگی۔ اس سے ممکن ہے کہ شکستگی واقع ہو یا ممکن ہے کہ طبعی مدتِ دوران میں تبدیلی ہو جس کی وجہ سے یہ دوری قوت کوئی مزید نقصان نہ کر سکے لیکن بہر صورت اس فاصل تعدد کی قوت کو خواہ وہ کتنی ہی خفیف کیوں نہ ہو دوری طور پر لگانے سے شدید زور پیدا ہوسکتے ہیں۔ اگر کوئی متخلل قوت اس فاصل تعدد کی ہو جو طبعی تعدد کے بالکل مساوی ہو تو یہ صورتِ حال بعض اوقات علمِ صوت کے مطابق گمگ کہلاتی ہے۔

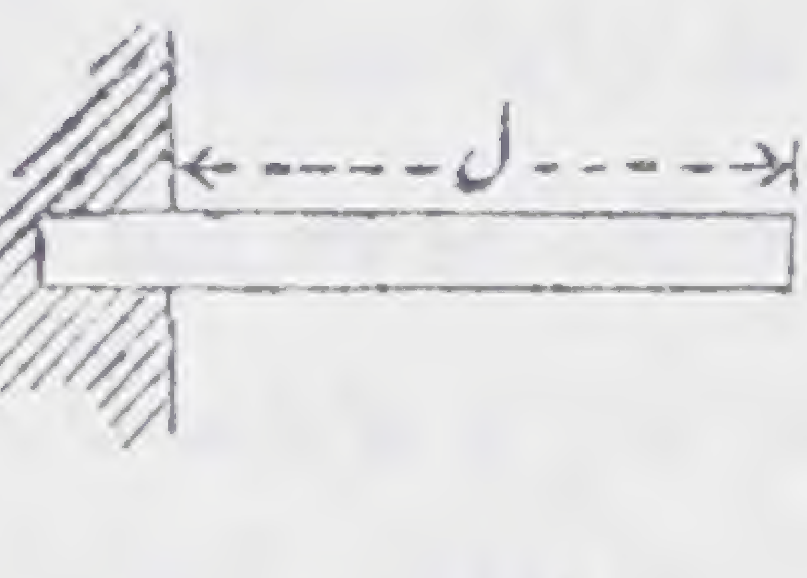
خطرناک رفتاریں ــــ دوری متخلل قوت یا معیار کو موسیقی اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے جن کے تعدد دوری خلل کے تعدد کے بالعموم ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، وغیرہ، گنے ہوتے ہیں۔ اس طرح کسی دوری خلل کا تعدد طبعی تعدد کا $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$ یا $\frac{1}{5}$، وغیرہ، ہو تو یہ اپنے کسی موسیقی جزوِ ترکیبی کی وجہ سے خطرناک بن جاسکتا ہے۔ بعض صورتوں میں مشینوں کے اجزا اس طرح بنائے جاتے ہیں کہ ان کا طبعی تعدد عملی رفتاروں سے بہت کم ہو۔ ایسی صورت میں اس کا کوئی خطرہ نہیں بلکہ عملی رفتار سے پیدا ہونے والے خلل کے کسی موسیقی جزوِ ترکیبی کا تعدد طبعی تعدد کے قریب پہنچے۔ اس طرح کی مشین کو چالو کرنے اور پوری رفتار پر لانے میں گمگ کی حالت اتنی تھوڑی مدت تک رہتی ہے کہ کوئی شدید زور نہیں پیدا ہوتا۔ صفحہ ۴۶۲

رگڑ کا اثر، جو چھوٹے ارتعاشوں میں ممکن ہے کم ہو حیطۂ ارتعاش کے بڑھنے سے بہت بڑھ سکتا ہے اور اس طرح ممکن ہے کہ ایک فاصل تعدد کی دوری قوت سے پیدا ہونے والے ارتعاشوں کو بہت بڑے حیطے تک پہنچنے سے روک دے۔ بڑے ارتعاشوں کے پیدا ہونے کے لیے یہ ضروری نہیں کہ دوری متخلل قوت کا تعدد ٹھیک ٹھیک وہی ہو جو نظام کا طبعی تعدد ہے۔ اگر یہ تقریباً وہ تعدد ہو تو قوت سمتِ حرکت کے مخالف ہو جانے کے پیشتر متواتر کئی بار سمتِ حرکت میں عمل کرے گی اور اس طرح نظام میں اتنی توانائی کا اضافہ کر سکتی ہے جس سے فساد ایک بے خطر حد سے بڑھ جائیں۔ مثلاً اگر طبعی تعدد ۱۰۰ ارتعاش فی ثانیہ ہے، اور کسی لگائی ہوئی قوت کا ۹۷ فی ثانیہ تو ایک مکمل دور کی مدت کا فرق دونوں میں $\frac{۳}{۹۷۰۰}$ ثانیہ ہوگا۔ اور مدت $\frac{۱}{۲۰۰}$ ثانیہ کو جس کے دوران میں حرکت ایک ہی سمت میں رہتی ہے $\frac{۳}{۹۷۰۰}$ سے تقسیم کریں تو ظاہر ہے کہ دوری قوت، ارتعاشی حرکت کی سمت کے مخالف ہو جانے سے پیشتر نظام کی توانائی میں متواتر ۱۶ بار اضافہ کر سکتی ہے۔ کسی دوری قوت مثلاً موسیقی یا جیب التمامی قوت کے تحت کسی لچکدار نظام کے قسری ارتعاش کو تعبیر کرنے والی تفرقی مساوات حرکت اسراع یا توانائی کی رقوم میں لکھی جائے اور اس کا حل حاصل کیا جائے تو ان سے قسری ارتعاشوں کی نوعیت اور حیطہ بخوبی واضح ہو جاتا ہے۔ رگڑ سے حرکت میں جو ترمیم واقع ہوتی ہے اس کا اندازہ اس طرح قائم کیا جا سکتا ہے کہ مساوات میں ایک رقم کا اضافہ کر دیا جائے جو ابطائی قوت کو تعبیر کرے جو رفتار کے ساتھ بڑھتی ہے۔

۱۶۱۔ طولی ارتعاش ـــــ دونوں انتہائی صورتوں پر علیحدہ غور کیا جائیگا یعنی ایک سلاخ جس پر کوئی بوجھ نہیں اور ایک سلاخ جس کے اوپر بوجھ اتنا بڑا ہے کہ سلاخ کا ذاتی جمود نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

بے بوجھ سلاخ ـــــ اس صورت میں تعدد عموماً اتنے بڑے ہوتے

ہیں کہ کامی مشینری میں ان کے ساتھ ہم آہنگی واقع ہونے کا قرینہ نہیں ہوتا۔ اگر طول ل کی ایک سلاخ (شکل ۲۰۱) اس طرح نصب ہو کہ ایک سرے پر طولی ہٹاؤ رُک جائے اور دوسرا سرا آزاد ہو تو ثابت سرا ایک عقدہ یا ساکن نقطہ ہوگا۔ باقی سلاخ میں ایک طولی ارتعاشی حرکت ہوگی جس میں ایک وقت میں تمام حصے ایک ہی سمت میں متحرک ہونگے۔ کسی نقطے پر جو ثابت سرے سے فاصلہ لا پر



شکل ۲۰۱

ہو حیطۂ ارتعاش آزاد سرے کا جب $\left(\frac{\pi}{۲} \times \frac{لا}{ل}\right)$ گنا ہوگا۔ سست ترین یا بنیادی طبعی ارتعاش کا تعدد حسبِ ذیل ہوگا:۔

$$ن = \frac{1}{ت} = \frac{1}{۴ل}\sqrt{\frac{ے\,سا\,ج}{و}} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{۴}\sqrt{\frac{ص\,ج}{و\,ل}} \quad \text{فی ثانیہ} \quad ....(۱)$$

صفحہ ۲۶۳

جہاں ے راست لچک کا مقیاس ہے، ص $\left(= \frac{ے\,سا}{ل}\right)$ صلابت یعنی قوت فی اکائی تطول ہے، و سلاخ کا وزن فی اکائی طول ہے، سا تراش کا رقبہ ہے، اور ج اسراع بوجہ جاذبہ ہے جو تقریباً ۳۲٫۲ × ۱۲ انچ فی ثانیہ فی ثانیہ ہے۔ تعدد تراشی رقبے پر منحصر نہیں کیونکہ ص اور و دونوں سا کے متناسب ہیں۔ اگر، مثال کے طور پر، ایک فولادی سلاخ لی جائے جس کا طول ۱۰ فٹ ہو اور جو ایک سرے پر ثابت ہو، ے = ۳۰ × ۱۰^{۶} پونڈ فی مربع انچ، اور فولاد کا وزن ۰٫۲۸ پونڈ فی مکعب انچ ہو تو سست ترین تعدد

$$ن = \frac{1}{ت} = \frac{۱۰۰۰}{۴۸۰}\sqrt{\frac{۱۲ \times ۳۲٫۲ \times ۳۰}{۰٫۲۸}} = ۴۲۴ \text{ فی ثانیہ}$$

یہ رفتار اتنی تیز ہے کہ مشینری میں خطرناک گمک کا احتمال نہیں۔

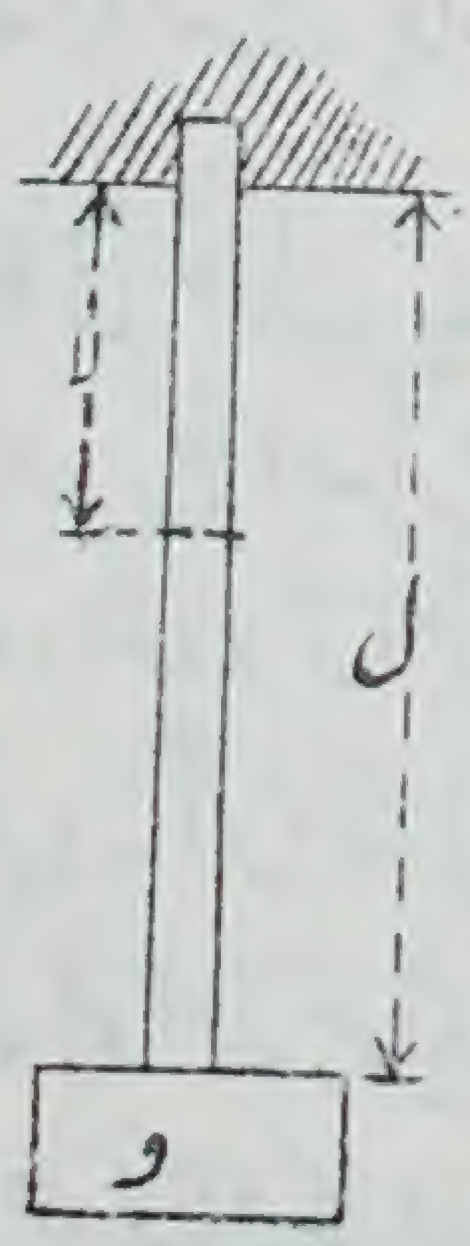
اگر سلاخ کے دونوں سرے ثابت ہوں تو عقدے سروں پر ہونگے۔ اور اس طرح ل کو نصف طول کے مساوی لینے سے تعدد (۱) سے حاصل ہوگا۔ اگر دونوں سرے طولی طور پر آزاد ہوں تو عقدہ مرکز پر ہوگا اور اس صورت میں بھی ل کو نصف طول کے مساوی لینے سے تعدد (۱) سے حاصل ہوگا۔

لدی ہوئی سلاخ ـــــ اگر سلاخ کے آزاد سرے یعنی اعظم حیطے کے نقطے پر ایک بوجھ و پونڈ اتنا وزنی ہو کہ سلاخ کا جمود ناقابلِ لحاظ ہو تو ارتعاش کی مدت، اور تعدد دفعہ ۱۵۹ کے عام ضابطوں (۱) اور (۲) سے حاصل ہونگے۔

اور ان میں ص = $\frac{سا\ سے}{ل}$ رکھنا ہوگا۔ اس طرح ارتعاش کا طبعی تعدد

$$ن = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{سا\ سے\ ج}{ل\ و}}$$ فی ثانیہ ....(۲)

اگر سلاخ کا وزن قابل نظر اندازی نہ ہو لیکن بوجھ کے مقابلے میں چھوٹا ہو تو سلاخ کے کسی نقطے کا حیطۂ ارتعاش ثابت سرے سے فاصلہ لا کے تقریباً متناسب ہوگا (شکل ۲۰۲)، اس لیے اگر یکساں سلاخ کا وزن وَ ہو اور ثابت سرے سے فاصلہ لا پر کے نقطے کی رفتار ی اور آزاد سرے کی رفتار $ع_1$ ہو تو ی = $\frac{لا}{ل}ع_1$ اور ثابت سرے سے فاصلہ لا پر کے ایک چھوٹے حصے مف لا کی توانائی بالحرکت



شکل ۲۰۲

$$\frac{1}{2}\frac{وَ}{ل\ ج} \times مف\ لا \times ی^2 = \frac{1}{2}\frac{وَ ع_1^2}{ل^3 ج} لا^2 مف\ لا$$

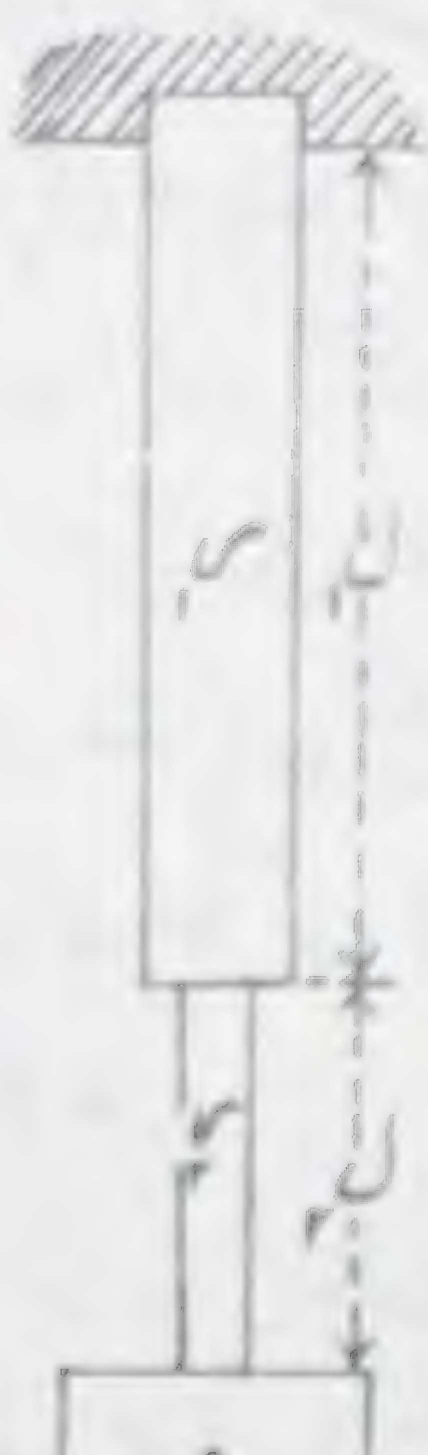
ہوگی۔ اور سلاخ کی مجموعی توانائی بالحرکت حسبِ ذیل ہوگی:—

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{و}\,\text{ع}^{2}}{\text{ل}^{2}\,\text{ج}}\,\text{لا}^{2}\,\text{فرلا} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\text{و}\,\text{ع}^{2}}{\text{ج}}$$

یعنی سلاخ کی کمیت حرکت کے اعتبار سے آزاد سرے پر رکھی ہوئی اس کی $\frac{1}{3}$ کمیت کے معادل ہے۔ اس لیے اگر اس کی رعایت ضروری ہو تو وہیں سلاخ کا $\frac{1}{3}$ وزن جمع کیا جاسکتا ہے۔

صفحہ ۲۹۳

اگر سلاخ دو یا زیادہ حصّوں پر مشتمل ہو جن کے طول ل۱، ل۲ وغیرہ، اور تراشی رقبے س۱، س۲، وغیرہ، ہوں (شکل ۲۰۳) تو صلابت یعنی قوت فی اکائی انصراف صریحاً حسبِ ذیل مساوات سے حاصل ہوگی:—



شکل ۲۰۳

$$\text{ص}\left(\frac{\text{ل}_1}{\text{س}_1\,\text{ے}} + \frac{\text{ل}_2}{\text{س}_2\,\text{ے}} + \text{وغیرہ}\right) = 1$$

یا

$$\text{ص}\,\Sigma\left(\frac{\text{ل}}{\text{س}\,\text{ے}}\right) = 1$$

اس لیے

$$\text{ص} = \frac{1}{\Sigma\left(\frac{\text{ل}}{\text{س}\,\text{ے}}\right)}$$

اور تعدد (۲) دفعہ ۱۵۹ حسبِ ذیل ہوگا:—

$$\text{ن} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{ے}\,\text{ج}}{\text{و}\left(\frac{\text{ل}_1}{\text{س}_1} + \frac{\text{ل}_2}{\text{س}_2} + \text{وغیرہ}\right)}}$$

یا

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{ے}\,\text{ج}}{\text{و}\,\Sigma\left(\frac{\text{ل}}{\text{س}}\right)}}\ \text{فی ثانیہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

۱۶۲ - عرضی ارتعاش ــــــ اگر ایک سلاخ عرضی یا خماؤ کے ارتعاش میں ہو تو بے لداؤ سلاخ اور بھاری بوجھ کی سلاخ والی صورتوں سے علیحدہ بحث کی جاسکتی ہے - بے بوجھ سلاخ کے ارتعاش سے جو بہ نسبت مضبوطیٔ اشیا کے علمِ صوت میں زیادہ اہمیت رکھتا ہے دفعہ آئندہ میں مختصر بحث کی گئی ہے اور دفعہ ہذا میں بنیادی ارتعاش کے تعدد معلوم کرنے کا ایک تقریبی طریقہ دیا جاتا ہے جو بوجھ دار اور بے لداؤ دونوں طرح کی سلاخوں کے لیے استعمال ہوسکتا ہے -

یہ طریقہ اس پر مشتمل ہے کہ منصرف وضع میں سلاخ کی جو فسادی توانائی ہو اس کو اس توانائی بالحرکت کے مساوی رکھا جائے جو نظام میں وسطی یعنی اصلی یا غیر منصرف وضع میں پائی جائے جب کہ سلاخ کے طول کا ہر نقطہ ایک ہی مدت دوران کے ساتھ ارتعاش کر رہا ہو اور ہر نقطے کا حیطۂ ارتعاش اس نقطے پر کے سکونی انصراف کے مساوی ہو - حیطۂ ارتعاش کے متعلق یہ اختیاری مفروضہ دراصل ٹھیک صحیح نہیں خاص کر بے لداؤ سلاخ کی صورت میں لیکن ایک آسان حساب کے ذریعہ اس سے بہت تقریباً صحیح نتیجہ حاصل ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۱۶۳) - ایک مثال سے یہ طریقہ واضح ہوجائیگا -

سلاخ پر یکساں بوجھ و فی اکائی طول، اور سلاخ سروں پر سادہ طور پر سہاری ہوئی (شکل ۱۱۲) - سلاخ کے کسی نقطے پر جو ایک سرے سے فاصلہ لا پر ہو انصراف ا حسبِ ذیل ہوگا (۹) دفعہ ۷۸) :-

$$\text{ا} = \frac{\text{و}}{۲۴\,\text{ے}\,\text{آ}}\left(\text{لا}^{۴} - ۲\,\text{ل}\,\text{لا}^{۳} + \text{ل}^{۳}\,\text{لا}\right) \quad \text{.........(۱)}$$

جہاں آ تراش کے رقبے کا معیارِ جمود اور ل سلاخ کا طول ہے - فسادی توانائی (۹) دفعہ ۹۳) حسبِ ذیل ہوگی :-

$$\frac{\text{و}}{\text{۲}}\int_{\text{۰}}^{\text{ل}} \text{ما فرلا}$$

اگر ارتعاش غیر منصرف محل کے گرد حیطہ ما کے ساتھ ہو رہا ہو تو کسی نقطے کی رفتار ف × ما ہوگی جہاں ف ایک ایسے نقطے کی مستقل زاویئی رفتار ہے جو نصف قطر ما کے دائرے میں حرکت کر رہا ہو اور جس کے ظل سے سادہ موسیقی حرکت حاصل ہوتی ہو ۔ طول فرلا کے ایک حصے کی توانائی بالحرکت

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,(\text{ف ما})^{\text{۲}}\ \text{فرلا}$$

ہوگی ۔ اس لیے مجموعی توانائی بالحرکت کو اوپر کی فسادی توانائی کے مساوی رکھنے سے

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\frac{\text{و}}{\text{ج}} \times \text{ف}^{\text{۲}} \int_{\text{۰}}^{\text{ل}} \text{ما}^{\text{۲}}\ \text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{و}\int_{\text{۰}}^{\text{ل}} \text{ما فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۲})$$

$$\text{ف}^{\text{۲}} = \text{ج}\int_{\text{۰}}^{\text{ل}} \text{ما فرلا} \div \int_{\text{۰}}^{\text{ل}} \text{ما}^{\text{۲}}\ \text{فرلا}$$

ما کی قیمت (۱) درج کر کے تکمل کرنے سے

$$\text{ف}^{\text{۲}} = \frac{\text{۲۴ ج آے}}{\text{دل}^{\text{۴}}}\left(\frac{\text{۱}}{\text{۵}} \div \frac{\text{۳۱}}{\text{۶۳۰}}\right) = \frac{\text{۳۰۲۴}}{\text{۳۱}}\ \frac{\text{ج آے}}{\text{دل}^{\text{۴}}}$$

$$= \text{۹۷٫۵۵}\ \frac{\text{ج آے}}{\text{دل}^{\text{۴}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۳})$$

$$\text{ف} = \frac{\text{۹٫۸۶۶}}{\text{ل}^{\text{۲}}}\sqrt{\frac{\text{ج آے}}{\text{و}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۴})$$

$$\text{تعدد} = \text{ن} = \frac{\text{ف}}{\text{۲}\pi} = \frac{\text{۱٫۵۶۴}}{\text{ل}^{\text{۲}}}\sqrt{\frac{\text{ج آے}}{\text{و}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۵})$$

یا ارتعاش فی منٹ $= ن = \frac{۲۱۱}{\sqrt{صہ}}$

جہاں صہ مرکزی انصراف $\frac{۵}{۳۸۴}\frac{و ل^{۴}}{ع آ}$ انچوں میں ہے -

سلاخ دونوں سروں پر ثابت ــــ اگر سلاخ دونوں سروں پر سمت میں ثابت ہو تو دفعہ ۸۴ سے

$$ما = \frac{و}{۲۴ ع آ} لا^{۲} (ل - لا)^{۲} = \frac{و}{۲۴ ع آ}(لا^{۲}ل^{۲} - ۲ل لا^{۳} + لا^{۴})$$

اور مساوات (۲) سے حاصل ہوگا:-

$$ف^{۲} = \frac{۲۴ ج ع آ}{و ل^{۴}}\left(\frac{۱}{۳۰} \div \frac{۱}{۶۳۰}\right) = \frac{۵۰۴ ج ع آ}{و ل^{۴}} \quad \ldots\ldots (۶)$$

$$ف = \frac{۲۲.۴۵}{ل^{۲}}\sqrt{\frac{ج ع آ}{و}} \quad \ldots\ldots (۷)$$

$$تعدد = \frac{ف}{۲ط} = \frac{۳.۵۷}{ل^{۲}}\sqrt{\frac{ج ع آ}{و}} \text{ فی ثانیہ} \quad \ldots\ldots (۸)$$

یا ارتعاش فی منٹ $= ن = \frac{۳۱۵}{\sqrt{صہ}}$ .... (۸ الف)

جہاں صہ مرکزی انصراف $\frac{۱}{۳۸۴}\frac{و ل^{۴}}{ع آ}$ انچوں میں ہے -

یہی طریقہ دیگر سلاخوں کے لیے بھی استعمال ہوسکتا ہے جن کے سروں کے حالات دوسرے ہوں یا جن پر بوجھ مختلف قسم کا ہو - انصراف ما کی قیمت کے لیے باب ۶ اور ۷ کے نتائج کو استعمال کیا جاسکتا ہے - اگر مجرد بوجھ ہوں جن سے ما کے جبری جملے میں عام تسلسل واقع ہوگا اور دیگر مسلسل بوجھ بھی

صفحہ ۲۶۶

موجود ہوں تو تکمل کی وسعت کو ایسے حصوں میں تقسیم کرنا ہوگا جن میں ما، لا کا ایک مسلسل تفاعل ہو۔ اگر صرف مجرّد بوجھ ہوں تو (۲) کے متناظر یہ مساوات ہوگی :-

$$\frac{1}{2}\,\frac{ف^2}{ج}\int (و\,ا^2) = \frac{1}{2}\int (و\,ا) \quad ....(۹)$$

بھاری اکیلا بوجھ ـــــ اگر کسی سلاخ پر ایک اکیلا بوجھ و اتنا بھاری ہو کہ دیگر کمیتیں نظر انداز کی جاسکیں اور اس کے ابعاد سلاخ کے طول کے مقابلے میں چھوٹے ہوں تو ضابطہ (۹) کو استعمال کر کے دونوں جانبوں کو ½ و ما پر تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ اور یہ اس کا معادل ہوگا کہ صلابت ص معلوم کر کے اس کو دفعہ ۱۵۹ کے عام ضابطوں (۱) اور (۲) میں استعمال کیا جائے۔ ص کی قیمت اس طرح معلوم کی جاتی ہے کہ و کے مقام پر رکھے ہوئے ایک بوجھ ص کے انصراف کے جملے کو اکائی کے مساوی رکھا جائے۔ انصراف کے جملے باب ۶ اور ۷ میں ملینگے۔

اگر طول ل کی ایک ہلکی سلاخ پر جو سروں پر آزادانہ سہاری ہوئی ہو ایک بھاری بوجھ و ہو جو سلاخ کے طول ل کو دو حصوں ا اور ب میں تقسیم کرے تو (۸) دفعہ ۸۰ سے

$$ا = \frac{و\,ا^2\,ب^2}{۳\,آ\,ے\,ل}$$

و کی جگہ ص اور ا کی جگہ ا رکھنے سے

$$ص = \frac{۳\,آ\,ے\,ل}{ا^2\,ب^2} \quad ....(۱۰)$$

اس لیے (۲) دفعہ ۱۵۹ سے طبعی ارتعاش کا تعدد

$$ن = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{۳\,آ\,ے\,ج\,ل}{و\,ا^2\,ب^2}} \text{ فی ثانیہ } ....(۱۱)$$

یا (۹) کو استعمال کرکے دونوں جانبوں کو $\frac{1}{2}$ و ا سے تقسیم کریں تو

$$\text{ن} = \frac{\text{ف}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\,\text{آ ے ج ل}}{\text{و ا}^2\,\text{ب}^2}}$$

یا

$$\text{ارتعاش فی منٹ} = \text{ن} = \frac{187}{\sqrt{\text{صہ}}} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

جہاں صہ بوجھ کے نیچے انحراف $\frac{\text{و ا}^2\,\text{ب}^2}{3\,\text{آ ے ل}}$ انچوں میں ہے۔

اگر سرے ثابت ہوں، تو انحراف مثال ۲ دفعہ ۸۷ کی رُو سے حسبِ ذیل ہے:۔

$$\text{ا} = \frac{\text{و ا}^3\,\text{ب}^3}{3\,\text{آ ے ل}^3} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

صفحہ ۴۶۷

اس طرح ارتعاش کا تعدد

$$\text{ن} = \frac{\text{ف}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ا}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\,\text{آ ے ج ل}^3}{\text{و ا}^3\,\text{ب}^3}}\ \text{فی ثانیہ} \quad \ldots\ldots (13)$$

اگر سلاخ کا ایک سرا ثابت اور دوسرا آزاد ہو اور و ثابت سرے سے فاصلہ ل_1 پر ہو تو (۴) دفعہ ۹۷ سے:۔

$$\text{ا} = \frac{\text{و ل}_1^3}{3\,\text{آ ے}}$$

$$\text{ن} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\,\text{آ ے ج}}{\text{و ل}_1^3}}\ \text{فی ثانیہ} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

اور بہت سی صورتیں ذہن میں آتی ہیں اور ان کو اسی طرح حل کیا جاسکتا ہے۔

مرتعش بوجھ کی جسامت کا اثر۔۔۔۔ اگر مرتعش بوجھ کے ابعاد دھرے کے طول کا لحاظ کرتے چھوٹے نہ ہوں تو اس امر کا لحاظ رکھنا ضروری ہوگا کہ بوجھ میں ایک گردشی حرکت بھی ہے جو ایک ایسے محور کے گرد ہے جو سلاخ کے علی القوائم ہے اور ارتعاش کے مستوی کے علی القوائم ہے۔ فرض کرو کہ

بوجھ کا (کمیتی) معیارِ جمود اس محور کے گرد مجَ ہے جو $= \frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{گ}^{۲}$ جہاں گ. بوجھ کا گردشی نصف قطر اس محور کے گرد ہے ۔ اوپر کے حاصل شدہ نتائج پر اس گردش کا جو اثر ہوگا اس کی تمثیل ایک خاص صورت کے ذریعے کی جا سکتی ہے یعنی ایک سلاخ کا ایک سرا ثابت، دوسرا آزاد، اور اس پر بوجھ و ثابت سرے سے فاصلہ $\text{ل}_{۱}$ پر ہے ۔ اگر سلاخ کے محور کا ڈھال ثابت سرے سے فاصلہ $\text{ل}_{۱}$ پر طہ ہو تو (۳) اور (۴) دفعہ ۹۷ سے

$$\text{طہ} = \frac{\text{و}\,\text{ل}_{۱}^{۲}}{۲\,\text{ےآ}}\ ،\quad \text{ا} = \frac{\text{و}\,\text{ل}_{۱}^{۳}}{۳\,\text{آے}}\ ،\quad \text{طہ} = \frac{۳}{۲}\,\frac{\text{ا}}{\text{ل}_{۱}}$$

بوجھ کی زاویئی رفتار اس محور کے گرد جو سلاخ کے اور ارتعاش کے مستوی کے علی القوائم ہے حسبِ ذیل ہوگی :—

$$\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \frac{۳}{۲\,\text{ل}_{۱}}\,\frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}$$

اس لیے وسطی محل میں سے گزرتے وقت :—

$$\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{۲} = \frac{۹}{۴\,\text{ل}_{۱}^{۲}}\left(\frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}\right)^{۲} = \frac{۹}{۴\,\text{ل}_{۱}^{۲}}\,\text{ف}^{۲}\,\text{ا}^{۲}$$

اور گردش کی توانائی بالحرکت :—

$$\frac{۱}{۲}\,\text{مجَ}\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^{۲} = \frac{۱}{۲}\,\text{مجَ}\,\frac{۹}{۴\,\text{ل}_{۱}^{۲}}\,\text{ف}^{۲}\,\text{ا}^{۲}$$

صفحہ ۴۶۸ اس لیے عام ضابطہ (۹) میں گردشی توانائی کا اضافہ کر کے مجموعی توانائی بالحرکت کو فسادی توانائی کے مساوی رکھنے سے :—

$$\frac{۱}{۲}\,\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{ف}^{۲}\,\text{ا}^{۲} + \frac{۱}{۲}\,\text{مجَ}\,\frac{۹}{۴\,\text{ل}_{۱}^{۲}}\,\text{ف}^{۲}\,\text{ا}^{۲} = \frac{۱}{۲}\,\text{و}\,\text{ا} \quad ......(۱۵)$$

$$\text{ف}_{۱}^{۲} = \frac{\text{۳ آ بے ج}}{\text{و ل}_{۱}^{۳}\left(۱ + \frac{\text{۹ مجَ ج}}{\text{۴ ل}_{۱}^{۲}\text{ و}}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۶)$$

اور تعداد (۱۴) کی بجائے حسبِ ذیل ہوگا :-

$$\text{ن} = \frac{\text{ف}}{۲\pi} = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{\text{۳ آ بے ج}}{\text{و ل}_{۱}^{۳}\left(۱ + \frac{\text{۹ مجَ ج}}{\text{۴ ل}_{۱}^{۲}\text{ و}}\right)}} \ \text{یا}\ \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{\text{۳ آ بے ج}}{\text{و ل}_{۱}^{۳}\left(۱ + \frac{۹}{۴}\frac{\text{گ}^{۲}}{\text{ل}_{۱}^{۲}}\right)}} \ldots (۱۷)$$

خرج اور محور کی صورت میں مقدار $\frac{۹}{۴}\frac{\text{گ}^{۲}}{\text{ل}_{۱}^{۲}}$ یا $\frac{\text{۹ مجَ ج}}{\text{۴ ل}_{۱}^{۲}\text{ و}}$ عموماً اتنی خفیف ہوتی ہے کہ جہاں عرضی تعداد بہت پست ہو اور اس طرح اہم ہو وہاں اس خفیف مقدار کو اکائی کے مقابلے میں نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

اگر ضرورت ہو تو دیگر صورتوں کے لیے جن میں سروں کے حالات مختلف ہوں نتائج میں ضروری ترمیم آسانی سے کرلی جا سکتی ہے۔ مماثل مسندوں کے دھرے کے وسط میں ایک اکیلے بوجھ والی جو اہم صورت ہے اس کے لیے کسی تصحیح کی ضرورت نہیں کیونکہ صریحاً طہ اور $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ ہمیشہ صفر ہوگا۔

اکیلا اور منقسم بوجھ — دفعہ ہذا کے عام طریقے کو اس صورت کے لیے استعمال کریں کہ ایک اکیلا بوجھ ایک سادہ سہاری ہوئی سلاخ کے مرکز پر رکھا ہو تو مساوات (۷) دفعہ ۱۹۳ میں ز = ف × صہ لکھنے سے اور رقم و × صہ کو حذف کرنے سے ظاہر ہے کہ جمود بقدر اس کے بڑھ جائیگا کہ و کے مقام پر ایک بوجھ $\frac{۱۷}{۳۵}$ ول کا اضافہ کردیا جائے (شکل ۱۱۱)۔ اس طرح مساوات (۱۱) حسبِ ذیل ہو جائیگی :-

$$\text{ن} = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{\text{۴۸ آ بے ج}}{\text{ل}^{۳}\left(\text{و} + \frac{۱۷}{۳۵}\text{ول}\right)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۸)$$

ثابت سروں کی صورت میں اسی طرح تعدد (۱۳) کی بجائے (جو کہ و = ۰ کے لیے ہے) حسبِ ذیل ہوگا :—

$$\text{ن} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{192\,\bar{\text{آ}}\,\text{صہ}\,\text{ج}}{\text{ل}^3\left(\text{و} + \frac{13}{35}\,\text{ول}\right)}} \quad \text{(۱۹)}$$

اور برآمدہ بیرم کے لیے جو آزاد سرے پر لدا ہوا ہو (۱۴) کی بجائے (جو کہ و = ۰ کے لیے ہے) :—

$$\text{ن} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\,\bar{\text{آ}}\,\text{صہ}\,\text{ج}}{\text{ل}^3\left(\text{و} + \frac{33}{140}\,\text{ول}\right)}} \quad \text{(۲۰)}$$

تصادم کے نقطے کا محل اتنا سادہ نہ ہو تو ایسی صورتوں میں بھی سلاخ کے جمود کا اثر مجموعی توانائی بالحرکت کے تکملوں کی مناسب وسعتیں لینے سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

عملی ضابطہ — ضابطہ (۱۱ ا) کو (۱۳) اور (۱۴) کی صورتوں میں بھی صہ کی ترمیم یافتہ قیمتوں کے ساتھ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اگر ضرورت ہو تو جمع کرنے پر، ایسی صورتوں کے لیے جن میں ایک منقسم بوجھ ہو اور ایک بہت بڑا مرتکز بوجھ ہو اور ان دونوں میں ایسا تناسب ہو جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا ہے، ایک سادہ تقریبی ضابطہ صفحہ ۴۶۹

$$\text{ن} = \frac{187}{\sqrt{\text{صہ}}} \quad \text{(۲۱)}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں صہ بوجھ کے نیچے کا انصراف انچوں میں ہے۔

متعدد بوجھ — آزمائشی ضابطہ — اگر ایک سلاخ پر متعدد بوجھ و_1، و_2، $\text{و}_\text{ہ}$، وغیرہ، مرتکز یا منقسم ہوں اور اگر سلاخ کا وزن قابلِ نظر اندازی نہ ہو تو وہ بھی اس میں شامل ہو اور سلاخ پر اِن بوجھوں کے اکیلے عمل کرنے کی صورت میں ارتعاش کے تعدد علی الترتیب ن_1، ن_2، ن_3، $\text{ن}_\text{ہ}$،

وغیرہ ہوں، تب اگر تمام بوجھوں کے ایک ساتھ عمل کرنے کی صورت میں تعدد ن ہو تو

$$\frac{1}{ن^2} = \frac{1}{ن_1^2} + \frac{1}{ن_2^2} + \frac{1}{ن_3^2} + \frac{1}{ن_4^2} + \text{وغیرہ} \quad ......(۲۲)$$

یا

$$ت^2 = ت_1^2 + ت_2^2 + ت_3^2 + ت_4^2 + \text{وغیرہ} \quad ......(۲۳)$$

جہاں $ت_1$، $ت_2$، وغیرہ علیحدہ بوجھوں کی صورت میں مدتِ ارتعاش ہیں اور ت تمام بوجھوں کے ایک ساتھ عمل کرنے کی صورت میں مدتِ ارتعاش ہے۔ کسی مخلوط نظام کے حساب میں اس آزمائشی ضابطے کو (۹) کے متبادل کے طور پر کیا جا سکتا ہے۔ یہ حسبِ ذیل شکل اختیار کر لیتا ہے :—

$$ت^2 = \frac{4\pi^2}{ج}\Sigma(ما) \quad ......(۲۴)$$

جہاں ما وہ جزوی انصراف ہے جو کسی بوجھ کے تحت صرف اُس بوجھ کی وجہ سے ہو۔ اور (۹) حسبِ ذیل ہو جاتی ہے :—

$$ت^2 = \frac{4\pi^2}{ج}\Sigma(و\,ما^2) \div \Sigma(و\,ما) \quad ......(۲۵)$$

جہاں ما وہ مجموعی انصراف ہے جو کسی بوجھ کے تحت تمام بوجھوں کی وجہ سے ہو۔ دونوں صورتوں میں ج کے لیے وہ طولی اکائیاں استعمال کرنی چاہییں جو ما کے لیے استعمال کی جائے۔ اگر یہ اکائی انچ ہو تو ج = ۳۲٫۲ × ۱۲

۱۶۳ — بے لداؤ سلاخوں کا عرضی ارتعاش

لارڈ ریلےؔ نے یہ بات دکھائی ہے کہ اگر ایک سلاخ آزاد عرضی ارتعاش میں ہو تو سلاخ کے انصرافی منحنی کے متعلق جو مفروضے اختیار کیے جائیں وہ ایک بڑی حد کتنے ہی مختلف کیوں نہ ہوں ان سے جو تعدد حاصل ہوتے ہیں وہ زیادہ مختلف نہیں ہوتے۔ دفعہ گزشتہ میں تقریبی حساب میں دراصل اسی واقعے سے فائدہ

ؔ Lord Rayleigh

اٹھایا گیا ہے کیونکہ اس میں ایک لمبے لداؤ سلاخ کے لیے انصرافی منحنی وہی فرض کیا گیا ہے جو اس کے ذاتی وزن کے یکساں منقسم بوجھ کے تحت سکونی طور پر ہوتا ہے اور اس مفروضے سے ایک آسان جبری جملہ حاصل ہو گیا۔ لیکن اس کے لیے حسب ذیل عمل زیادہ عام طور پر استعمال کیا جاتا ہے:—

فرض کرو کہ ایک خاص مبداء سے فاصلہ لا پر ایک پتلی سلاخ کے نقطے کا انصراف وقت ت پر ما ہے اور حیطۂ ارتعاش یا ما کی انتہائی قیمت اس نقطے کے لیے مَا ہے۔ تب اگر سلاخ کا وزن فی اکائی طول و ہو تو صفحہ ۴۷۰

لچکدار قوت غیر منصرف محل کی جانب فی اکائی طول $\frac{\text{و}}{\text{ج}} \times \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر ت}^2}$ ہوگی۔

اس لیے مساوات (۶) دفعہ ۷۷ کے متناظر:—

$$\text{آ}^2\,\frac{\text{فر}^4\text{ما}}{\text{فر لا}^4} = -\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر ت}^2}$$

یا

$$\frac{\text{فر}^4\text{ما}}{\text{فر لا}^4} + \frac{\text{و}}{\text{ج آ}^2}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر ت}^2} = \text{۰} \quad \ldots\ldots(\text{۱})$$

اب ما کو موسیقی فرض کرو یعنی

$$\text{ما} = \text{مَا جم م}^2\sqrt{\frac{\text{ج آ}^2}{\text{و}}}\,\text{ت} \quad \ldots\ldots(\text{۲})$$

جس کے ایک دور کی مدت $\frac{2\pi}{\text{م}^2}\sqrt{\frac{\text{و}}{\text{ج آ}^2}}$ ہے

اور تعدد $\text{ن} = \frac{\text{م}^2}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{ج آ}^2}{\text{و}}}$

جہاں م صرف ایک عدد ہے۔ ما کی اس قیمت (۲) کو درج کرنے سے (۱) حسب ذیل ہو جاتی ہے:—

$$\frac{\text{فر}^4\text{مَا}}{\text{فر لا}^4} - \text{م}^4\,\text{مَا} = \text{۰} \quad \ldots\ldots(\text{۳})$$

جہاں $\text{م}^{4} = \frac{4\pi^{2}\text{ن}^{2}\text{و}}{\text{ج آ ے}}$ یا $\frac{\text{ف}^{2}\text{و}}{\text{ج آ ے}}$

جہاں ف = ۲π ن یعنی اس سادہ موسیقی حرکت کے تناظر زاویئی رفتار۔ اس مساوات کا حل دو مساواتوں

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + \text{م}^{2}\,\text{ما} = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - \text{م}^{2}\,\text{ما} = 0$$

کے حل کا حاصل جمع ہوگا یعنی

$$\text{ما} = \text{ا جم م لا} + \text{ب جب م لا} + \text{ج جزم لا} + \text{د جبزم لا} \quad ......(4)$$

یہ چار اختیاری مستقل ا، ب، ج، د باب ۶ کی طرح سلاخ کے سروں کی حالت سے قرار پائینگے۔ چار شرائط اس کے لیے کافی ہیں کہ تین مستقلوں کو ساقط کیا جاسکے اور ایک ایسی مساوات حاصل ہو جو م کو پوری کرنی چاہیے اور (۲) کی رو سے م سے تعدد حاصل ہوگا۔

تمثیل کے طور پر یہ صورت لو کہ ایک سلاخ کا طول ل ہے اور وہ دونوں سروں پر سہاری ہوئی ہے۔ اگر مبداء ایک سرے پر ہو تو لا = ۰

اور لا = ل پر ما = ۰ = $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}$ ۔ (۴) میں لا = ۰ رکھنے سے ا + ج = ۰

(۴) کو دوبارہ تفرق کرکے $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = 0$ رکھنے سے − ا + ج = یعنی

ا = ج = ۰

(۴) میں لا = ل رکھنے سے ب جب م ل + د جبزم ل = ۰

(۴) کو دوبار تفرق کرکے $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = 0$ رکھنے سے

− ب جب م ل + د جبزم ل = ۰

اس لیے ۲ ب جب م ل = ۰

اگر ب = ۰ یا م = ۰ تو لا کی تمام قیمتوں کے لیے ی = ۰
یعنی سلاخ سکون کی حالت میں رہیگی - اگر ب صفر نہ ہو اور جب م ل = ۰ تو م ل = π یا ۲π ، ۳π ، وغیرہ -
ان میں سے پہلی قیمت لینے سے جو ست ترین ارتعاش کے متناظر صفحہ ۱۷۲
ہوگی م = $\frac{\pi}{ل}$ اور (۲) سے تعدد

$$ن = \frac{م^{۲}}{۲\pi}\sqrt{\frac{ج\,آ^{۲}\,ے}{و}} = \frac{\pi}{۲\,ل^{۲}}\sqrt{\frac{ج\,آ^{۲}\,ے}{و}} \quad .... (۵)$$

نتیجہ (۵) دفعہ ۱۶۲ سے مقابلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ تقریبی حل اس سے کتنی قریبی مطابقت رکھتا ہے - اگر ایک مدور فولادی دُھرے کو لیں جس کا قطر ق انچ اور طول ل انچ ہو تو و = $۰{،}۲۸ \times \frac{\pi}{۴} ق^{۲}$ پونڈ ، $آ^{۲} = \frac{\pi}{۶۴} ق^{۴}$ ، ج = ۳۲،۲ × ۱۲ انچ فی ثانیہ ، ے = ۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ - اس طرح ارتعاشوں کی تعداد فی منٹ حسبِ ذیل ہوگی :-

$$ن = \frac{۶۰\pi}{۲\,ل^{۲}}\sqrt{\frac{۳۲{،}۲ \times ۱۲ \times ۳۰ \times ۱۰^{۶} \times \pi\, ق^{۴} \times ۴}{۶۴ \times ق^{۲} \times \pi \times ۰{،}۲۸}} = \frac{۴۸۰۰۰۰۰\, ق}{ل^{۲}} \quad ...(۶)$$

تعدد اس صورت میں م^۲ کے متناسب ہیں اس لیے م کی دوسری ، تیسری ، چوتھی ، وغیرہ قیمتوں کے لیے یعنی دوسرے ، تیسرے ، وغیرہ ارتعاشوں کے تعدد ست ترین یعنی بنیادی ارتعاش کے ۴ ، ۹ ، ۱۶ ، وغیرہ گنے ہونگے - قسری ارتعاش کی فاصل یا گمکی رفتار ان میں سے کسی ایک کے ساتھ منطبق ہوسکتی ہے لیکن مشینری کی معمولی کامی رفتاروں کے لیے یہی بنیادی ارتعاش سب میں زیادہ عام ہے - سلاخ کے سروں کے دوسرے حالات کے تحت دوسرے ارتعاش بھی واقع ہو سکتے ہیں -

ان کے حل علم صوت کی کتابوں میں ملینگے۔ سلاخ دونوں سروں پر ثابت ہو تو
اس کے لیے جم م ل جمز م ل = ۱، اور سست ترین ارتعاش کے لیے حل
م ل = ۴٫۷۳ یا تقریباً $\frac{۳\pi}{۲}$ ہے۔ سلاخ ایک سرے پر ثابت اور
دوسرے پر آزاد ہو تو جم م ل جمز م ل = -۱ اور سست ترین ارتعاشوں
کے لیے حل م ل = ۱٫۸۷۵ ہے۔ سلاخ ایک سرے پر ثابت اور دوسرے
پر سہاری ہوئی ہو تو جم م ل = ممز م ل، اور پہلا حل م ل = ۳٫۹۲۷ ہے۔

۱۶۴۔ گھومتے دُھروں کی ورطئی رفتار

جب ایک گول دُھرا گھومتا ہے تو اُس کا مرکزی خط ٹھیک ریاضیاتی صحت کے ساتھ اس کی گردش کے محور پر منطبق نہیں ہوگا اور اس کے اسباب میں دُھرے کا وزن، دھرے کی خفیف سی خمیدگی، ارتعاشوں اور دیگر اسباب شامل ہیں۔ اس طرح دُھرے کے جھول کی وجہ سے جو مرکز گریز قوتیں پیدا ہونگی اُن سے دُھرے پر ایک خماؤ کا معیار پیدا ہوگا جو دُھرے کو منصرف کرنے کا میلان رکھیگا اور انصراف کے بڑھنے سے مرکز گریز قوت بڑھیگی۔ یہ منصرف کرنے والی قوتیں رفتار کے مربع کے اور انصراف کے متناسب ہوتی ہیں اور ان کی مزاحمت صرف دُھرے کی لچک کی قوتوں سے ہوتی ہے۔ اس لیے اگر گردشی رفتار بڑھے تو رفتار ایک ایسی قیمت کو پہنچیگی جس پر مرکز گریز قوت لچک کی قوتوں سے زیادہ ہوگی اور انصراف اور زور، اگر روکے نہیں گئے، تو بڑھتے جائینگے یہاں تک کہ شکستگی واقع ہوگی۔ یہ فاصل رفتار جس پر غیر قائمیت پیدا ہوتی ہے دُھرے کی ورطئی رفتار کہلاتی ہے۔

بے لداؤ دُھرے کے لیے، یا ایسے دُھرے کے لیے جس کا جسمود قابلِ نظر اندازی ہو اور جو ایک ایسے بھاری بوجھ کو اُٹھائے ہو جس کا گردشی نصف قطر دُھرے کے طول کے مقابلے میں چھوٹا ہو ورطئی رفتار وہی

ہوگی جو سہاروں کے انہی حالات کے تحت عرضی ارتعاش کا تعدد ہوگا - اگر دُھرے کے کسی حصّے کی مرکز گریز قوتوں کے اِس جزوِ تحلیلی کو جو گردش کے محور میں سے گزرنے والے کسی مستوی میں ہو باقی حصّے کے لیے ایک متخلل قوت سمجھیں تو ہم ورطے کے مظہر کو یہ سمجھ سکتے ہیں کہ دھرے کے قسری ارتعاش کے تعدد اور طبعی عرضی ارتعاش کے تعدد کے مساوی ہوجانے سے پیدا ہوا ہے - اس کے تصور کا ایک بہتر طریقہ یہ ہوگا کہ گھومتے دُھرے کی مرکز گریز قوتوں کو یہ سمجھیں کہ اُن لچکدار قوتوں کی تعدیل کرتے ہیں جو دھرے کو سیدھا کرنے کا تقاضا کرتی ہیں اور اس طرح یہ مرکز گریز قوتیں صلابت کو گھٹاتی ہیں کیونکہ گھومتے دُھرے کی خماؤ کی صلابت وہ حاصل سیدھا کرنے والی قوت ہوگی جو لچک کی اور مرکز گریز قوتوں کے متحدہ عمل سے پیدا ہو - اس طرح ورطی رفتار وہ رفتار ہے جس پر صلابت صفر ہوتی ہے اور مدتِ دوران لامتناہی یا تعدد صفر ہوتا ہے -

بے لدا ہوا دُھرا ـــــ فرض کرو کہ دھرے کا وزن و پونڈ فی اکائی طول ہے، اور ق قطر، اور آ ایک قطر کے گرد تراشش کا معیارِ جمود یعنی $\frac{\pi}{64}$ ق^4، اور ے شے کی راست لچک کا مقیاس، اور سہ زاویئی رفتار نیم قطری فی ثانیہ میں - گردش کے محور کو محور لا مانو اور گردش کے محور سے دُھرے کے مرکزی خط کے متغیر انصراف کو ما مانو - جاذبہ کے اثرات کو نظر انداز کریں تو مرکز گریز قوت فی اکائی طول جو خماؤ کا عمل کرتی ہے حسبِ ذیل ہوگی :-

$$\frac{و}{ج} \cdot سہ^2 \cdot ما$$

مساوات (٦) دفعہ ٧٧، کے و کی جگہ اس کو استعمال کریں تو

$$\frac{فر^4 ما}{فر لا^4} = \frac{و سہ^2}{ج آ ے} ما \quad \text{..............} (1)$$

یا $\frac{\text{فر}^{2}\text{ا}}{\text{فر ل}^{4}} - \text{م}^{4}\text{ا} = ۰$ ....(۲)

جہاں $\text{م}^{4} = \frac{\text{و سہ}^{2}}{\text{ج آ ے}}$ ....(۳)

اگر سہ = ف رکھا جائے تو مساوات (۲) بالکل مساوات (۴) دفعہ ۱۶۳ بن جاتی ہے۔ اس لیے معلوم ہوا کہ ورطئی رفتاریں چکر فی منٹ میں وہی ہیں جو عرضی ارتعاش کے تعدد ہیں۔ ان کی قیمت مختلف صورتوں کے لیے دفعہ ۱۶۳ میں معلوم کی گئی ہے اور ان کو دُھرانا غیر ضروری ہے۔ عملی استعمال کے لیے مختلف صورتوں کے ضابطے نتیجہ (۶) دفعہ ۱۶۳ کی طرح تحویل کرلیے جاسکتے ہیں۔ دُھرے کی صورت میں ایک بہت چھوٹی یا چکراتی ہوئی مسند کو ایک "سہارا" سمجھا جاسکتا ہے اور لمبی استوار مسند کو ثابت سرے کی حالت سمجھا جاسکتا ہے۔ دفعہ ۱۶۲ کی تقریبی قیمتیں (۴)، (۵)، (۷) اور (۸) اور دیگر قیمتیں اسی طرح حاصل ہوئی ہیں صرف ورطئی رفتاروں کے لیے درست رہینگی۔

بنیادی یا پست ترین قیمت کے علاوہ دیگر فاصل یا ورطئی رفتاریں اعلیٰ رفتاروں پر پائی جائیگی جیسا کہ دفعہ ۱۶۳ میں اشارہ کیا گیا ہے۔ ان کے لیے مقدار م ل کی قیمتوں کا ایک سلسلہ ہوگا۔

اکیلے بوجھ —— اگر ایک دُھرے پر ایک بوجھ و اتنا بھاری ہو کہ دُھرے کی کمیت اس کے مقابلے میں نظر انداز کی جاسکے اور بوجھ کے ابعاد دُھرے کے طول کے مقابلے میں چھوٹے ہوں تو گردش کی فاصل رفتار وہ رفتار ہوگی جس پر بوجھ کی مرکز گریز قوت دُھرے کی لچک کی سیدھا کرنے والی قوت کے عین مساوی ہو۔ اگر فاصل رفتار سہ ہو اور بوجھ کے مرکزِ جاذبہ کا انصراف گردش کے مرکز سے ا ہو اور بوجھ کے مقام پر صلابت یعنی لچک کی قوت فی اکائی انصراف ص ہو تو مرکز گریز قوت کو لچک کی قوت کے مساوی رکھنے سے —— صفحہ ۴۷۲

$$\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{سہ}^{2}\,\text{ا} = \text{ص}\,\text{ا} \quad \ldots\ldots (۴)$$

$$\text{سہ}^{2} = \frac{\text{ص ج}}{\text{و}}$$

$$\text{سہ} = \sqrt{\frac{\text{ص ج}}{\text{و}}} \quad \ldots\ldots (۵)$$

اور رفتار چکر فی ثانیہ میں $\text{ن} = \frac{\text{سہ}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{ص ج}}{\text{و}}} \quad \ldots\ldots (۶)$

اور یہ وہی ہے جو عرضی ارتعاش کے لیے (۱۱)، (۱۱ ل)، (۱۳)، (۱۴)، (۱۸)، (۱۹)، (۲۰) دفعہ ۱۶۲ میں اور عام ارتعاش کے ضابطہ (۲) دفعہ ۱۵۹ میں حاصل ہوئی ۔ عملی ضابطہ (۲۱)، دفعہ ۱۶۲، بھی قابلِ اطلاق ہے۔

دوسری رفتاروں پر انصراف ۔۔۔ فرض کرو کہ ابتداءً بوجھ کا مرکزِ جاذبہ گردش کے مرکزی خط سے بقدر فاصلہ ع کے ہٹا ہوا ہے۔ تب کسی رفتار سہ پر مرکز گریز قوت اور لچک کی سیدھا کرنے والی قوت کی مساوات ہے :۔

$$\frac{\text{و}}{\text{ج}}\,\text{سہ}^{2}(\text{ع} + \text{ا}) = \text{ص} \times \text{ا} \quad \ldots\ldots (۷)$$

$$\text{ا} = \text{ع} \times \frac{\text{و سہ}^{2}}{\text{ص ج} - \text{و سہ}^{2}} = -\text{ع}\,\frac{\text{و سہ}^{2}}{\text{و سہ}^{2} - \text{ص ج}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

یہ فاصل قیمت $\text{سہ}^{2} = \frac{\text{ص ج}}{\text{و}}$ پر لا انتہا ہوتا ہے ۔ سہ کی اس سے کم قیمتوں کے لیے صفر سے لا انتہا تک بدلتا ہے ۔ سہ کی اس سے زیادہ قیمتوں کے لیے ا منفی ہوتا ہے اور قیمت ۔ ع کے قریب آتا ہے ۔ اگر دُھرا ابتداءً بالکل مستقیم ہو اور انحراف ع بوجھ کے توازن سے باہر ہونے کی

وجہ سے ہو یعنی اس وجہ سے کہ اس کا مرکزِ جاذبہ دُھرے کے مرکز پر منطبق نہ ہو تو ما کے ۔ ع کے قریب آنے کے معنے یہ ہونگے کہ فاصل رفتار سے اوپر بوجھ ایسے محور کے گرد گردش کریگا جو رفتار کے بڑھنے سے اس کے مرکزِ جاذبہ کے قریب تر آتا جائیگا ۔ (ڈی لاوول بھاپ تربین کے خم پذیر دُھرے کا یہی اصول ہے) ۔ اگر وزن کامل توازن میں ہو اور ابتدائی انحراف ع دُھرے کی خمیدگی کی وجہ سے ہو تو (چونکہ ما دُھرے کے انصراف کو تعبیر کرتا ہے اس لیے) بوجھ کے مرکزِ جاذبہ کا گردش کے محور سے انصراف حسبِ ذیل ہوگا:-

$$\text{ع} + \text{ما} = \text{ع} \times \frac{\text{ص ج}}{\text{ص ج} - \text{و سہ}^2} = -\text{ع} \cdot \frac{\text{ص ج}}{\text{و سہ}^2 - \text{ص ج}} \quad \ldots\ldots(9)$$

فاصل رفتار سے نیچے اس کی قیمت ع سے لاتناہی تک بدلیگی اور فاصل رفتار سے اوپر یہ صفر کے قریب آئیگا یعنی گردش کا اقتضا دُھرے کو سیدھا کرنا ہوگا ۔ فاصل رفتار میں سے گزرنے پر شکستگی کے واقع نہ ہونے کی وجہ یہ ہے کہ جس عرصے میں رفتار فاصل قیمت پر رہتی ہے وہ اتنا صفحہ ۱۴۷۲
خفیف ہوتا ہے کہ بڑا انصراف پیدا نہیں ہونے پاتا ۔ مساوات (۸) کو یوں لکھا جاسکتا ہے :-

$$\text{ما} = \text{ع} \frac{\text{سہ}^2}{\frac{\text{ص ج}}{\text{و}} - \text{سہ}^2} \;\text{یا}\; \text{ع} \frac{\text{سہ}^2}{\text{سہ}_{\text{ف}}^2 - \text{سہ}^2} \;\text{یا}\; -\text{ع} \frac{\text{سہ}^2}{\text{سہ}^2 - \text{سہ}_{\text{ف}}^2} \quad \ldots\ldots(10)$$

جہاں سہف فاصل قیمت $\sqrt{\frac{\text{ص ج}}{\text{و}}}$ ہے ۔ اس مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر سہ فاصل قیمت کے تقریباً مساوی رہے تو انصراف اور اس کی وجہ سے زور کی حدت بہت شدید ہو سکتے ہیں ۔

بوجھ کی جسامت کا اثر —— اگر گردش کرنے والے بوجھ کے ابعاد دُھرے کے طول کے مقابلے میں خفیف نہ ہوں تو

De Laval —

اس بات کا لحاظ رکھنا ضروری ہوگا کہ دُھرے کے انصراف کی وجہ سے گھومنے والے وزن کا ہر ایک حصہ اپنی گردش کے مستوی کو ہر لحظہ بدل رہا ہے۔ (اس کا ایک اہم استثناء وہ صورت ہے جس میں ایک اکیلا بوجھ مماثل مسندوں کے وسط میں ہو)۔ ان صورتوں کے لیے زیادہ صحیح قیمت اور نیز دُھروں کی ورطئی حرکت کے مضمون کے متعلق بہت سا مواد پروفیسر ڈنکرلے، ڈاکٹر چری[۱]، مصنف کتاب ہذا، اور مسٹر کر[۲] کے لکھے ہوئے پرچوں میں ملیگا۔

کئی بوجھ — اگر ایک دُھرے پر کئی بوجھ ہوں تو گردش کی فاصل رفتاریں دفعہ ۱۶۲ کے آزمائشی ضابطہ (۱۸) سے معلوم کی جاسکتی ہیں جس کی تجربے سے تصدیق ہوچکی ہے۔ یہی ضابطہ اُن صورتوں میں بھی استعمال کیا جاسکتا ہے جن میں دُھرے کا ذاتی جمود قابل نظر انداز نہ ہو۔ مختلف لداؤں اور سہاروں کے دُھروں کے لیے متعدد عملی قاعدے پروفیسر ڈنکرلے کے ایک پرچے میں ملینگے جو لورپول انجینیری سوسائٹی کی روئداد دسمبر ۱۸۹۴ء میں شائع ہوا ہے۔

مثال ۱ - ایک فولادی دُھرے کی ورطئی رفتار معلوم کرو جس کا قطر انچ اور طول ۵ فٹ ہے اور جو ایسی چھوٹی مسندوں میں سہارا گیا ہے جو سروں پر اس کی سمت کو مقید نہیں کرتیں۔

مساوات (۶) دفعہ ۱۶۳ سے

$$ن = \frac{۴۸۰۰۰۰۰}{۶۰ \times ۶۰} = ۱۳۳۳ \text{ چکر فی منٹ}$$

مثال ۲ - ایک انتصابی فولادی دُھرے پر، جس کا قطر $\frac{۱}{۲}$ انچ ہے اور جس کا طول، دونوں سروں پر کی لمبی مسندوں کے درمیان $۷\frac{۱}{۲}$ انچ ہے، مسندوں کے وسط میں ایک پہیہ لگا ہوا ہے جس کا وزن

---

[۱] Dunkerley [۲] Dr. Chree [۳] Kerr

۴ پونڈ ہے ۔ دُھرے پر پہیہ لگانے کی وجہ سے دُھرے کی صلابت میں کوئی اضافہ ہوا ہو تو اس کو نظر انداز کر کے گردش کی فاصل رفتار معلوم کرو۔ اور اگر پہیے کا مرکزِ جاذبہ دُھرے کے مرکز سے $\frac{۱}{۱۰۰}$ انچ ہٹ کر ہو تو فاصل رفتار کی $\frac{۹}{۱۰}$ رفتار پر دھرے میں اعظم خماؤ کا زور معلوم کرو۔ ے = ۳۰×۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ ۔

مثال ۲ دفعہ ۸۶ سے صلابت ص یعنی بوجھ کے مقام پر قوت فی انچ انصراف حسبِ ذیل ہوگی:۔

$$ص = \frac{۱۹۲ \text{ آ ے}}{ل^۳}$$

صفحہ ۴۷۵ اس لیے فاصل رفتار چکر فی منٹ میں حسبِ ذیل ہوگی:۔

$$\frac{۶۰}{۲\pi}\sqrt{\frac{ص \text{ ج}}{و}} = \frac{۳۰}{\pi}\sqrt{\frac{۱۹۲ \text{ آ ے ج}}{و ل^۳}}$$

$$= \frac{۳۰}{\pi}\sqrt{\frac{۸ \times ۱۲ \times ۳۲٫۲ \times \pi \times ۱۰^۶ \times ۳۰ \times ۱۹۲}{۱۵ \times ۱۵ \times ۱۵ \times ۲۵۶ \times ۶۴ \times ۴}}$$

= ۴۸۰۰ چکر فی منٹ

اس رفتار کے ۹ء پر مساوات (۱۰) دفعہ ۱۶۴ کی رُو سے مرکزی انصراف

$$= ۰٫۱ \left\{ \frac{سہ^۲}{سہ^۲ - (\frac{۹}{۱۰} سہ)^۲} \right\} = ۰٫۱ \times \frac{۸۱}{۱۹} = ۰٫۴۲۶ \text{ انچ}$$

مرکزی (مرکز گریز) خماؤ کی قوت ۰٫۴۲۶ × ص ہوگی اور مرکزی خماؤ کا معیار (مثال ۲ دفعہ ۸۶) حسبِ ذیل ہوگا:۔

$$مر = \frac{۱}{۸} \times ۰٫۴۲۶ \times ل \times ص = \frac{۰٫۴۲۶ \times ۵ \times ۲ \times ص}{۸} \text{ پونڈ انچ}$$

اور اعظم خماؤ کا زور

$$= \frac{ح}{حق} = \frac{ح}{آ ۸} = \frac{۰٫۴۲۶ \times ۷٫۵ \times ۱۹۲ \times ۳۰ \times ۱۰^{۶} \times آ}{۸ \times ۸ \times آ \times (۷٫۵)^{۳}}$$

= ۹۸۱۶۰ پونڈ فی مربع انچ

مثال ۳ ــ مثال ۲ کو اس صورت کے لیے حل کرو کہ مسندیں ڈھرے کے سروں کی سمت کو مقید نہ کریں۔

اس صورت میں $ص = \frac{۴۸ آ ے}{ل^{۳}}$ یعنی سابق قیمت کا $\frac{۱}{۴}$۔ اس لیے فاصل رفتار سابق قیمت کی $\sqrt{\frac{۱}{۴}}$ یا $\frac{۱}{۲}$ یعنی $\frac{۴۸۰۰}{۲} = ۲۴۰۰$ چکر فی منٹ ہوگی۔

فاصل رفتار کے $\frac{۹}{۱۰}$ پر مرکزی انصراف حسبِ سابق ۰٫۴۲۶ انچ ہوگا، لیکن معادل مرکزی بوجھ ۰٫۴۲۶ × ص سابق قیمت کا $\frac{۱}{۴}$ ہوگا اور مرکزی خماؤ کا معیار

$$\frac{۱}{۴} \times ۰٫۴۲۶ \times ص \times ل$$

ہوگا جو سابق قیمت کا $۲ \times \frac{۱}{۴}$ یا $\frac{۱}{۲}$ ہے۔ اس لیے خماؤ کا زور سابق قیمت کا $\frac{۱}{۲}$ یعنی ۴۹۰۸۰ پونڈ فی مربع انچ ہوگا۔

۱۶۵ ـ گھومتے ڈھروں کے عرضی ارتعاش ــ کوئی ڈھرا گھوم رہا ہو اور اس میں عرضی خلل پیدا کیا جائے تو اس کو سیدھا کرنے والی لچک کی قوت اس کے ذاتی جمود سے پیدا ہونے والی مرکز گریز قوت کی وجہ سے گھٹ جاتی ہے۔ اس طرح سے اس کی صلابت اور عرضی ارتعاش کے تعداد گھٹ جائینگے اور مدتِ دوران بڑھ جائیگی۔ فرض کرو کہ نہ گھومنے کی حالت میں ڈھرے کا طبعی تعداد $\frac{ف}{۲\pi}$ ہے، اور زاویئی رفتار سہ کے ساتھ

گھومنے کی حالت میں $\frac{\text{فَ}}{\pi ۲}$ ہے۔ تب مساوات (۲) دفعہ ۱۶۴ کی طرح مرکزگریز قوت کی رعایت رکھنے سے دفعہ ۱۶۳ کی مساوات (۳) کی رُو سے

$$\frac{\text{فر}^{۴}\text{ا}}{\text{فرلا}^{۴}} - \frac{\text{فَ}^{۲} + \text{سہ}^{۲}}{\text{ج آ سے}} \times \text{وما} = ۰ \quad \ldots\ldots (۱)$$

صفحہ ۴۷۶ اس لیے ارتعاش دفعہ ۱۶۳ کی قسم کے ہونگے اور :—

$$\text{فَ}^{۲} + \text{سہ}^{۲} = \text{ف}^{۲} \quad \ldots\ldots (۲)$$

یا

$$\text{فَ}^{۲} = \text{ف}^{۲} - \text{سہ}^{۲} \quad \ldots\ldots (۳)$$

تعدد ہوگا

$$\text{ن} = \frac{۱}{\pi ۲}\sqrt{\text{ف}^{۲} - \text{سہ}^{۲}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اور مدتِ ارتعاش

$$\text{ت} = \frac{\pi ۲}{\sqrt{\text{ف}^{۲} - \text{سہ}^{۲}}} \quad \ldots\ldots (۵)$$

ہم دفعہ گزشتہ میں دیکھ چکے ہیں کہ سہ = ف پر ورطئی رفتار واقع ہوتی ہے۔ کسی دَوری خلل سے پیدا ہونے والے قسری عرضی ارتعاش کے لیے فاصل تعدد (۴) سے حاصل ہوگا۔ صریحاً یہی ایک اکیلے بوجھ یا متعدد بوجھوں کے لیے بھی درست ہے جو ایک قابلِ نظرانداز کمیّت کے دُھرے پر ہوں۔

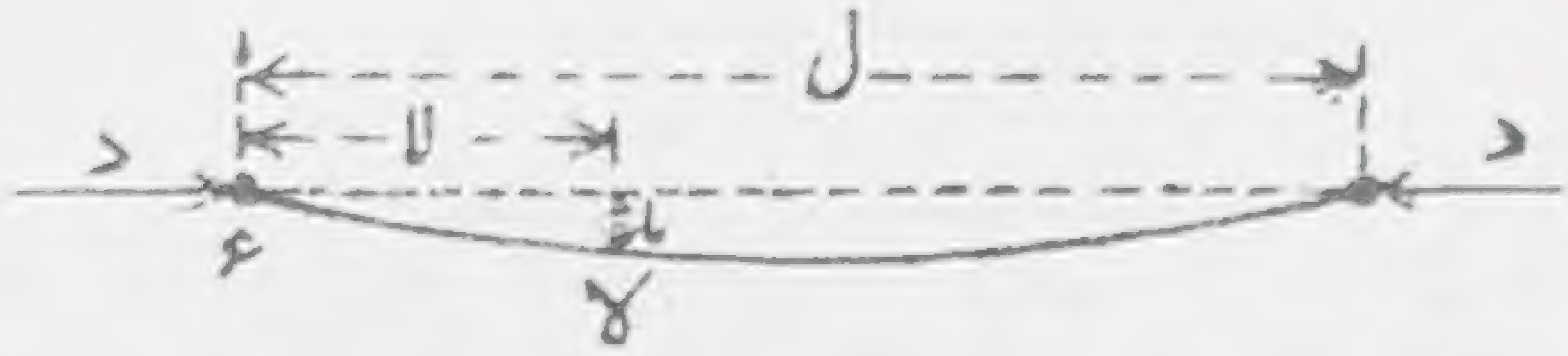
اگر اس طرح کا دوری خلل دُھرے کی گردش سے جاذبہ یا کسی اَور وجہ سے ہو تو ن = سہ ÷ ۲π، اور (۴) سے :—

$$\text{سہ}^{۲} = \frac{۱}{۲}\text{ف}^{۲} \quad \text{یا} \quad \text{سہ} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\text{ف} \quad \ldots\ldots (۶)$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک فاصل رفتار حقیقی ورطئی رفتار کی تقریباً ۷۱ فی صدی ممکن ہے۔

۱۶۶ — گھومتے دُھرے پر سروں کا دھکیل اور

مروڑ ـــــ گردش کی وجہ سے دُھرے کی خماؤ کی صلابت کم ہونے کی وجہ سے صریحاً اس کی سروں کا دھکیل برداشت کرنے کی صلاحیت بھی گھٹیگی، یعنی دُھرے کو داب روک تصور کیا جائے تو اس کا ناکارگی بوجھ گھٹ جائیگا - اس کی تمثیل کے لیے ایک ہی صورت کافی ہوگی - ایک گھومتے دُھرے پر غور کرو جس کا طول ل، قطر ق، اور وزن فی اکائی طول و ہے اور جو سروں پر ایسی مسندوں پر آزادانہ سہارا ہوا ہے جو اس کی سمت کو مقید نہیں کرتیں اور جن میں یہ ایک زاویئی رفتار سہ کے ساتھ



شکل ۲۰۴

گھومتا ہے اور فرض کرو کہ دُھرے پر ایک سروں کا دھکیل د عمل کرتا ہے (شکل ۲۰۴) - دُھرے کے محور کے ابتدائی محل کو محور لا مانو - اگر ایک سرے ء سے فاصلہ لا پر صرف سروں کے دھکیل کی وجہ سے انحراف ما ہو تو جس وقت کہ غیر قائمیت کی حالت واقع ہو، دفعہ ۷، کی علامتوں کی قرارداد کے مطابق دُھرے کے بے فساد محل کی طرف مقعر ہونے کی وجہ سے :-

$$آ سے \frac{فر^2 ما}{فر لا^2} = - د \times ما \qquad (1)$$

$$\frac{فر^4 ما}{فر لا^4} = - \frac{د}{آ سے} \times \frac{فر^2 ما}{فر لا^2}$$

اس کو دفعہ ۱۶۴ کی مساوات (۱) کے ساتھ ملائیں تو سروں کے صفحہ ۴۷۷
دھکیل اور گردش سے پیدا ہونے والی مرکز گریز قوت کے لیے :-

$$\frac{\text{فر}^{4}\text{ما}}{\text{فرلا}^{4}}+\frac{\text{د}}{\text{آ}^{4}\text{ے}}\times\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}-\frac{\text{وسہ}^{2}}{\text{ج آ}^{4}\text{ے}}\times\text{ما}=\text{۰} \;\;\ldots\ldots\;(\text{۲})$$

اس مساوات کا حل ذیل کی دو مساواتوں کے حلوں کا حاصل جمع ہوگا:—

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}+\text{م}_{1}^{2}\,\text{ما}=\text{۰} \qquad \text{اور} \qquad \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}-\text{م}_{2}^{2}\,\text{ما}=\text{۰}$$

جہاں (م_{2}^{2}) اور $(-\text{م}_{1}^{2})$ ذیل کی مساوات درجہ دوم کی اصلیں ہیں:—

$$(\text{م}^{2})^{2}+\frac{\text{د}}{\text{آ}^{4}\text{ے}}\,\text{م}^{2}-\frac{\text{وسہ}^{2}}{\text{ج آ}^{4}\text{ے}}=\text{۰}$$

یعنی

$$\text{م}_{1}^{2}=\sqrt{\frac{\text{د}^{2}}{\text{۴}(\text{آ}^{4}\text{ے})^{2}}+\frac{\text{وسہ}^{2}}{\text{ج آ}^{4}\text{ے}}}+\frac{\text{د}}{\text{۲ آ}^{4}\text{ے}}$$

اور

$$\text{م}_{2}^{2}=\sqrt{\frac{\text{د}^{2}}{\text{۴}(\text{آ}^{4}\text{ے})^{2}}+\frac{\text{وسہ}^{2}}{\text{ج آ}^{4}\text{ے}}}-\frac{\text{د}}{\text{۲ آ}^{4}\text{ے}}$$

اس طرح مساوات (۲) کا مکمل حل حسبِ ذیل ہے:—

$$\text{ما}=\text{ا جم م}_{1}\text{لا}+\text{ب جب م}_{1}\text{لا}+\text{ج جمز م}_{2}\text{لا}+\text{د جبز م}_{2}\text{لا} \;\;\ldots\ldots\;(\text{۳})$$

اور چونکہ $\text{لا}=\text{۰}$ پر $\text{ما}=\text{۰}=\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}$

$$\therefore \qquad \text{ا}=\text{۰}\,،\;\text{ج}=\text{۰}$$

اور چونکہ $\text{لا}=\text{ل}$ پر $\text{ما}=\text{۰}=\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}$

$$\therefore \qquad (\text{م}_{1}^{2}+\text{م}_{2}^{2})\;\text{ب جب م}_{1}\text{ل}=\text{۰}$$

اب چونکہ $\text{م}_1^2 + \text{م}_2^2$ صفر نہیں اور ب بھی صفر نہیں (کیونکہ اگر ب صفر ہو تو $\text{م}_1 = 0$، اور اس طرح خماؤ موجود ہی نہیں ہوگا) اس لیے :-

$$\text{جب } \text{م}_1 \text{ل} = 0 \quad \text{.................. (۴)}$$

یعنی غیر قائم حالات کے تحت :-

$$\text{م}_1 \text{ل} = \pi \text{، } 2\pi \text{، } 3\pi \text{، وغیرہ} \quad \text{............. (۵)}$$

پست ترین رفتار $\text{م}_1 = \frac{\pi}{\text{ل}}$ لینے سے

$$\text{م}_1^2 = \sqrt{\frac{\text{د}^2}{4(\text{آ}\,\text{ے})^2} + \frac{\text{و}\,\text{سہ}^2}{\text{ج}\,\text{آ}\,\text{ے}}} + \frac{\text{د}}{2\,\text{آ}\,\text{ے}} = \frac{\pi^2}{\text{ل}^2} \qquad (۶)$$

اس سے د کی وہ انتہائی قیمت حاصل ہوتی ہے جو ایک دی ہوئی گردشی رفتار سہ کے ساتھ قائمیت کے ساتھ برداشت کی جاسکتی ہے یا سہ کی وہ فاصل قیمت حاصل ہوتی ہے جو ایک دیے ہوئے دھکیل د کے تحت واقع ہوگی۔ سہ کی قیمت اور تعدد د کی وجہ سے گھٹ جاتے ہیں۔ اگر د = ۰ تو نتیجہ (۶) نتیجہ (۵) دفعہ ۱۶۳ کی شکل اختیار کرلیتا ہے جس سے بغیر سروں کے دھکیل کے دُھرے کی ورطئی رفتار (دفعہ ۱۶۴) حاصل ہوتی ہے۔ اگر سہ = ۰ تو نتیجہ (۶) آئیلر والی انتہائی قیمت کی شکل اختیار کرلیتا ہے جو دُھرے کے لیے بطور ایک ساکن داب روک کے حاصل ہوگی۔ یہ ضابطہ صریحاً صرف ایک انتہائی قیمت ہے اور حقیقی دُھروں میں سیدھے پن کی کمی، جاذبہ اور دیگر عرضی بوجھوں، وغیرہ، کی وجہ سے اس ضابطے پر قیود عائد ہونگی۔ اگر د کی علامت اُلٹ دی جائے تو ظاہر ہے کہ فاصل یا ورطئی رفتار گھٹنے کی بجائے بڑھ جائیگی۔ اس صورت کے لیے سہ (۶) میں د کی علامت بدلنے سے حاصل ہوسکتا ہے۔ سروں کے خارج المرکز دھکیل اور عرضی بوجھوں کا بھی لحاظ دفعات ۱۰۴، ۱۰۵ کی طرح رکھا جاسکتا ہے۔

حقیقی دُھروں میں سروں کے دھکیل سے پیدا ہونے والی غیر قائمیت بالعموم مرکز گریز قوتوں کے مقابلے میں بہت خفیف ہوتی ہے۔

مروڑ کا معیار ٹ بھی تھوڑی سی غیر قائمیت پیدا کریگا لیکن یہ عموماً ایک اوسط درجے کے سروں کے دھکیل اور مرکز گریز قوتوں کے اثر کے مقابلے میں نظر انداز کی جا سکیگی۔ آزادانہ سہارے ہوئے دُھرے کی غیر قائمیت کی شرط حسبِ ذیل مساوات سے حاصل ہوگی :-

$$\frac{\text{د}}{\text{آ}\,\text{ے}} + \frac{\text{ٹ}^{2}}{4\,\text{آ}^{2}\,\text{ے}^{2}} = \frac{\pi^{2}}{\text{ل}^{2}}$$

مثال ۱ ـــ مثال ۱ دفعہ ۱۶۴ کے دُھرے پر ۲۰۰ پونڈ کا ایک محوری دھکیل ہو تو فاصل رفتار معلوم کرو۔ فولاد کا وزن ۰.۲۸ پونڈ فی مکعب انچ۔ $\text{ے} = 30 \times 10^{6}$ پونڈ فی مربع انچ۔

و = وزن فی طولی انچ = ۰.۲۸ × ۰.۷۸۵۴ = ۰.۲۲ پونڈ

(۶) سے

$$\frac{\text{و}\,\text{س}^{2}}{\text{ج}\,\text{آ}\,\text{ے}} = \left(\frac{\pi^{2}}{\text{ل}^{2}} - \frac{\text{د}}{2\,\text{آ}\,\text{ے}}\right)^{2} - \frac{\text{د}^{2}}{4\,\text{آ}^{2}\,\text{ے}^{2}}$$

$$\text{س} = \sqrt{\frac{\text{ج}\,\text{آ}\,\text{ے}}{\text{و}}\left(\frac{\pi^{4}}{\text{ل}^{4}} - \frac{\pi^{2}\,\text{د}}{\text{ل}^{2}\,\text{آ}\,\text{ے}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi \times 10^{6} \times 30 \times 12 \times 32.2}{64 \times .22}\left(\frac{97.4}{12960000} - \frac{64 \times 200 \times 9.87}{\pi \times 10^{6} \times 30 \times 3600}\right)}$$

= ۱۳۶ نیم قطری فی ثانیہ

جو $136 \times \frac{30}{\pi} = 1300$ چکر فی منٹ کے مساوی ہے۔ اس طرح سے سروں کے دھکیل کی وجہ سے کمی $2\frac{1}{2}$ فی صدی کی ہوئی۔

۱۶۷ - **مروڑ کے ارتعاش** ـــــ مروڑ کے ارتعاشوں کی

جو مختلف صورتیں ہیں وہ طولی ارتعاش کی صورتوں کے بہت مشابہ ہیں (دفعہ ۱۶۱) ۔ مروڑ کی اُستواری تراش کی شکل پر منحصر ہوتی ہے (دیکھو دفعہ ۱۱۲)۔ ہم صرف دائری تراش کے دُھروں کی صورت پر غور کرینگے ۔

بے لداؤ دُھرا ـــــ ایک یکساں دُھرا جس کا قطر ق اور طول ل ہو (شکل ۲۰۱) اس طرح نصب ہو کہ ایک سرے پر مروڑ کا فساد واقع نہ ہو سکے اور دوسرا سرا آزاد ہو تو ثابت سرا ایک عقدہ یا ساکن تراش ہوگا۔ باقی سلاخ ایک ارتعاشی حرکت میں ہوگی جس میں ہر ایک حصہ کسی دی ہوئی آن میں محور کے گرد ایک دائرے میں ایک ہی سمت میں حرکت کر رہا ہوگا۔ ثابت سرے سے فاصلہ لا پر کے نقطے کا زاویئی حیطۂ ارتعاش آزاد سرے کا

جب $\left(\frac{لا}{ل} \times \frac{\pi}{۲}\right)$ گنا ہوگا۔ سست ترین یا بنیادی طبعی ارتعاش کا تعدد

$$ن = \frac{۱}{ت} = \frac{۱}{۴ل}\sqrt{\frac{س \times سر \times ج}{و}} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

ہوگا جہاں س عرضی لچک کا مقیاس ہے، $سر = \frac{\pi}{۴} ق^{۲}$ دُھرے کی تراش کا رقبہ ہے، و وزن فی اکائی طول ہے، اور ج اسراع بوجہ جاذبہ یعنی ۳۲٫۲ × ۱۲ انچ فی ثانیہ فی ثانیہ ہے ۔ تعدد سلاخ کے قطر ق پر منحصر نہیں ہوگا کیونکہ و، سر کے متناسب ہے ۔ طولی ارتعاش کی طرح بے لداؤ دُھرے کا طبعی تعدد اتنا زیادہ ہوگا کہ مشینری میں گمک کا احتمال نہیں ۔

اگر دُھرے کے دونوں سرے ثابت ہوں تو عقدے سروں پر ہونگے اور ل کو نصف طول ماننے سے تعدد (۱) سے حاصل ہوگا۔ اگر دونوں سرے آزاد ہوں تو عقدہ مرکز پر ہوگا اور اس صورت میں بھی ل کو نصف طول ماننے سے تعدد (۱) سے حاصل ہوگا۔

اکیلا بوجھ ـــ اگر ایک دُھرا ایک سرے پر ثابت ہو اور اس کے آزاد سرے، یا اعظم زاویئی حیطے کی تراش پر ایک بوجھ وہ ہو

(شکل ۲۰۲) جس کا (کمیتی) معیارِ جمود مج (یا $\frac{\text{و}}{\text{ج}}$ گ^2) اتنا بڑا ہو کہ دھرے کا (کمیتی) معیارِ جمود نظر انداز کیا جاسکے تو مدتِ ارتعاش اور آزاد یا طبعی مروڑی ارتعاشوں کا تعدد دفعہ ۱۵۹ کے عام ضابطوں (۴) اور (۵) سے حاصل ہونگے۔ اگر ایک مدور دھرے کی "مروڑ کی استواری" یعنی مروڑ کا معیار فی نیم قطری مروڑ ع ہو (۳) دفعہ ۱۰۹) تو

$$\text{ع} = \frac{\text{س جا}}{\text{ل}}$$

جہاں جا = تراش کے رقبے کا معیارِ جمود محور کے گرد = $\frac{\pi}{32}$ ق^4۔
اس طرح (۵) دفعہ ۱۵۹ حسبِ ذیل ہوجائیگا:۔

$$\text{ن} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{س جا}}{\text{مج ل}}} = \frac{\text{ق}^2}{20}\sqrt{\frac{\text{س}}{\text{مج ل}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{س جا ج}}{\text{و گ}^2\text{ل}}}$$

$$= \frac{\text{ق}^2}{20}\sqrt{\frac{\text{س ج}}{\text{و گ}^2\text{ل}}} \ \text{فی ثانیہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

جہاں گ بوجہ و کا گردشی نصف قطر ہے اور ج = ۳۲.۲ × ۱۲ جب کہ انچ کی اکائی استعمال کی جائے۔
پونڈ اور انچ استعمال کیے جائیں اور س = ۱۲ × ۱۰^6 پونڈ فی مربع انچ لیا جائے تو یہ حسبِ ذیل ہو جاتا ہے:۔

$$\text{ن} = 3400\,\text{ق}^2\sqrt{\frac{1}{\text{و گ}^2\text{ل}}} \ \text{فی ثانیہ} \quad (3)$$

اگر دھرے کا (کمیتی) معیارِ جمود بالکل قابلِ نظر اندازی نہ ہو تو (۲) میں جو تقریبی تصحیح کرنی ہوگی وہ طولی ارتعاش والی تصحیح کے مماثل ہوگی یعنی مج میں دھرے کے معیارِ جمود کا $\frac{1}{3}$ جمع کرنا ہوگا۔ صفحہ ۴۸۰

اگر دھرا دو یا زیادہ حصوں پر مشتمل ہو جن کے طول ل$_1$، ل$_2$ وغیرہ اور قطر ق$_1$، ق$_2$ وغیرہ ہوں، (شکل ۲۰۳) تو مروڑ کے

اکائی معیار سے پیدا ہونے والا مروڑ صریحاً تمام حصوں میں پیدا ہونے والے مروڑوں کا حاصل جمع ہوگا۔ یعنی

$$\frac{1}{\text{ع}} = \frac{1}{\text{س}}\left(\frac{\text{ل}_1}{\text{جا}_1} + \frac{\text{ل}_2}{\text{جا}_2} + \text{وغیرہ}\right) = \frac{32}{\pi\,\text{س}}\left(\frac{\text{ل}_1}{\text{ق}_1^4} + \frac{\text{ل}_2}{\text{ق}_2^4} + \text{وغیرہ}\right)$$

یہ ایک طریقہ مروڑ کی صلابت ع محسوب کرنے کا ہے جو متغیر قطر کے دُھروں کی تمام صورتوں میں استعمال ہوسکتا ہے۔ (۳) سے طبعی تعدد حسبِ ذیل ہوگا:۔

$$\text{ن} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{س}}{\text{مج}\left(\frac{\text{ل}_1}{\text{جا}_1} + \frac{\text{ل}_2}{\text{جا}_2} + \text{وغیرہ}\right)}} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{\pi\,\text{س}}{2\,\text{مج}\left(\frac{\text{ل}_1}{\text{ق}_1^4} + \frac{\text{ل}_2}{\text{ق}_2^4} + \text{وغیرہ}\right)}} \quad \ldots (4)$$

اس کو لکھا جاسکتا ہے:۔

$$\text{ن} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{س}}{\text{مج}\,\Sigma\left(\frac{\text{ل}}{\text{جا}}\right)}} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{20}\sqrt{\frac{\text{س}}{\text{مج}\,\Sigma\left(\frac{\text{ل}}{\text{ق}^4}\right)}} \quad \text{فی ثانیہ} \quad \ldots\ldots (5)$$

فولاد کے لیے انچ اور پونڈ کی اکائیوں میں:۔

$$\text{ن} = 3400\sqrt{\frac{1}{\text{وگ}^2\,\Sigma\left(\frac{\text{ل}}{\text{ق}^4}\right)}} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

ضابطے (۴) اور (۵) اس کے معادل ہیں کہ ضابطہ (۲) استعمال کیا جائے اور اس کے ساتھ کوئی قطر مثلاً ق استعمال کیا جائے اور طول کے جو متعدد حصے ہیں اُن میں ہر ایک حصہ یعنی ل_1، ل_2، وغیرہ نسبت $\left(\frac{\text{ق}}{\text{ق}_1}\right)^4$، $\left(\frac{\text{ق}}{\text{ق}_2}\right)^4$، وغیرہ، میں تبدیل کردیے جائیں۔

اس طرح کا "معادل طول" استعمال کرنے کا طریقہ مروڑ کی صلابت کے اُن تمام مسائل میں کار آمد ہوتا ہے جن میں کسی دُھرے کا قطر مختلف حصوں میں مختلف ہو۔

دو بوجھ ــــ اگر ایک آزاد دُھرے پر جس کا طول ل ہے دو بوجھ ہوں (شکل ۲۰۵ ء) تو عقدہ ان کے درمیان کہیں ہوگا۔ فرض کرو کہ بوجھوں کے معیارِ جمود مج$_1$ اور مج$_2$ ہیں اور عقدہ ان سے فاصلوں ل$_1$ اور ل$_2$ پر ہے۔ تب نظام کا طبعی تعددِ ارتعاش وہی ہوگا جو کسی ایک بوجھ کا ایسے دُھرے پر ہوتا جو عقدہ پر ثابت اور اُس بوجھ پر آزاد ہو۔ اس طرح (۲) سے :-

$$\text{ن} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{س جا}}{\text{مج}_1\,\text{ل}_1}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{س جا}}{\text{مج}_2\,\text{ل}_2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

اس لیے

$$\frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2} = \frac{\text{مج}_2}{\text{مج}_1}$$

صفحہ ۴۸۱ یعنی عقدہ طول ل کو بوجھوں کے جمود کے معیاروں کی معکوس نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ اس طرح

$$\text{ن} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{س جا}\,(\text{مج}_1 + \text{مج}_2)}{\text{ل مج}_1\,\text{مج}_2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{س جا}}{\text{ل}}\left(\frac{1}{\text{مج}_1} + \frac{1}{\text{مج}_2}\right)} \quad \ldots (۸)$$

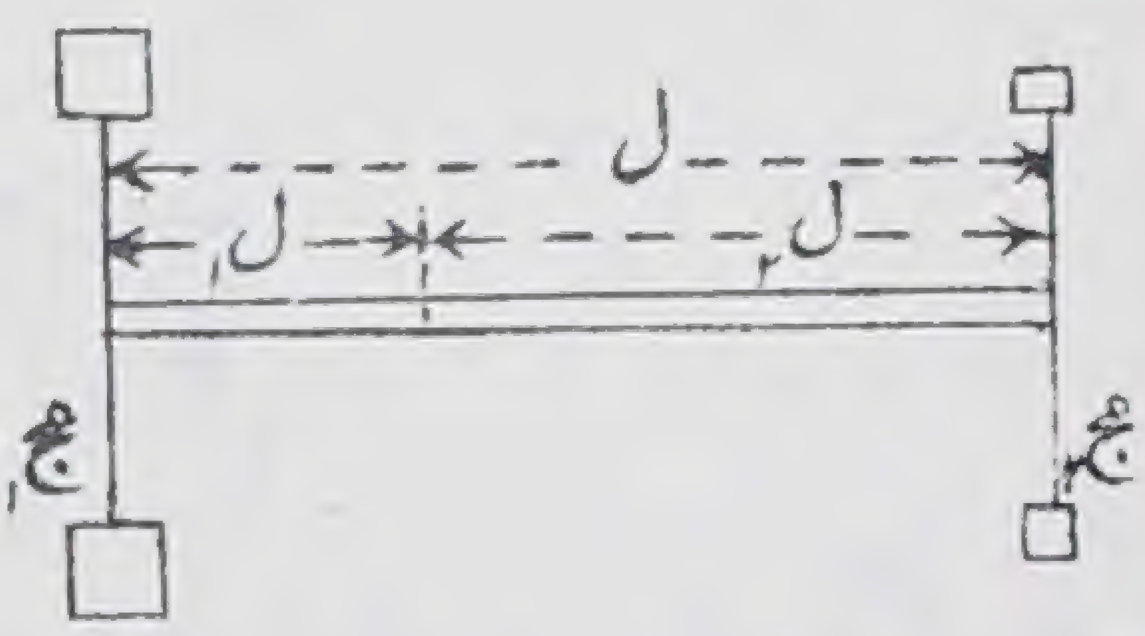
جس کو (۳) کی شکل کے ایک ضابطے کے طور پر لکھا جا سکتا ہے :-

(۸) کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں :-

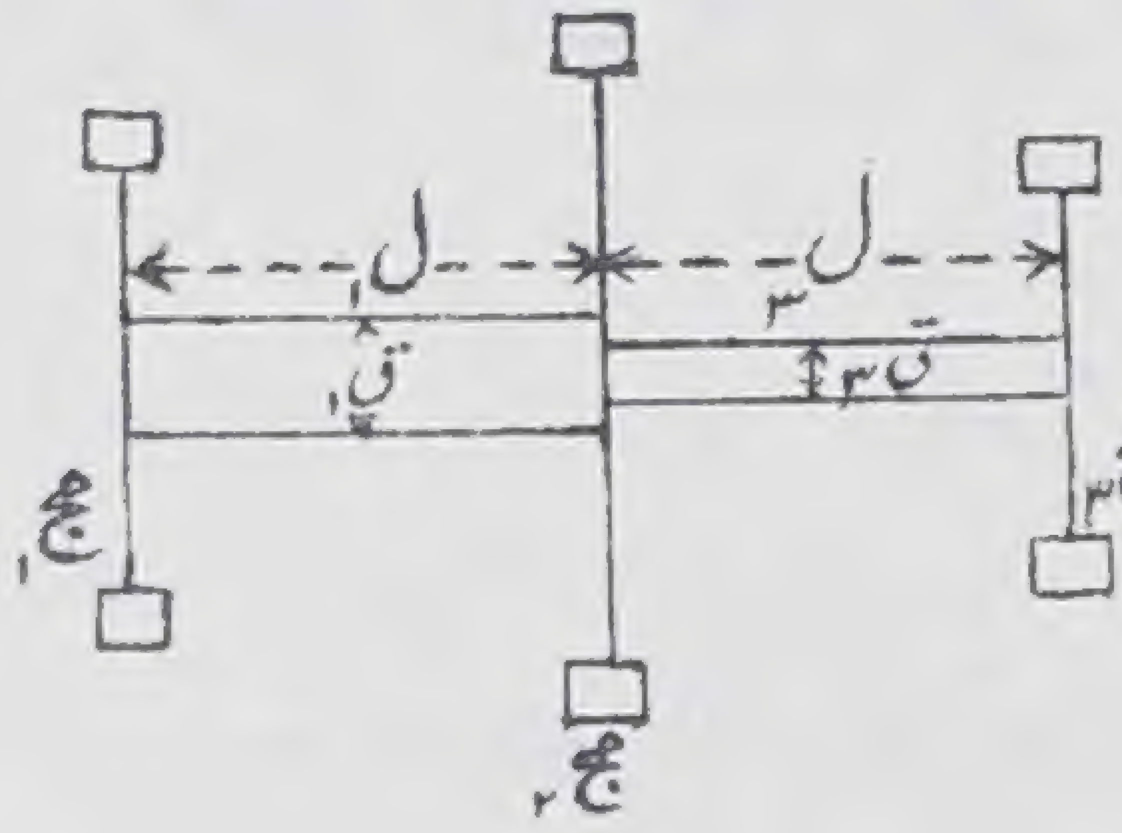
$$\text{ن}^2 = \text{ن}_1^2 + \text{ن}_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۹)$$

جہاں ن$_1$ اور ن$_2$ تعدد $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{س جا}}{\text{مج}_1\,\text{ل}}}$ اور $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{س جا}}{\text{مج}_2\,\text{ل}}}$ یعنی وہ تعدد ہیں

جو اس صورت میں ہوتے کہ دُھرا ایک سرے پر نصب ہوتا اور آزاد سرے پر علی الترتیب $جج_1$ اور $جج_2$ ہوتے۔



شکل ۲۰۵



شکل ۲۰۶

تین بوجھ — (شکل ۲۰۶) — بوجھوں کے درمیان طول اور قطر غیر مساوی ہیں۔ اس لیے

$$ع_1 = \frac{س\,جا_1}{ل_1} = \frac{\pi\, س\, ق_1^4}{32\, ل_1} \quad ، \quad ع_3 = \frac{س\,جا_3}{ل_3} = \frac{\pi\, س\, ق_3^4}{32\, ل_3}$$

صرف بایاں حصہ لیا جائے اور یہ سروں پر آزاد ہوتا تو تعدد (۸) کی رُو سے حسبِ ذیل ہوتے:-

$$ن_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{س\,جا_1}{ل_1}\left(\frac{1}{جج_1}+\frac{1}{جج_2}\right)}$$

صرف دایاں حصہ، سروں پر آزاد کیا جائے تو

$$ن_3 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{س\,جا_3}{ل_3}\left(\frac{1}{جج_3}+\frac{1}{جج_2}\right)}$$

صرف بایاں حصہ بیرونی سرے پر ثابت لیا جائے تو (۴) کی رُو سے:-

$$\text{نَ}_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{س جا}_1}{\text{ل}_1\,\text{جم}_1}}$$

صرف دایاں حصہ بیرونی سرے پر ثابت لیا جائے تو ۴۸۳

$$\text{نَ}_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{س جا}_2}{\text{ل}_2\,\text{جم}_2}}$$

تب پورے نظام کے تعددن حسبِ ذیل مساوات سے حاصل ہونگے:-

$$(\text{ن}^2 - \text{نَ}_1^2)(\text{ن}^2 - \text{نَ}_2^2) = (\text{نَ}_1\,\text{نَ}_2)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

جس کی دونوں اصلیں حقیقی ہیں ۔ ارتعاشوں کی نوعیت ع_1، ع_2، جم_1، جم_2، جم_3 کی قیمتوں کے باہمی ربط پر منحصر ہوگی ۔

مساوات (۱۰) حسبِ ذیل طور پر حاصل کی جا سکتی ہے :- اگر حصوں ل_1 اور ل_2 میں عقدے جم_1 اور جم_2 سے فاصلوں لا اور ما پر ہوں تو سروں کے بوجھوں کی مدتِ ارتعاش (۲) سے حسبِ ذیل ہوگی :-

$$\text{ن} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{س جا}_1}{\text{جم}_1\,\text{لا}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{س جا}_2}{\text{جم}_2\,\text{ما}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

درمیانی بوجھ جم_2 اُسی مدت میں اور دونوں عقدوں کے درمیان بطور ایک ضد عقدہ کے ارتعاش کریگا اور دُھرے کی مروڑ کی اُستواری صریحاً دونوں عقدوں کے درمیان کی مروڑ کی استواریوں کے حاصل جمع کے مساوی ہوگی یعنی

$$\text{ع} = \text{س}\left(\frac{\text{جا}_1}{\text{ل}_1 - \text{لا}} + \frac{\text{جا}_2}{\text{ل}_2 - \text{ما}}\right)$$

اس طرح $ن = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{س}{جج_۲}\left(\frac{جا_۱}{ل_۱ - لا} + \frac{جا_۲}{ل_۲ - ما}\right)}$ ....(۱۲)

(۱۲) اور (۱۱) کے درمیان لا اور ما کو ساقط کریں تو مساوات (۱۰) حاصل ہوتی ہے جس میں $ن_۱$، $ن_۲$، ن َ، ن َ کی وہ قیمتیں ہیں جو اوپر دی گئی ہیں۔ مساوات (۱۰) کی جو دو اصلیں ہیں اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ ارتعاش کے دو ممکن طور ہیں، ایک دو عقدی ارتعاش جس میں سرے کے بوجھوں $جج_۱$، $جج_۲$ دونوں کی گردش کی سمت ایک ہی ہوگی اور درمیانی بوجھ اس کی مخالف سمت میں گردش کریگا۔ دوسرا ارتعاش یک عقدی ارتعاش ہے جس میں اس عقدے کے قریب کے سرے کا بوجھ ایک سمت میں گھومتا ہے اور درمیانی بوجھ $جج_۲$ اور دوسرے سرے کا بوجھ مخالف سمت میں گھومتے ہیں۔

اَور صورتیں، اور چند عددی مثالیں، اور (۱۰) کی جیسی تعدد کی مساواتیں حاصل کرنے کا ایک آسان طریقہ ایک پرچے میں ملینگے جو چری[۱]، سینکی[۲]، اور ملنگٹن[۳] کا لکھا ہوا انسٹی ٹیوٹ آف سول انجینیرز کی روداد جلد ۱۶۲ میں ہے۔ نیز ایک اَور پرچے میں جو فرتھ[۴] اور لیمب[۵] کا لکھا ہوا انسٹی ٹیوٹ آف الکٹریکل انجینیرز کے رسالے جلد ۳۱ صفحہ ۶۴۶ میں ہے۔

مثال ۱ — ایک گیس انجن کے دو اڑ پہیے ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن ۸۰۰ پونڈ اور گردشی نصف قطر ۳۰ انچ ہے۔ یہ کرینک سے مساوی فاصلے پر ایک ۳ انچ قطر کے دُھرے پر باہم ۲۸ انچ کے فاصلے پر ہیں۔ مروڑ کے اہتزاز کے طبعی تعدد کا تخمینہ کرو۔ $س = ۱۲ \times ۱۰^{۶}$ پونڈ فی مربع انچ لو۔

کرینک کا معیارِ جمود اور دُھرے کو لگی ہوئی دیگر کمیتوں کے معیارِ جمود اڑ پہیوں کے مقابلے میں عموماً اتنے خفیف ہونگے کہ ان کو تقریباً نظر انداز صفحہ ۴۸۳

---

[۱] Chree [۲] Sankey [۳] Millington

[۴] Frith [۵] Lamb

کیا جا سکتا ہے ۔ اس صورت میں چونکہ عقدہ کرینک پر واقع ہوگا اس لیے کرینک کو تو بالکل نظر انداز کیا جا سکتا ہے ۔ تعدد صریحاً وہی ہوگا جو ایک ۱۴ انچ کے دُھرے کے ایک سرے پر ایک پہیہ اور دوسرا سرا ثابت ہونے کی صورت میں ہوتا ۔ (۳) سے یہ تعدد حسبِ ذیل ہوگا :-

$$ن = ۹ \times ۳۴۰۰ \sqrt{\frac{۱}{۱۴ \times ۹۰۰ \times ۸۰۰}} = ۹٫۶۵ \text{ فی ثانیہ یا}$$

۵۷۹ فی منٹ ۔

رفتار اس تعدد کے $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۳}$ ، $\frac{۱}{۴}$ وغیرہ کے قریب ہو تو مروڑ کے بہت بڑے ارتعاشوں کا اندیشہ ہے ۔

مثال ۲ــ ایک دُھرے پر جس کا قطر ۴ انچ ہے ایک اُڑ پہیہ لگا ہوا ہے جس کا وزن ۱۲۰۰ پونڈ اور گردشی نصف قطر ۱۸ انچ ہے اور ایک ڈینامو آرمیچر (armature) لگا ہوا ہے جس کا معیارِ جمود اُڑ پہیے کا $\frac{۳}{۴}$ ہے ۔ اُڑ پہیے اور آرمیچر کے درمیان فاصلہ ۲۸ انچ ہے ۔ مروڑ کی طبعی ارتعاشوں کا تعدد معلوم کرو ۔ س = ۱۲ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ ۔

عقدہ ۲۸ انچ کے طول کو نسبت ۴:۳ میں تقسیم کریگا اور اُڑ پہیے سے فاصلہ $\frac{۳}{۷}$ × ۲۸ = ۱۲ انچ پر ہوگا ۔ اس لیے (۱۷) یا (۳) دفعہ ۱۶۷ سے

$$ن = \frac{۱۶ \times ۳۴۰۰}{\sqrt{۱۲ \times ۱۸^۲ \times ۱۲۰۰}} = ۲۵٫۲ \text{ فی ثانیہ یا}$$

۱۵۱۰ فی منٹ ۔

ے محافظ

سوالات نمبر ۱۴

۱ - اگر ایک نزدیک نزدیک لپیٹی ہوئی مرغولی کمانی کا تار $\frac{1}{4}$ انچ قطر کا ہو اور اس کے پیچے ۱۰ ہوں جن میں سے ہر ایک کا اوسط قطر ۴ انچ ہو اور کمانی پر ۱۵ پونڈ کا بوجھ ہو تو آزاد ارتعاشوں کے تعدد معلوم کرو۔ (س = 12×10^6 پونڈ فی مربع انچ) ۔

۲ - ایک فولادی تار کا طول ۳ فٹ اور قطر $\frac{1}{10}$ انچ ہے - یہ ایک سرے پر ثابت ہے اور دوسرے سرے کو ایک چھوٹا ڈھلے لوہے کا استوانہ لگا ہوا ہے جس کا قطر ۸ انچ اور طول ۱ انچ ہے اور استوانے کا محور تار کے محور کی سیدھ میں ہے۔ ڈھلے لوہے کا وزن ۰٫۲۶ پونڈ فی مکعب انچ اور فولاد کے لیے س = 12×10^6 پونڈ فی مربع انچ لے کر استوانے کے طبعی مروڑ کے اہتزازوں کا تعدد معلوم کرو۔

۳ - ایک فولادی سلاخ جس کی چوڑائی ۱ انچ اور گہرائی ۲ انچ ہے دو نقطوں پر آزادانہ سہاری گئی ہے جن کا باہمی فاصلہ ۳ فٹ ہے اور سلاخ پر سہاروں کے وسط میں ۴۰۰ پونڈ کا ایک بوجھ ہے۔ سلاخ کا وزن نظر انداز کر کے طبعی عرضی ارتعاشوں کا تعدد معلوم کرو۔ (ے = 30×10^6 پونڈ فی مربع انچ) ۔

۴ - اگر سوال نمبر ۳ میں بوجھ فصل پر یکساں پھیلا ہوا ہو تو تعدد معلوم کرو۔

۵ - اگر سوال نمبر ۳ کی سلاخ پر ۴۰۰ پونڈ کا ایک بوجھ وسط میں اور ۴۰۰ پونڈ کا ایک بوجھ یکساں پھیلا ہوا ہو تو تعدد معلوم کرو۔

۶ - اگر سوال نمبر ۳ میں بوجھ ایک سہارے سے ۹ انچ کے فاصلے پر ہو تو طبعی عرضی ارتعاشوں کا تعدد معلوم کرو۔

۷ - ایک بے لداؤ فولادی دُھرے کا قطر $\frac{1}{2}$ انچ اور طول ۴ فٹ ہے۔ اگر مسندیں سروں پر اس کی سمت کو مقید نہ کریں تو ورطئی رفتار معلوم کرو۔

(ے = ۳۰ × $۱۰^۶$ پونڈ فی مربع انچ)۔

۸۔ ایک دُھرے کا قطر $\frac{۱}{۲}$ انچ اور طول ۱۵ انچ ہے۔ مسندیں سروں کی سمت کو مقید نہیں کرتیں۔ حسبِ ذیل صورتوں میں فاصل رفتاریں معلوم کرو (ا) بے لداؤ (ب) وسط میں ۴۴ پونڈ کا بوجھ (ج) مرکزی بوجھ دُھرے کے ذاتی وزن کے مساوی۔ (فولاد کا وزن ۰٫۲۸ پونڈ فی مکعب انچ)۔ صفحہ ۴۸۴

۹۔ سوال نمبر ۸ (ب) کا دُھرا انتصابی ہو اور رفتار فاصل رفتار کی ۰٫۹۵ ہو اور بوجھ بقدر ۰٫۰۱ انچ کے توازن سے باہر ہو تو دُھرے میں خماؤ کا اعظم زور معلوم کرو۔

۱۰۔ سوال نمبر ۷ کا دُھرا ۸۰۰ چکر فی منٹ کی رفتار کے ساتھ گھوم رہا ہو تو عرضی ارتعاشوں کا طبعی تعدد معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک چھ اُستوانی تیل انجن کے کرینک دُھرے کا قطر $\frac{۱}{۲}$ ۳ انچ ہے۔ اگر اس کے دونوں سروں پر ایک ایک اُڑ پہیہ لگا ہو جس کا وزن ۱۱۰۰ پونڈ اور گردشی نصف قطر ۱۷ انچ ہو اور اُڑ پہیوں کے درمیان معادل طول ۶ فٹ ۸ انچ ہو تو آزاد مروڑ کے ارتعاش کا تعدد معلوم کرو۔

۱۲۔ ایک گیس انجن کو دو اُڑ پہیے ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن ۱۳۵۰ پونڈ اور گردشی نصف قطر ۲۵ انچ ہے اور جو ۲۶ انچ کے فاصلے پر $\frac{۱}{۴}$ ۳ انچ قطر کے دُھرے پر لگے ہوئے ہیں۔ طبعی مروڑ کے ارتعاش کا تعدد معلوم کرو۔

صفحہ ۳۸۵

پندرہواں باب

جانچ مشینیں، آلات اور طریقے

۱۶۸ - جانچ مشینیں ــــــ مختلف اشیا کے ٹکڑوں کی تخریب تک جانچ کرنے کی جو مشینیں ہیں وہ اصولوں اور تفصیلات کے لحاظ سے کئی قسم کی ہیں اور ان کی ساخت اور استعمال سے کما حقہ بحث کرنے کے لیے ایک علیحدہ کتاب درکار ہوگی۔ موجودہ باب میں چند سادہ قسموں کا ایک مختصر بیان دیا جائیگا جو خاص اغراض کے لیے استعمال ہوتی ہیں۔ مزید معلومات کے لیے طلبہ جانچ کے متعلق کتابوں، اصلی پرچوں، اور خاص اس فن سے متعلق رسالہ جات، وغیرہ، کا مطالعہ کر سکتے ہیں۔

ایسی انگریزی مشینوں میں جو خاصی جسامت کی ہوں اور مختلف اغراض کے لیے کام دے سکیں زور لگانے کا عمل اکثر ماقوائی دباؤ کے ذریعے وارد کیا جاتا ہے جو ایک غواص (Plunger) پر عمل کرتا ہے۔ امریکی مشینوں میں زور وارد کرنے کا عام طریقہ طاقت (یعنی برقی طاقت، وغیرہ) سے چلائی جانے والی پیچ گیرائی (Screw gearing) ہے۔ یہی طریقہ انگلستان میں چھوٹی مشینوں کے لیے استعمال کیا جاتا ہے جن کو ہاتھ سے

چلایا جاسکتا ہے اور حال میں طاقت سے چلنے والی بڑی مشینوں میں بھی استعمال کیا جانے لگا ہے ۔ مشین کے ذریعے امتحانی ٹکڑے پر جو بوجھ یا قوت لگائی جاتی ہے اُس کی پیمائش یا "تول" عموماً ایک متحرک توازنی وزن (Counterpoise) اور ایک بیرم یا متعدد بیرموں کے ایک نظام کے ذریعے کیا جاتا ہے لیکن بعض اوقات قوت سیالی دباؤ کے ذریعے ایک دھاتی دیافرغمہ (Diaphragm) پر ناپی جاتی ہے ۔ غالباً برطانیہ عظمے[۱] میں بڑی جانچ مشین کی عام ترین قسم وہ ہے جس میں بوجھ کو تولنے کے لیے ایک اکیلا بیرم یا گز ہوتا ہے ۔ ہم اب اس مشین کو اور ایک مرکب بیرم والی مشین کو بیان کرینگے اور شکل ، وغیرہ ، سے اس کی وضاحت کرینگے ۔

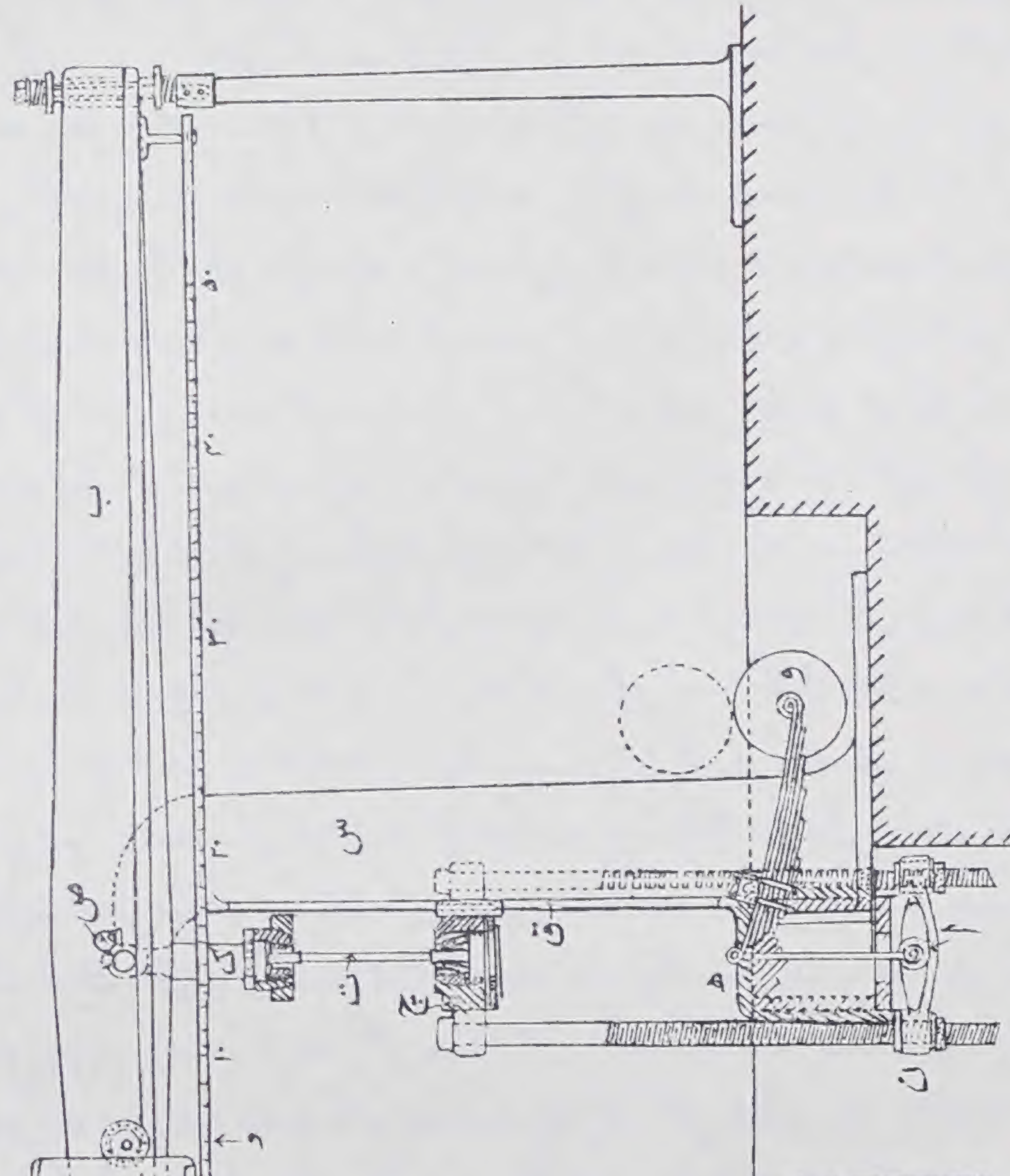
۱۶۹ — تمثیلی عام جانچ مشین —

انتصابی یک بیرمی جانچ مشین —— اشکال ۲۰۷ تا ۲۰۹ میں ایک وک اسٹیڈ[۵] ۵۰ ٹن کی انتصابی یک بیرمی جانچ مشین کا اصول اور اہم اجزا دکھائے گئے ہیں ۔ جزئیات کو حذف کر دیا گیا ہے ۔

تناؤ —— شکل ۲۰۷ میں اس مشین کا جانبی ارتفاع دکھایا گیا ہے جو تنشی امتحان کے لیے مستعمل ہے ۔ جب امتحانی ٹکڑے ت پر کوئی کھینچ نہ ہو تو متحرک توازنی وزن یا سوارہ وزن سر پیمانے کے صفر کے نشان پر ہوتا ہے اور شہتیر اپنے دھار دار نصاب ص پر عین توازن میں ہوتا ہے ۔ نصاب صدر ستون س کے اوپر ایک سختائی ہوئی نشست پر رکھا ہوا ہے ۔ اس مشین میں زور اس طرح وارد کیا جاتا ہے کہ شدید دباؤ کا پانی ایک ضابط کواڑی کے ذریعے ایک فولادی ناقوائی استوانے ھ میں داخل کیا جاتا ہے جس کا قوچ (ram) ایک چلیپا سرا کو استوار لگا ہوا ہے ۔

---

۵ Wicksteed



شکل ۲۰۶

صفحہ ۲۸۶ جب چلیپا سرا نیچے کو چلایا جاتا ہے تو کھینچ دونوں لمبے پیچوں کے ذریعے چلیپا سر
چ کو منتقل ہوتی ہے (جو قائدوں ق پر حرکت کرتا ہے) جس کو امتحانی ٹکڑے
ت کا نچلا سرا مختلف ترکیبوں کے ساتھ لگا ہوا ہے جو دفعہ ۱۷۰ میں بیان
کی گئی ہیں۔ امتحانی ٹکڑے کا بالائی سرا اسی طرح ایک بھنور کلی (Shackle)
صفحہ ۲۸۷ ک کو لگا ہوا جو ایک چاقو کی دھار سے لٹکتی ہے جو صدر بیرم یا شہتیر ب
میں نصب ہے۔ جب امتحانی ٹکڑے پر کھینچ زور لگانے والے استوانے ھ
کے ذریعے زیادہ کی جاتی ہے تو صدر بیرم کا توازن توازنی وزن ن کو دائیں طرف
حرکت دے کر قائم رکھا جاتا ہے۔ اس طرح نمونے پر بوجھ ایک معمولی تک
کی طرح تولا جاتا ہے۔ متحرک وزن ن کا محل ایک پیمانے د کے ذریعے
ظاہر ہوتا ہے جس میں ٹن اور ٹن کے دسویں حصے کے نشان کیے گئے
ہیں اور اس کو ن پر لگے ہوئے ایک کسر پیما کے ذریعے ایک ٹن کے
$\frac{۱}{۱۰۰}$ تک پڑھا جاتا ہے۔ توازنی وزن ن ۵۰ ٹن والی مشین میں ۱ ٹن کا
ہوتا ہے اور چاقو کی دھار جس سے بھنور کلی ک لٹکائی جاتی ہے نصاب
ص سے ۳ انچ کے فاصلے پر ہوتا ہے۔ اس طرح ت میں ہر ایک ٹن
کے اضافے کے لیے ن کو ۳ انچ حرکت دینا ہوگا۔ توازنی وزن کو حرکت
دینے کا طریقہ شکل ۲۰۷ میں نہیں دکھایا گیا۔ اکثر یہ حرکت ایک لمبے پیچ
کے ذریعے دی جاتی ہے جو شہتیر کے اندر ہوتا ہے اور تسمے کے ذریعے
چلایا جاتا ہے۔ یہ طریقہ شکل ۲۱۱ میں دکھایا گیا ہے۔ طاقت شہتیر کے
چھوٹے سرے کو ایک دُھرے کے ذریعے منتقل ہوتی ہے دوہرے ہوک[۵]
جوڑ کے ذریعے ایک اور دُھرے سے جوڑا ہوا ہوتا ہے جو ثابت مسند دن
میں ہوتا ہے۔ ہوک جوڑ کی وجہ سے شہتیر اپنی اُفقی چاقو کی دھار
ص کے گرد ایک انتصابی مستوی کے متوازی آزادی سے حرکت کرسکتا ہے۔
توازنی وزن کو بہت تیزی سے حرکت دینے کے لیے بعض اوقات ایک

۵ (Hooke)

ماقوائی اُسطوانہ لگایا جاتا ہے جس کا قوچ ایک تار کی رسی کے ذریعے عمل کرتا ہے ۔ صدر بیرم ب کے لمبے بازو کا سرا ایک خاص فاصلے میں حرکت کر سکتا ہے جس کو بالائی اور زیرین روکوں کے ذریعے ترتیب دیا جاتا ہے ۔ یہ روک شکل میں دکھائے گئے ہیں ۔ روکوں کو کمانیاں لگی ہوئی ہیں تاکہ جانچ ٹکڑے کے ٹوٹنے سے شہتیر کو ان روکوں کے ساتھ تصادم کی وجہ سے نقصان نہ پہنچے ۔ ماقوائی اُسطوانے ھ کا قوچ جانچ ٹکڑے کے فساد کے دوران میں ایک بھاری توازنی وزن و کو اُٹھاتا ہے جس سے غرض یہ ہے کہ جب نکاس کوارٹی کو کھول کر پانی کو خارج کر دیا جاتا ہے تو قوچ اُسطوانے میں واپس آجائے ۔ زور ڈالنے کے اغراض کے لیے قوچ کی ضرب کافی لمبی ہوتی ہے لیکن زور ڈالنے والے سرچ کو نمونے کے طول کی موزونیت سے دو لمبے پیچوں کے ذریعے ترتیب دیا جاتا ہے جو آڑے ٹکڑے ا میں لگے ہوئے گرد انکوں ن میں نیچے اور اوپر کیے جا سکتے ہیں ۔ اس مطلب کے لیے کہ دونوں پیچ برابر گھومیں ان کو ایک ہی دُھرے پر ایک جیسے پیچوں سے چلایا جاتا ہے ۔ (یہ دھرا چلیپا سرچ میں لگا ہوا ہوتا ہے) ۔ پیچ، پیچہ پہیوں کے ساتھ گیرائی میں ہوتے ہیں (یہ نہیں دکھائے گئے) جو پیچوں کو چلیپا سرچ سے ذرا نیچے لگے ہوتے ہیں ۔ پیچہ دُھرا ایک دستے کے ذریعے گھمایا جاتا ہے جو مشین کے سامنے ہوتا ہے ۔

فشار ۔۔۔ شکل ۲۰۸ میں اس مشین کا جانبی ارتفاع دکھایا گیا ہے جو فشار کے لیے مستعمل ہے ۔ شکل میں شہتیر نہیں دکھایا گیا ۔ جانچ ٹکڑے ت کا بالائی سرا ماقوائی قوچ کے عمل سے نیچے کو دبایا جاتا ہے ۔ قوچ کا عمل پیچوں کے ذریعے زور ڈالنے والے سرچ کو منتقل ہوتا ہے اور جانچ ٹکڑے پر ایک چپٹی تختی کے ذریعے ڈالا جاتا ہے ۔ جانچ ٹکڑے کا نچلا سرا ایک چپٹی تختی پر ٹکا ہوا ہوتا ہے جو ایک چھوٹے پلیٹ فارم ل پر ہوتی ہے ۔ پلیٹ فارم اس نچوار توت کو

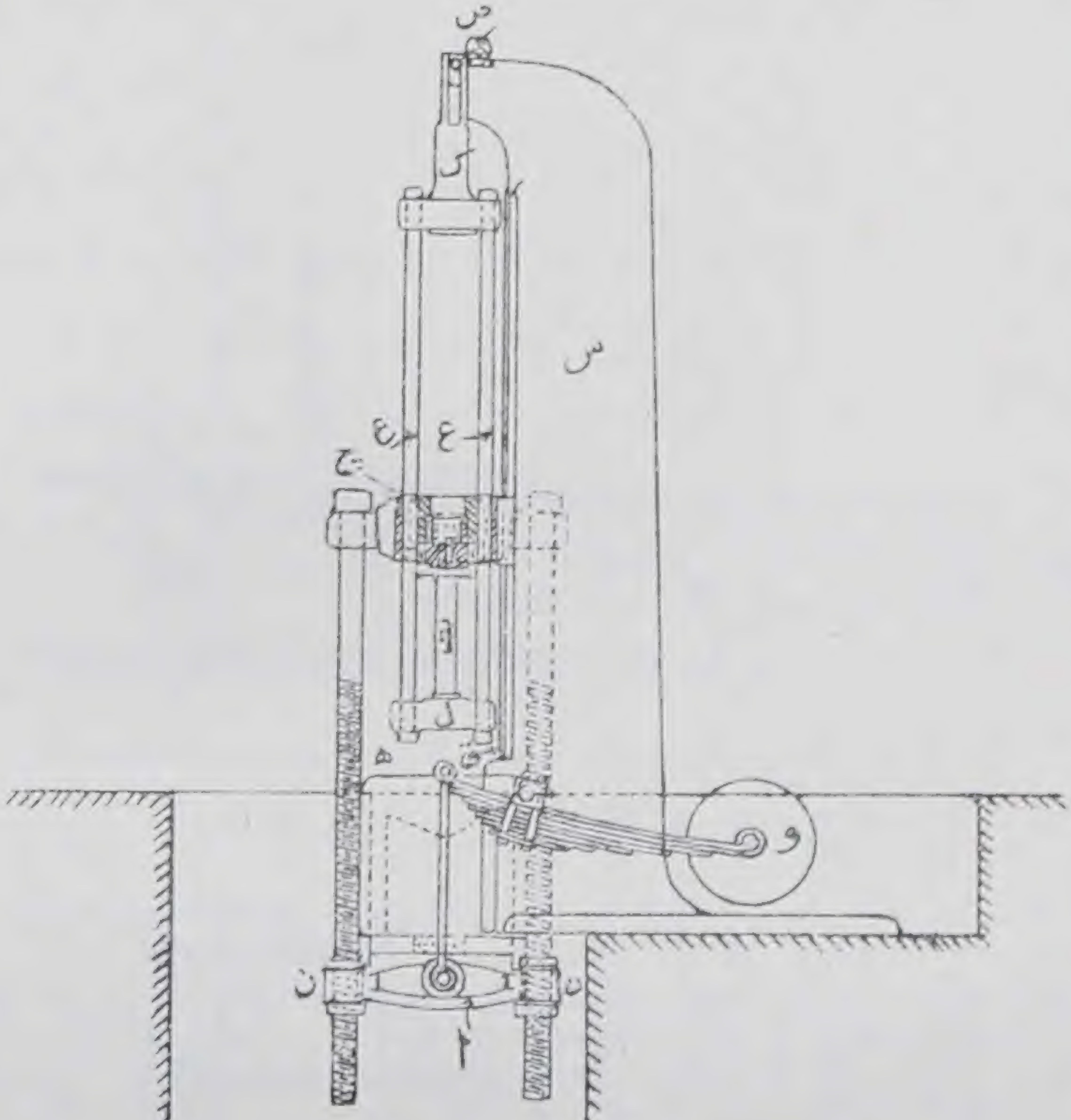
ھ Sockets

بھنور کلی ک تک چار لمبی سلاخوں ع کے ذریعے پہنچتا ہے ۔ یہ سلاخیں باہر نکال لی جا سکتی ہیں ۔ اسی طرح کی لمبی سلاخیں شکل ۲۱۰ میں ایک پلیٹ فارم کو دستی طاقت کی مشین کی بالائی بھنور کلی سے منسلک کرتے ہیں۔ جب یہ لمبی سلاخیں استعمال میں ہوں بھنور کلی ک پر کے زائد وزن کی وجہ سے شہتیر اُس وقت توازن میں نہیں ہوتا جب کہ جانچ ٹکڑے پر کوئی قوت عمل نہ کر رہی ہو اور توازنی وزن نما پیمانے کے صفر پر ہوگا ۔ یہ صفر کی غلطی مابعد کی تمام قرأتوں (readings) سے تفریق کر لینی چاہیے۔

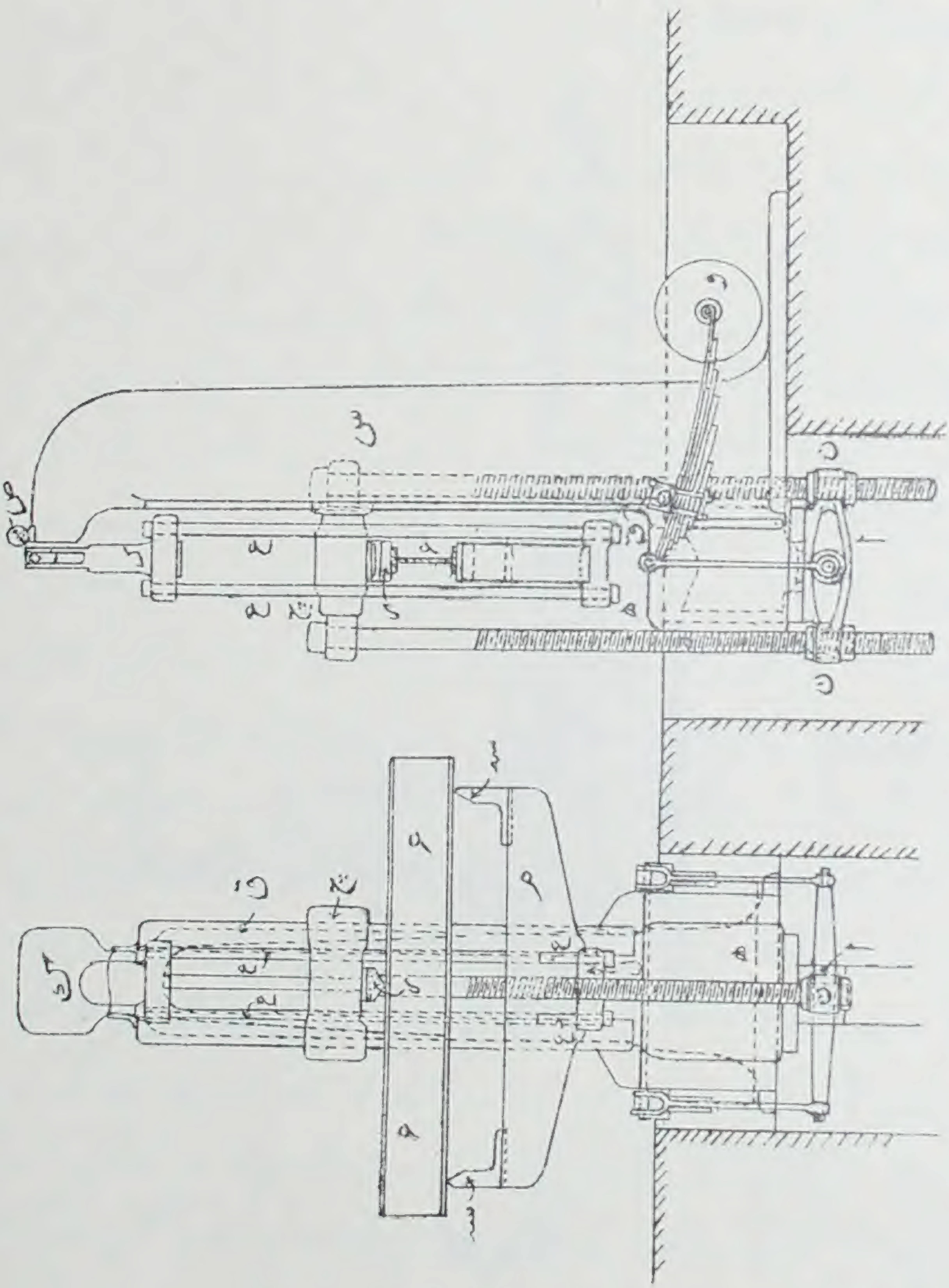
خماؤ ـــــ شکل ۲۰۹ میں اُس مشین کا ایک پیش رُوکار اور ایک جانبی روکار دکھایا گیا ہے جو خماؤ کے امتحان کے لیے استعمال ہوتی ہے ۔ جس شہتیر ع کا امتحان کرنا ہے وہ سہاروں سہ پر ٹکا ہوا ہوتا ہے جن کا باہمی فصل ایک بہت سنگین ڈھلے لوہے کے شہتیر م پر
صفحہ ۴۸۸ ترتیب پذیر ہوتا ہے ۔ م پلیٹ فارم ل پر رکھا ہوتا ہے جو بھنور کلی ک سے چار سلاخوں ع کے ذریعے لٹکا ہوتا ہے ۔ اس طرح بوجھ تک ب سے تولا جاتا ہے (شکل ۲۰۷) ۔ م کے زائد بوجھ کی وجہ سے جو صفر کی غلطی واقع ہوگی اس کا لحاظ رکھنا چاہیے ۔ سوائے اس صورت کے ستون کے ممکنہ بڑے سے بڑے طول کا امتحان کرنا ہو آڑا شہتیر م اکثر فشاری امتحانوں کے لیے جگہ پر رکھا جاتا ہے ۔ ا اور ج کو ملانے والا سامنے کا پیچ اور سامنے کی دو سلاخیں ع شکست کردی گئی ہیں تاکہ نقشہ واضح ہو۔ بوجھ ایک V نما ٹکڑے ما کے ذریعے ڈالا جاتا ہے جو چلیبیا سر پیچ کی نچلی جانب ہوتا ہے ۔ ر کی متبادل شکل نصف استوانی ہے ۔ یہ شکل اور سہارے سہ شکل ۲۱۰ میں دکھائے گئے ہیں ۔

دوسری یک بیں جی مشین ـــــ شکل ۲۱۰ میں ایک ۵ ٹن کی وِک اسٹیڈ جانچ مشین دکھائی گئی ہے جو تناؤ، فشار، خماؤ ہ، اور مروڑ کے امتحانوں کے لیے کام دے سکتی ہے ۔ زور

ہ Wicksteed



شکل ع۳۰۸



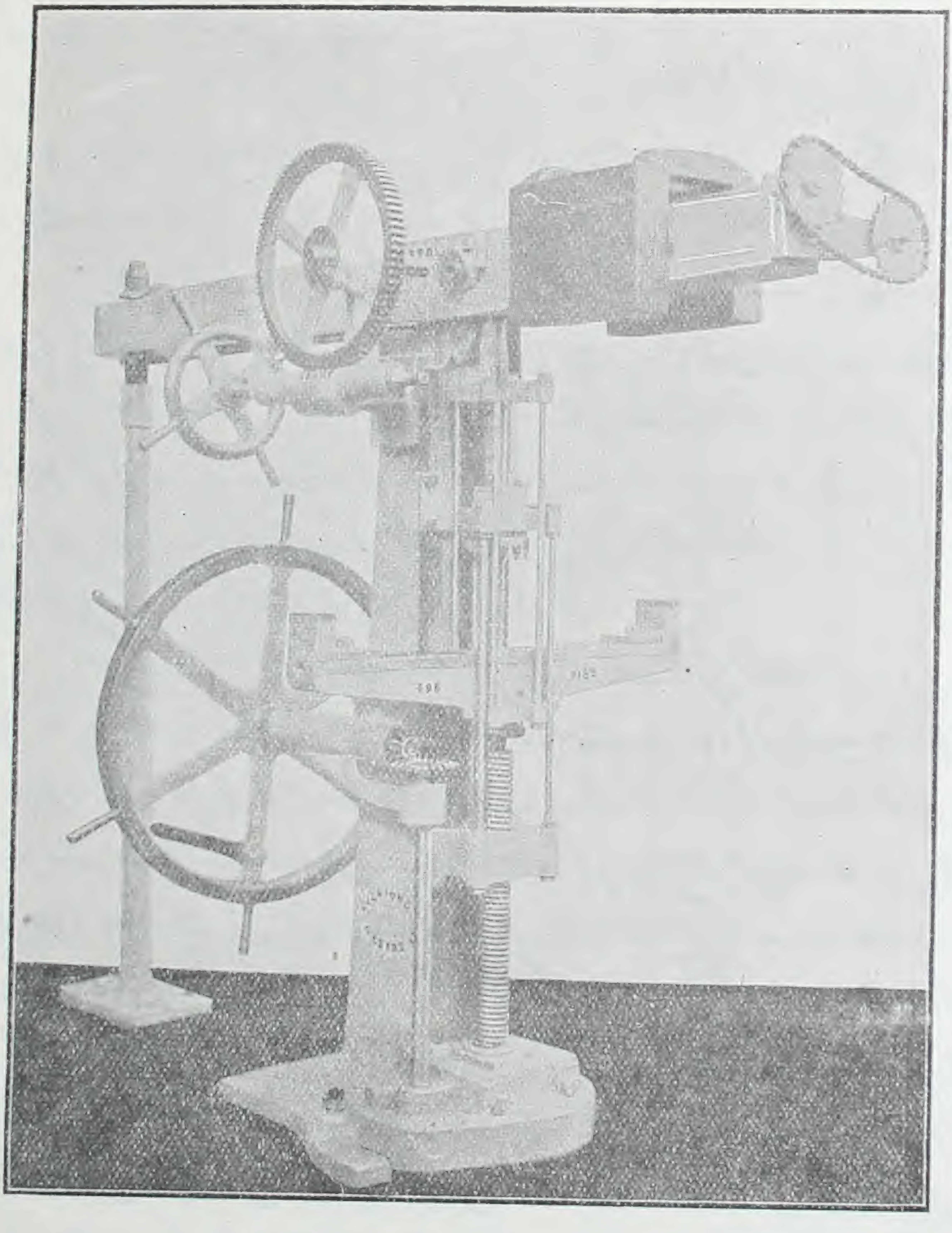
شکل ۲۰۹

اس صورت میں ایک بڑے مرکزی پیچ کے ذریعے ڈالا جاتا ہے جو گیرائی کے ذریعے ہاتھ کی طاقت سے چلایا جاتا ہے۔ ہاتھ کی طاقت بڑے ہتھ پہیے کو لگائی جاتی ہے۔

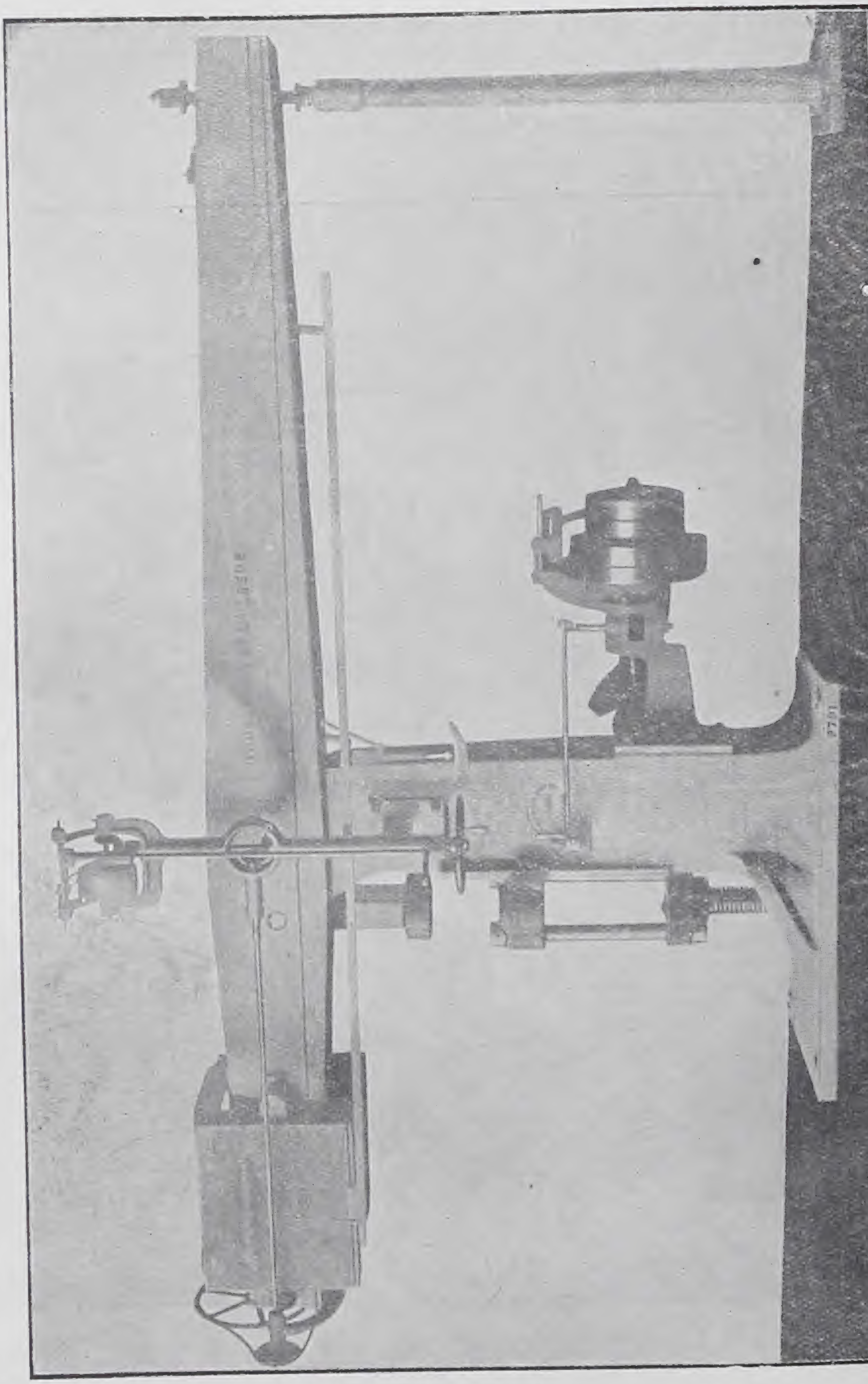
شکل ۲۱۱ میں ایک ۵۰ ٹن کی وک اسٹیڈ مشین دکھائی گئی ہے جو صرف تنشی امتحانوں کے لیے مقصود ہے۔ زور ایک پیچ کے ذریعے ڈالا جاتا ہے جو تسمے کے ذریعے گیرائی میں سے چلایا جاتا ہے۔

وِک اسٹیڈ کی انتصابی مشین میں ایک سہولت بخش تدبیر رجوع کی گئی ہے جو متبادل نصابوں کی ہے۔ دونوں چاقو کی دھاروں کا باہمی فاصلہ چھوٹے اور کم زور نمونوں کے لیے بڑا رکھا جاتا ہے اور مضبوط ٹکڑوں کے لیے چھوٹا رکھا جاتا ہے۔ اس طرح توازنی وزن کی ایک ہی حرکت دو وزنوں کو تعبیر کر سکتی ہے مثلاً ۲۵ ٹن یا ۱۰۰ ٹن بلحاظ اس کے کونسا نصاب اختیار کیا گیا۔

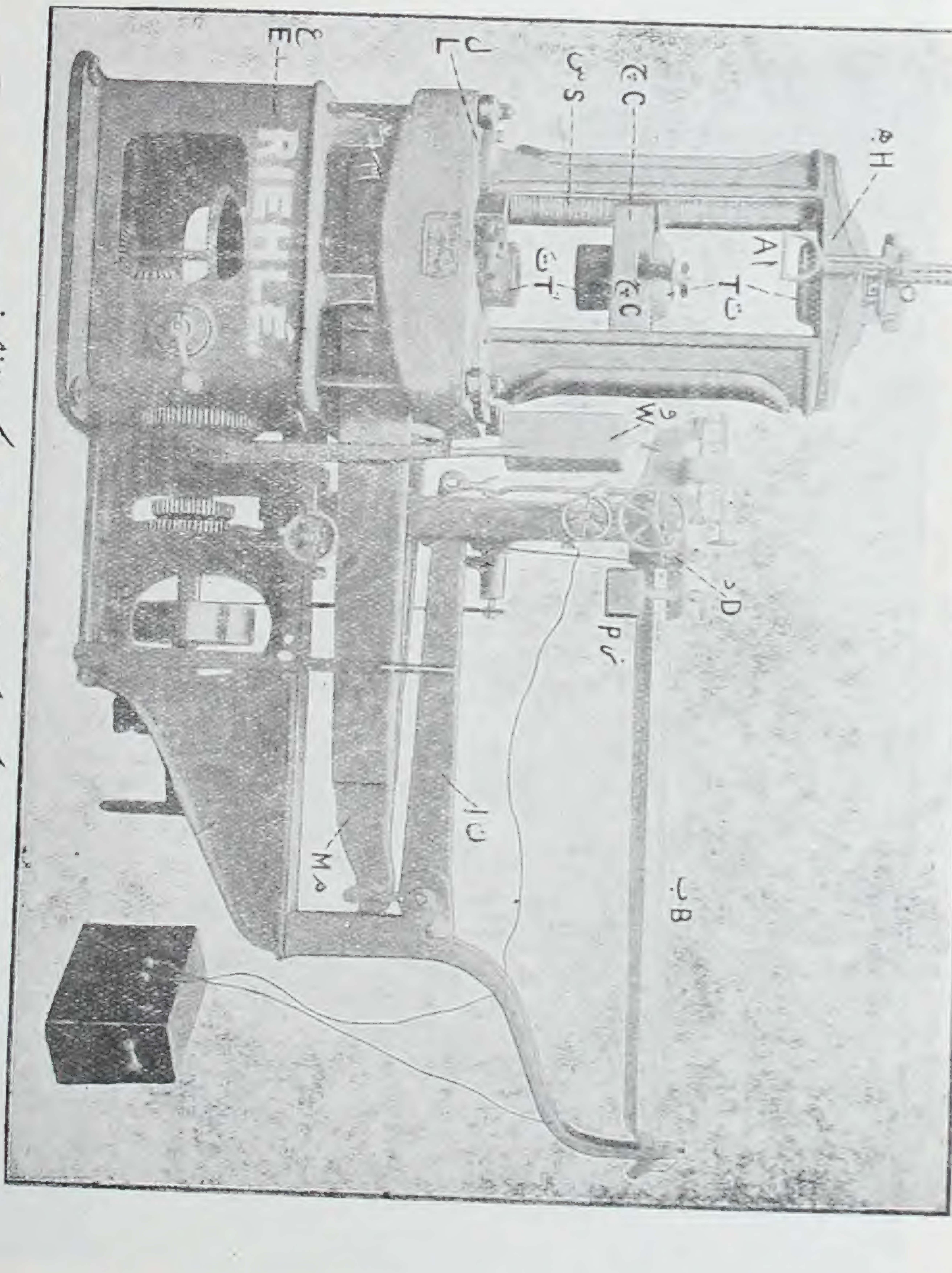
موکب بیرم کی جانچ مشین ——— شکل ۲۱۲ میں ایک
صفحہ ۴۹۰ تمثیلی امریکی مشین دکھائی گئی ہے جس کی قابلیت ...... اپونڈ (ایک لاکھ پونڈ) کی ہے۔ تنشی جانچ ٹکڑے کا محل وقت ہے جو زور ڈالنے والے سرچ اور ثابت سرھ کے درمیان ہے۔ چلیپا سرچ دو پیچوں کے ذریعے نیچے چلایا جاتا ہے جن میں سے ایک س پر دکھایا گیا ہے۔ طاقت
صفحہ ۴۹۱ س تک مہمیز (spur) اور مائل گیرائی کے ذریعے پہنچتی ہے اور اس طرح
صفحہ ۴۹۲ کئی مختلف رفتاریں حاصل ہو سکتی ہیں۔ فشاری امتحان اس طرح کیے جاتے ہیں کہ جانچ ٹکڑے کو چلیپا سرچ اور میزل کے درمیان وت پر رکھتے ہیں۔ اور اس قسم کی مشینوں سے خاؤ کے امتحان کا کام اس طرح لیا جاتا ہے کہ شہتیر کے سہاروں کو میزل پر رکھا جاتا ہے اور بوجھ چ کی نچلی جانب سے لگایا جاتا ہے۔ تمام صورتوں میں چ جو زور ڈالتا ہے وہ جانچ ٹکڑے سے ہوتا ہوا میزل پر پڑتا ہے جو چاقو کی دھاروں پر رکھی ہوئی ہے اور بیرموں کے ایک نظام کے



شکل ۲۱۲ - ۵ ٹن والی دستی طاقت کی جانچ مشین



شکل ۲۱۱/۷ - ۵۰ ٹن کی ایک بیرمی تنشی جانچ مشین -



شکل ۲۱۲ - ریہلے کی ایک لاکھ پونڈ والی پیچ طاقت کی جانچ مشین۔

ذریعے ایک مقابلتاً ہلکے متحرک توازنی وزن ہا کے ساتھ جس کو شہتیر ب پر
صفحہ ۴۹۳ حرکت دی جاتی ہے، متوازن کی جاتی ہے۔ توازنی وزن ہر کو شہتیر پر باہر کی
جانب ایک پیچ کے ذریعے حرکت دی جاتی ہے جو یا تو ہتھ پہیے کے
ذریعے ہاتھ سے چلایا جاتا ہے یا طاقت کے ذریعے جس کا انضباط برق مقناطیسی
(electromagnetic) ضابطہ کے ذریعے عمل میں آتا ہے۔ ہا کا محل
شہتیر پر کے درجوں سے ظاہر ہوتا ہے اور درجوں کی کسریں بعض اوقات
ایک کسر پیما کے ذریعے پڑھی جاتی ہیں جو ہا کو لگا ہوا ہوتا ہے لیکن
زیادہ عام طور پر ایک درجہ بند ڈائیل (Dial) د کے ذریعے
پڑھی جاتی ہیں جو شہتیر میں کے پیچ کے ساتھ گھومتا ہے۔ امتحان کے
بعد توازنی وزن کو تیزی سے صفر پر لا سکتے ہیں اور وہ اس طرح کہ
چلاؤ، ڈھبری کو پیچ پر سے کھول لیں اور توازنی وزن کو ہاتھ سے
صفر پر واپس لے آئیں۔ صدر بیرم م دو حصوں پر مشتمل ہے جن میں
سے ایک دوسرے کے اندر ہے۔ دونوں میز کے نیچے ایک ہ کی شکل
میں نکل آتے ہیں تاکہ ایک زور ڈالنے والے پیچ ت سے بچیں اور سہارے
کے نقاط کو پھیلا دیں۔ یہ سہارے کے نقاط چاقو کی دھاریں ہیں جو صدر فریم
ع پر نشستوں پر ٹکے ہوئے ہیں۔ میز چاقو کی دھاروں پر رکھا ہوا ہے
جو صدر بیرم میں ہیں اور جن کے خطوط بیچوں س کے مرکزی خطوط میں
سے گزرتے ہیں تاکہ صدر بیرموں میں چاقو کی دھاروں کے جو دو سٹ
ہیں ان کے درمیان دباؤ کی تقسیم مساوی ہو۔ صدر بیرم م کے چھوٹے
سرے پر جو نجوار کھینچ ہوتی ہے وہ درمیانی بیرم ن میں کی ایک چاقو
کی دھار کو منتقل ہوتی ہے۔ اور اس بیرم کے دور کے سرے پر
جو نجوار کھینچ ہوتی ہے وہ ایک کڑی کے ذریعے شہتیر ب پر منتقل
ہوتی ہے جس کا لمبا سرا ایک توازنی وزن و کے ساتھ توازن میں
ہوتا ہے۔ پیمانے کا صفر مفروضہ (reading) ایک متحرک وزن کے
ذریعے ترتیب دیا جا سکتا ہے جو و کے اوپر دکھایا گیا ہے۔

صدر فریم ع سے میز ل تک جو بولٹ دکھائے گئے ہیں وہ اس غرض سے ہیں کہ جانچ ٹکڑے کے ٹوٹنے پر میز کو بازگشت کے طور پر جھٹکا نہ پہنچے۔ ان بازگشت بولٹوں کے بالائی سروں پر جو ڈھبریاں ہیں وہ لچکدار واشروں (washers) پر بیٹھی ہوتی ہیں جو عموماً ربڑ کے ہوتے ہیں۔

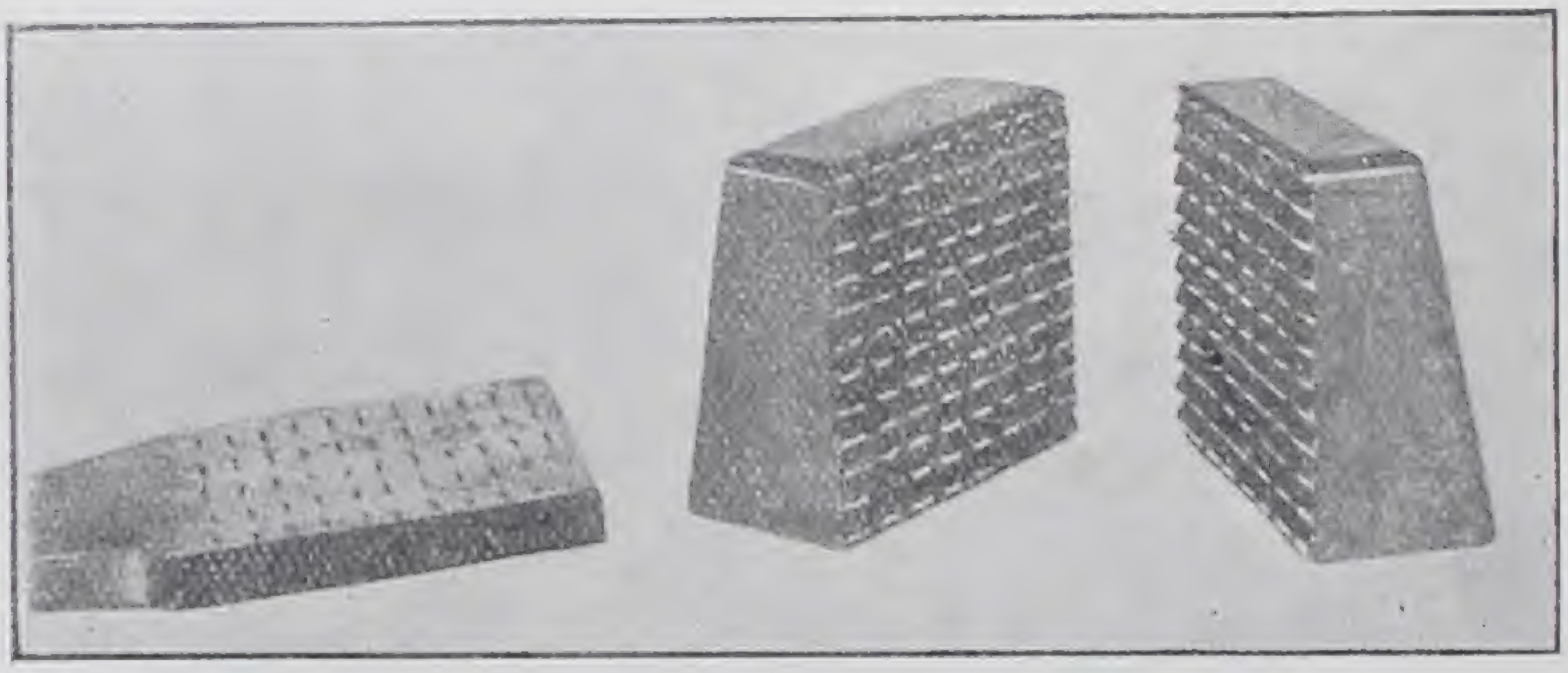
۱۷۰۔ تنشی امتحانات ۔ امتحانی ٹکڑوں کی شکل اور گرفت کا طریقہ

تنشی امتحان عام طور پر اس لیے کیا جاتا ہے کہ کسی متمدد دھات مثلاً پٹواں لوہا اور نرم فولاد کے خواص کو بتائے۔ فشاری امتحانوں کی دقتوں اور خامیوں کا ذکر دفعہ ۳۷ میں کیا گیا ہے۔ تجارتی امتحان میں جو اس غرض سے کیا جائے کہ کسی شے کا ایک نمونہ تخصیص کو پورا کرتا ہے یا نہیں (دیکھو دفعہ ۳۱) بالعموم یہ نتائج مطلوب ہوتے ہیں (۱) اعظم زور (۲) شکستگی کے بعد تطول جس سے تمدد کا پتہ چلے۔ ان کے علاوہ بعض اوقات نقطۂ مغلوبیت کا زور اور تراشی رقبے کا سکڑاؤ (دفعہ ۲۸) بھی درکار ہوتے ہیں۔ لچکدار تطول کے مشاہدے، جن سے راست لچک کا مقیاس محسوب ہو سکے، لچک کی حد، پوائی سن کی نسبت، وغیرہ، اگرچہ علمی دلچسپی کی چیزیں ہیں لیکن تجارتی امتحان میں ان کی تقریباً کبھی ضرورت نہیں ہوتی۔ اگر کبھی مطلوب ہوں تو تمدد پیما (extensometer) کے ذریعے حاصل کیے جاتے ہیں (دیکھو دفعہ ۱۷۴)۔

جانچ ٹکڑوں کے طول اور تراشی ابعاد کے تناسب پر دفعہ ۴۷ میں بحث کی جا چکی ہے۔ متمدد تنشی جانچ ٹکڑوں کے سرے عموماً دندانے دار (Serrated) فانوں کے ذریعے گرفت کیے جاتے ہیں جو ایک گردانک (Socket) کے جوف میں بیٹھتے ہیں۔ گردانک (Socket) بھنور کلی میں، کی ایک کروی نشست پر بیٹھا ہوتا ہے (دیکھو شکل ۲۰۷)

تاکہ کھینچ ممکنہ طور پر محوری ہو - ایک چپٹے متمدد نمونے کا سرا (سرے نمونے کے درمیانی جسم سے عموماً زیادہ چوڑے اور موٹے رکھے جاتے ہیں) اور اس کو پکڑنے کے لیے موزوں دندانے دار خانے شکل ۲۱۳ میں دکھائے گئے ہیں - شکل ۲۱۴ میں جو دندانے دار v نما نالی کے فانے اور امتحانی ٹکڑے کا جو سرا دکھایا گیا ہے وہ متمدد دھات کے مدور یا مربع نمونوں کے لیے موزوں ہیں - لوہے اور فولاد کی سلاخوں میں سروں کو بڑا رکھنے کی ضرورت نہیں - یہ فانے اور بھنور کلی میں کی کروی نشست شکل ۲۰۷ میں دکھائے گئے ہیں - ریلے ‎ـہ مشین میں جو شکل ۲۱۲ میں دکھائی گئی ہے دندانے دار فانے جو ہیزل پر دکھائے گئے ہیں پکڑ والے رُخ پر گول کر دیے گئے ہیں تاکہ رُخ کے وسط میں زیادہ مضبوطی سے پکڑیں اور اس طرح جانچ ٹکڑے کا محور سیدھا رہے۔ ہر ایک فانے کو ایک دستہ لگا ہوا ہے اور اس کو ایک متوازن بیرم کے ذریعے جو دستے ا سے چلایا جاتا ہے گرداتک (Socket) میں سے

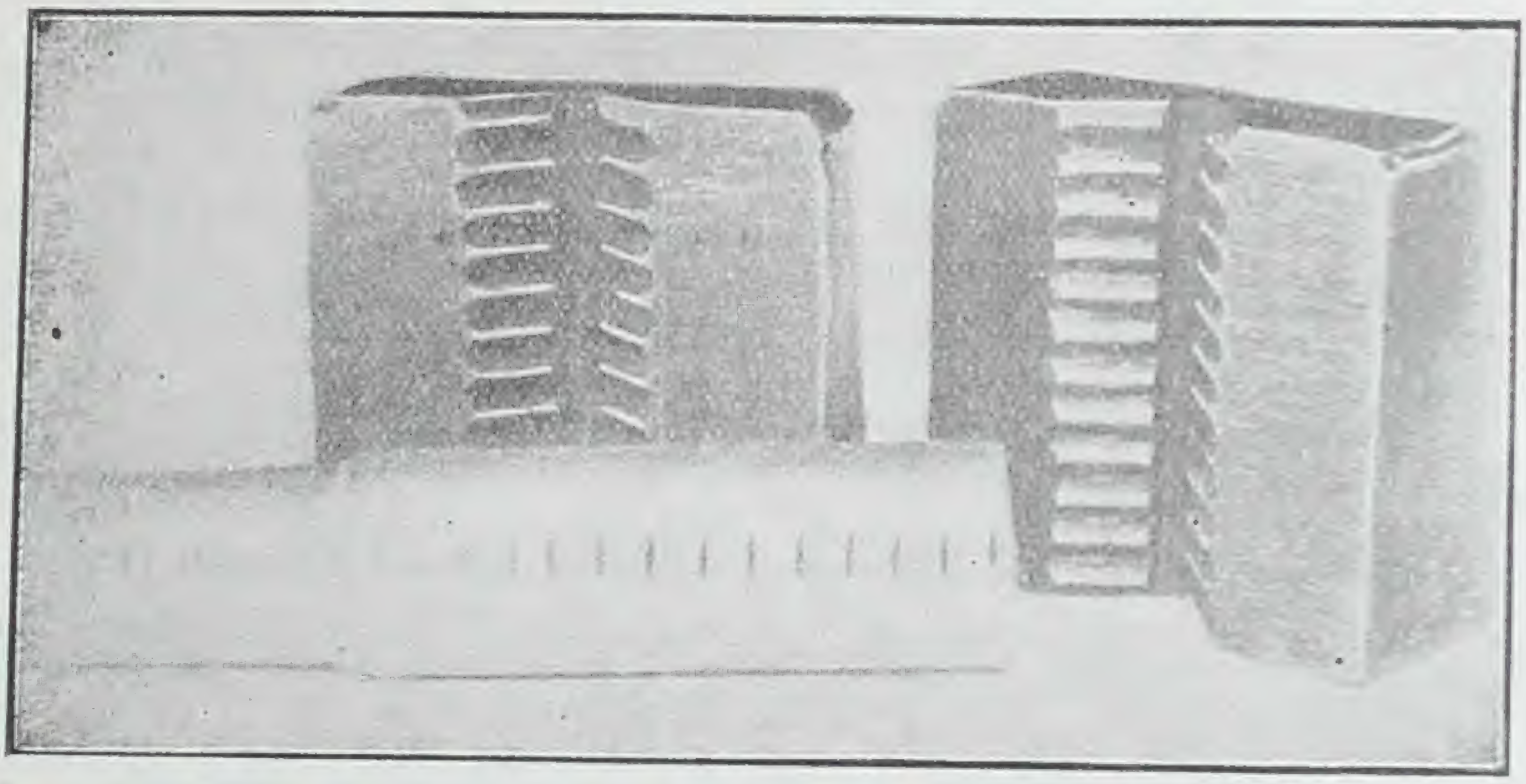
صفحہ ۴۹۴



شکل ۲۱۳ - فانہ نما گرفتیں، چپٹے نمونوں کے لیے۔

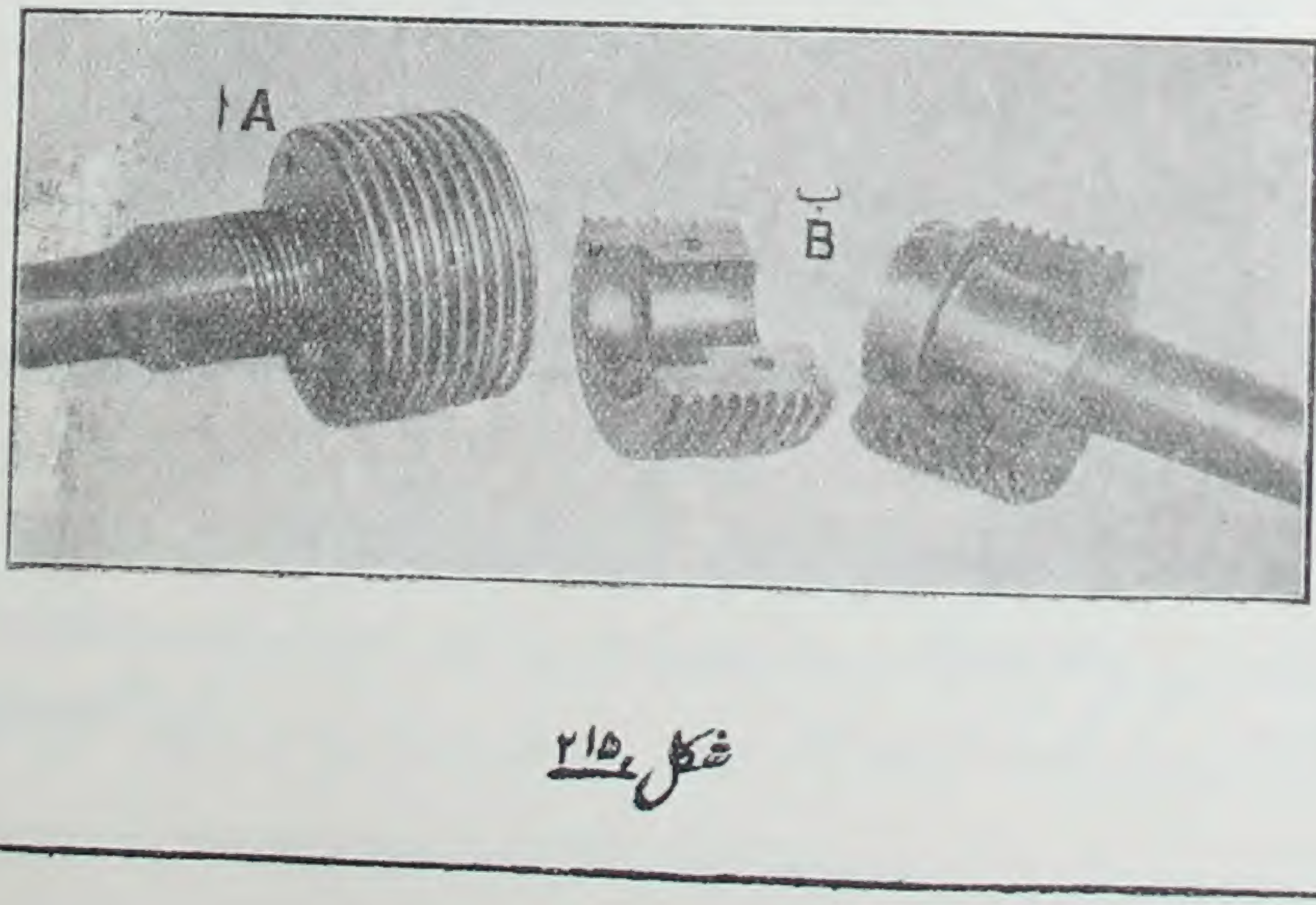
ـہ Riehlé

نکالا اور داخل کیا جاسکتا ہے۔ اُنہی فانوں کو مختلف موٹائیوں کے چپٹے نمونوں کے لیے کار آمد کرنے کے لیے مختلف استر استعمال کیے جاتے ہیں جو فانوں کے پیچھے بیٹھتے ہیں۔ ا پر کا پیچدار گردانک (Socket)



شکل ۲۱۴۔ فانہ نما گرفتیں، گول اور مربع نمونوں کے لیے

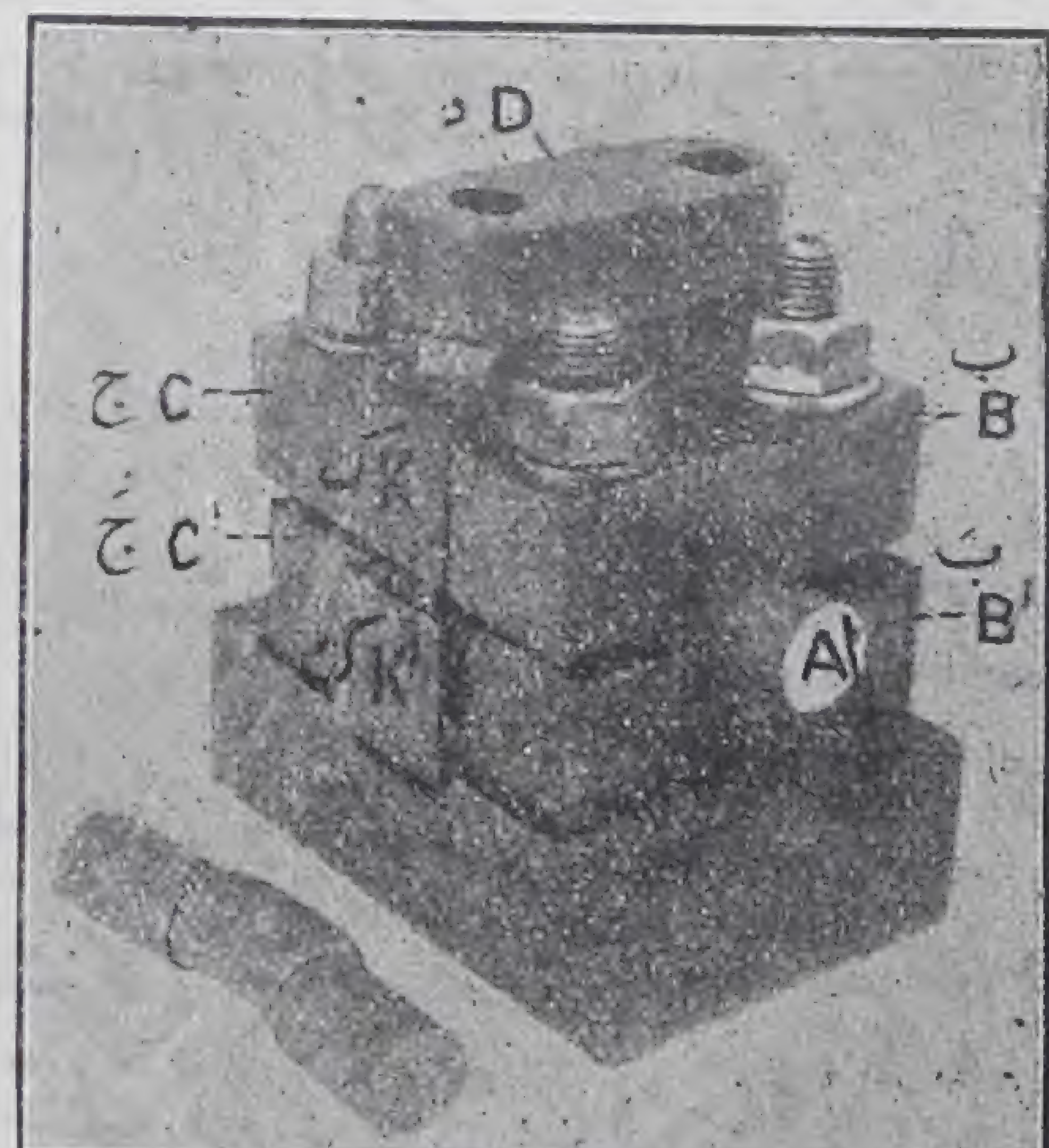
(شکل ۲۱۵) ڈھلے لوہے اور دیگر بھوٹک تنفشی جانچ ٹکڑوں کو پکڑنے کے ایک عام طریقے کو ظاہر کرتا ہے۔ شکل ۲۱۵ ب میں ایک چپٹے سر کا (cheese-headed) نمونہ دکھایا گیا ہے جو ٹھپے کے ٹکڑوں میں بیٹھتا



شکل ۲۱۵

ہے اور یہ ٹھپے ایک بڑے گردانک (Socket) کے اندر پیچ کے ذریعے کیے جاتے ہیں ۔ یہ طریقہ پھوٹک یا متمدد دونوں طرح کی اشیا کے لیے استعمال ہو سکتا ہے ۔ بعض اوقات اِن ٹھپوں میں کُروی جوف ہوتے ہیں اور نمونے کے سر اس طرح کے بنائے جاتے ہیں کہ ان جوفوں میں بیٹھیں تاکہ محور سیدھا رہے ۔ اگر امتحان کے لیے کسی ڈھلواں یا گھڑائی کا صرف ایک چھوٹا ٹکڑا دستیاب ہو تو چھوٹے طول کے دونوں سروں کو پیچ میں کس دیا جاتا ہے اور نمونوں کے سِروں کی بجائے ڈھبریاں ہوتی ہیں جو ٹھپوں کے جوفوں میں بیٹھتی ہیں ۔ صفحہ ۴۹۵

۱۷۱ - جز کے امتحانات ——— شکل ۲۱۶ میں ایک انتظام دکھایا گیا ہے جس سے جز کے امتحان کیے جاتے ہیں ۔ نمونہ ا کو بلاکوں کے جوڑوں ب بَ اور ج جَ کے درمیان مضبوط پکڑا جاتا ہے اور جانچ مشین کو اِس طرح ترتیب دیا جاتا ہے جس طرح فشار کے امتحانوں میں کیا جاتا ہے اور دباؤ ٹوپ د میں سے کاٹنے والے بالائی کندے ک پر لگایا جاتا ہے اور یہ کندہ نمونے کو دو تراشوں پر کترتا ہے۔ ایک تقریباً کترا ہوا نمونہ شکل میں آلے کے بازو دکھایا گیا ہے ۔ جزی کندے ک اور نچلے کاٹنے والے کندوں



شکل ۲۱۶ - جزی جانچ کا آلہ

بَ اور جَ کو سخت فولادی دھاریں لگی ہوئی ہیں ۔ شکل ۲۱۶ میں انتظام ایک گول سلاخ کے لیے ہے ۔ تمام کندوں ب بَ، ج جَ،

اور ک کَ کو پلیٹ دینے سے انتظام مستطیلی یا چپٹے امتحانی ٹکڑے کے لیے موزوں ہوجائیگا۔

جزی آلے کی ایک متبادل شکل وہ ہے جس میں دوحصوں کی اضافی حرکت دباؤ کی بجائے تنشی بھنور کلیوں کے ذریعے پیدا کی جاتی ہے۔

اگرچہ ممکن ہے کہ اس طرح کے آلے کے ذریعے کیے ہوئے امتحان میں خالص جز کی حالت نہ پیدا ہو کیونکہ صریحاً جزی زور کے ساتھ تناؤ اور فشار بھی پائے جائینگے لیکن یہ زور کی اس کیفیت کو تعبیر کرتا ہے جو عملاً بہت سی اشیا میں پایا جاتا ہے۔ "خالص" جز حاصل کرنے کا واحد طریقہ اسطوانی امتحانی ٹکڑے کی مروڑ ہے اور اس صورت میں جزی زور کی حدت یکساں نہیں ہوتی اور زور اور فساد کی تناسبیت کی حد کے آگے تو زور کی تقسیم صحیح طور پر معلوم بھی نہیں۔ شکل ۲۱۶ء کے جیسے ایک آلے سے حاصل شدہ نتائج اور ایک دلچسپ بحث مسٹر آئیزاڈ[۵] کے لکھے ہوئے ایک پرچے میں ملینگے جو انسٹی ٹیوٹ آف میکانیکل انجنیرز انگلستان کی روداد جنوری ۱۹۰۶ء میں شائع ہوا ہے۔ صفحہ ۲۹۶ء

۱۷۲ — جانچ مشین کی تعبیر

کسی جانچ مشین مثلاً دفعہ ۱۶۹ میں بیان کی ہوئی انتصابی یک بیرمی مشین کے متعلق اس بات کا اطمینان کرنے کے لیے کہ آیا وہ عمدہ چالو حالت میں ہے یا نہیں حسبِ ذیل جانچیں کی جاتی ہیں:-

(۱) صفر کی غلطی — یہ دیکھنے کے لیے آیا کوئی صفر کی غلطی ہے صرف یہ کرنا ہوگا کہ متحرک توازنی وزن کو پیمانے پر صفر پر رکھ کر دیکھیں کہ

۵ Mr. Izod

شہتیر دونوں روکوں کے عین بیچ میں ہے یا نہیں - اگر اس طرح کوئی صفر کی غلطی پائی جائے تو اس کو اس طرح صحیح کیا جاسکتا ہے کہ متحرک توازنی وزن پر کسر پیما کو سرکایا جائے - ریہلے مرکب بیرمی مشین میں ترتیب و کے اوپر کے حرکت پذیر وزن کے ذریعے محل میں آسکتی ہے (شکل ۲۱۲)-

(۲) حساسیت ـــــ مشین کی حساسیت دریافت کرنے کے لیے متحرک توازنی یا سوارہ وزن کو صفر محل میں رکھو اور بالائی بھنورکلی سے یا نصاب کے پیچھے کسی اور معلومہ فاصلے سے وزن لٹکاؤ اور اس کو بڑھاتے جاؤ- وہ زیادہ سے زیادہ وزن جو شہتیر کو اس کے روکوں کے عین بیچ کے محل سے اوپر حرکت دیے بغیر اس طرح لٹکایا جاسکے نوٹ کرلو- اسی طرح وہ وزن نوٹ کرو جو نصاب کی دوسری جانب ایک ناپے ہوئے فاصلے پر لٹکا کر شہتیر کو نیچے کی طرف عین ہلانے کو ہو- نصاب کے گرد ان دونوں وزنوں کے معیاروں کے حاصل جمع کو دونوں چاقو کی دھاروں کے درمیانی فاصلے سے تقسیم کرو تو اس سے حاصل ہوگا کہ حساسیت کی کمی کی وجہ سے مقروءہ (reading) میں کتنی خطا ممکن ہے - اسی جانچ کو ایک واحد مشاہدے کے ذریعے اس طرح کیا جاسکتا ہے کہ نصاب سے بھنورکلیوں کی مخالف جانب شہتیر پر کسی نقطے سے وہ زیادہ سے زیادہ بوجھ لٹکایا جائے جو شہتیر کو نیچے کی جانب ہلا نہ سکے اور پھر معلوم کیا جائے کہ بھنورکلی سے کتنا بوجھ شہتیر کو اوپر حرکت دیے بغیر لٹکایا جاسکتا ہے - یہ ممکن ہے کہ حساسیت کی کمی کی وجہ سے جو خطا واقع ہو وہ وزنی بوجھوں پر زیادہ ہو بہ نسبت اس جانچ کے جو صفر بوجھ کے ساتھ کی جارہی ہے لیکن چاقو کی دھار پر کے دباؤ کے تناسب سے یہ وزنی بوجھوں پر غالباً کم ہوگی حساسیت کی کمی گھساؤ سے پیدا ہوتی ہے جس سے چاقو کی بارڑھیں یا نشستوں کی

سے Riehlé

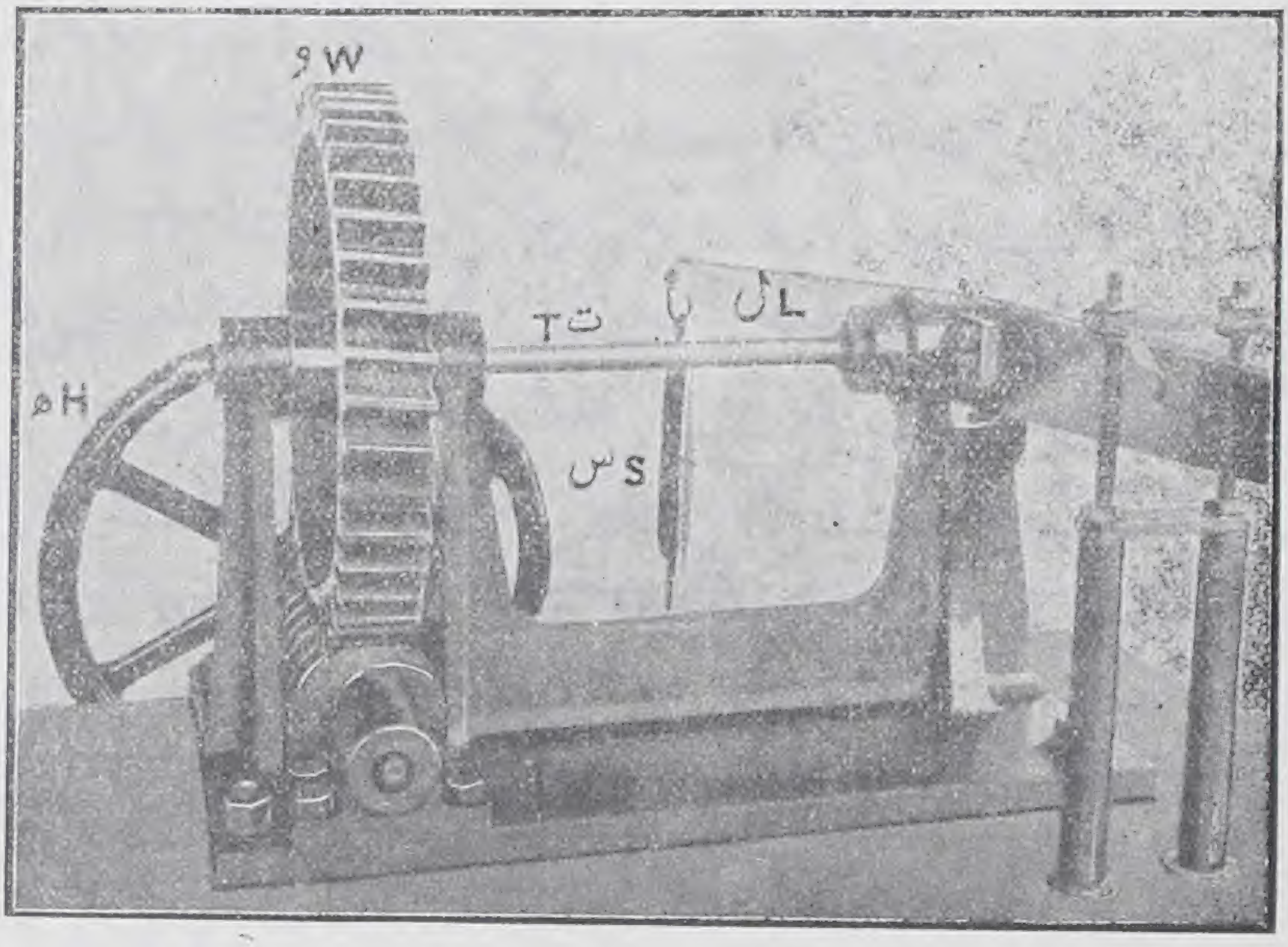
وہ نالیاں جن میں باڑھیں ٹکتی ہیں کُند ہو جاتی ہیں۔

(۳) متحرک توازنی بوجھ کا وزن ـــــ یہ اس طرح معلوم کیا جاسکتا ہے کہ بھنور کلیوں پر زائد بوجھ نہ رکھ کر شہتیر کو متوازن کیا جائے اور پھر پیمانے کے صفر سے توازنی وزن کو آگے یا پیچھے ایک خاص فاصلہ حرکت دے کر پھر دوبارہ توازن پیدا کیا جائے اور وہ اس طرح کہ نصاب سے ایک ناپے ہوئے فاصلے پر شہتیر پر وزن لٹکائیں۔ تب توازنی بوجھ کا وزن اس لٹکائے ہوئے وزن کو اُس نسبت سے ضرب دینے سے حاصل ہوگا جو اس کے نصاب سے فاصلے کو توازنی وزن کے صفر سے ہٹائے ہوئے فاصلے سے ہوگی۔

(۴) چاقو کی باڑھوں کے درمیان فاصلہ ـــ نصاب سے اُس چاقو کی باڑھ کا فاصلہ جس سے بالائی بھنور کلی لٹکتی ہے راست پیمائش کے بغیر معلوم کرنا ایک دِقّت طلب امر ہے۔ اس کے لیے یہ کرنا ہوگا کہ توازنی وزن کو صفر پر رکھ کر شہتیر کو متوازن کرنے کے بعد بھنور کلی سے ایک بھاری وزن لٹکایا جائے (جو کم از کم آدھا ٹن ہو اور زیادہ ہو تو اچھا ہے) اور توازنی وزن کو آگے کی طرف اتنی حرکت دی جائے کہ دوبارہ توازن قائم ہو جائے۔ تب چاقو کی باڑھوں کے درمیان کا فاصلہ توازنی وزن کے صفر سے ہٹے ہوئے فاصلے کو اس نسبت سے صفحہ ۲۹۷ ضرب دینے سے حاصل ہوگا جو توازنی وزن کو بھنور کلی میں کے وزن سے ہو۔

۱۷۳- مروڑ کی جانچ مشین ـــ شکل ۲۱۷ میں مروڑ کی جانچ مشین کا ایک بہت سادہ نمونہ دکھایا گیا ہے۔ جانچ ٹکڑے ت کا ایک سرا ایک پیچہ پہیے و کو چابی کیا جاتا ہے جو ایک پیچہ کے ذریعے ایک ہتھ پہیے ھ سے چلایا جاتا ہے۔ دوسرا سرا ایک بریکٹ کو چابی کیا جاتا ہے جو ایک افقی بیرم ل کو لگا ہوا ہے، اور یہ بیرم

چاقو کی باڑھوں پر متوازن ہے جو فریم پر سخت فولادی نشستوں پر ٹکی ہوئی ہیں اور امتحانی ٹکڑے کے محور کی سیدھ میں ہیں - امتحانی ٹکڑے پر



شکل ۲۱۷ - مروڑ کی جانچ مشین ۶۰۰۰ پونڈ انچ گنجائش کی

عمل کرنے والے مروڑ کے معیار کو اُس کھینچ کے ذریعے ناپا جاتا ہے جو بیرم ل کے متقابل سروں پر کی چاقو کی باڑھوں کو لگی ہوئی کمانی دار ترازوؤں پر پڑتی ہے - بیرم ل اُفقی حالت میں برقرار رہتا ہے اور وہ اس طرح کہ ترازوؤں پر کی کھینچ کی وجہ سے کوئی انحراف پیدا ہو تو اس کو ترتیبی پیچوں کے ذریعے ٹھیک کر لیا جاتا ہے - شکل میں دکھائی ہوئی مشین کی قابلیت ۶۰۰۰ پونڈ انچ ہے جو نرم فولاد کے ایک $\frac{۳}{۴}$ انچ قطر کے نمونے کو توڑنے کے لیے کافی ہے -

مروڑ کی اس سے زیادہ دقیق مشینوں میں اور اس میں بڑا فرق یہی ہوگا کہ اُن میں مروڑ کا معیار ایک سوارہ وزن کے ذریعے

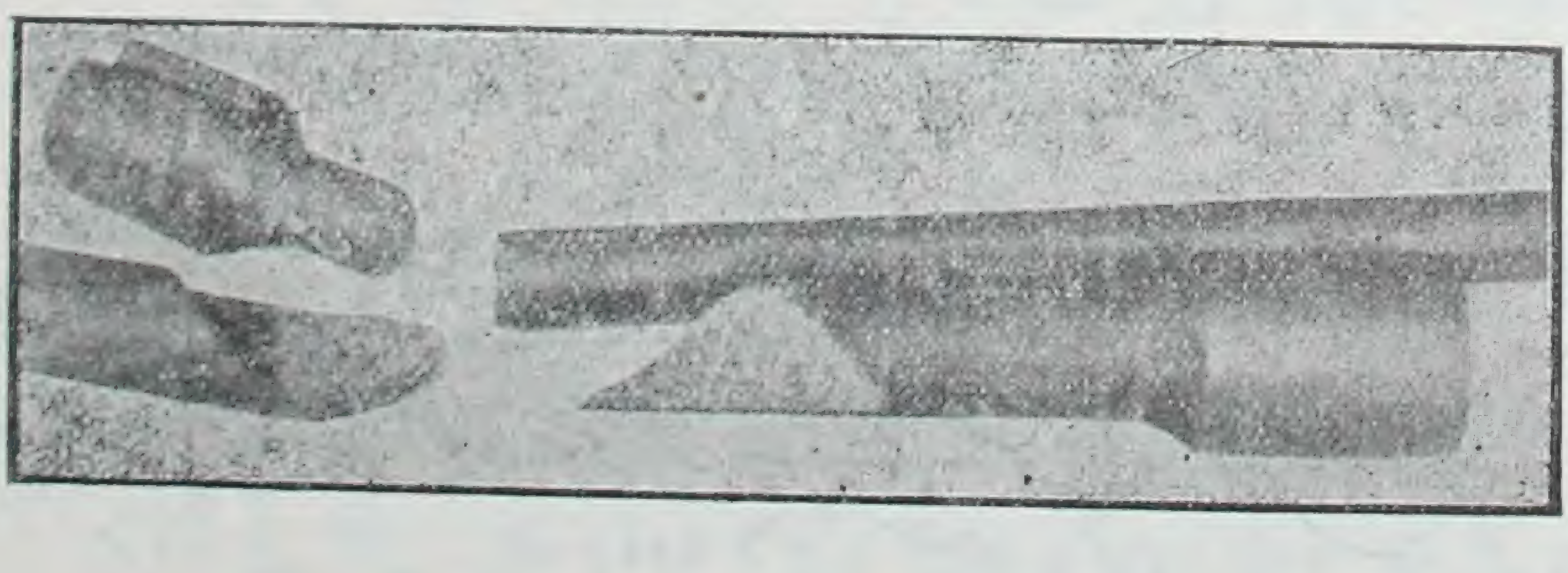
ناپا جاتا ہے جو بیرم پر ایک درجہ دار پیمانے پر حرکت کرتا ہے۔ بعض اوقات یہ کرتے ہیں کہ ایک بیرمی تنشی امتحانی مشین کو جانبی بریکٹ پر ایک بیچ اور بیچ پہیہ کے ذریعے مروڑ کا زور لگانے کا انتظام کر دیا جاتا ہے جس کی وجہ سے یہ مشین مروڑ کی جانچ مشین کے طور پر بھی استعمال کی جا سکتی ہے۔ اس انتظام کی ایک مثال ۵ ٹن کی دستی طاقت والی مشین میں دکھائی گئی ہے (شکل ۲۱۰) جس میں مروڑ کے امتحانوں کے لیے ۲۰۰۰ پونڈ انچ کی قابلیت ہے۔

امتحانی ٹکڑے کی شکل — شکل ۲۱۸ میں مروڑ کے امتحانی ٹکڑے کی ایک عام شکل دکھائی گئی ہے۔ سرے بڑے بنائے گئے ہیں اور ان میں ایک یا دو چابی راہیں ہیں تاکہ نمونے کو صفحہ ۴۹۸



شکل ۲۱۸ - مروڑ کا جانچ ٹکڑا

بیچ پہیہ یا زور ڈالنے کا جو بھی گیرا ہو اس کے ساتھ اور بیرم کے ساتھ جکڑا جا سکے۔ ڈھلے لوہے کا مروڑ کا ٹوٹا ہوا امتحانی ٹکڑا شکل ۲۱۹ میں سامنے اور نرم فولاد کا پیچھے دکھایا گیا ہے۔



شکل ۲۱۹ - مروڑ کی شکستگیاں -

۱۷۴ - امتداد پیما ـــــ سوائے ان صورتوں کے کہ نمونے بہت لمبے ہوں لچکدار تطول اتنے خفیف ہوتے ہیں کہ اُن کی بالراست پیمائش نہیں ہو سکتی اور اس کام کے لیے خاص آلات استعمال کیے جاتے ہیں - ان آلات کی تجویز پر بہت دماغ لڑایا گیا ہے اور ان کی مختلف قسمیں مستعمل ہیں - ان مختلف اقسام پر ایک تبصرہ اور حوالہ جات ایک پرچے میں ملینگے جو فسادوں کی پیمائش کے مضمون پر مسٹر جے - مادو[1] نے لکھا ہے اور جو انسٹی ٹیوٹ آف میکانیکل انجینیرز کی روداد اپریل ۱۹۰۴ء میں شائع ہوا ہے -

لچک کی حد کے باہر متمدد اشیا میں فساد خاصا ہوتا ہے اور مرکزوں کے درمیان اس کی پیمائش تقسیمی پرکار (Dividers) کے ذریعے آسانی سے کی جاسکتی ہے -

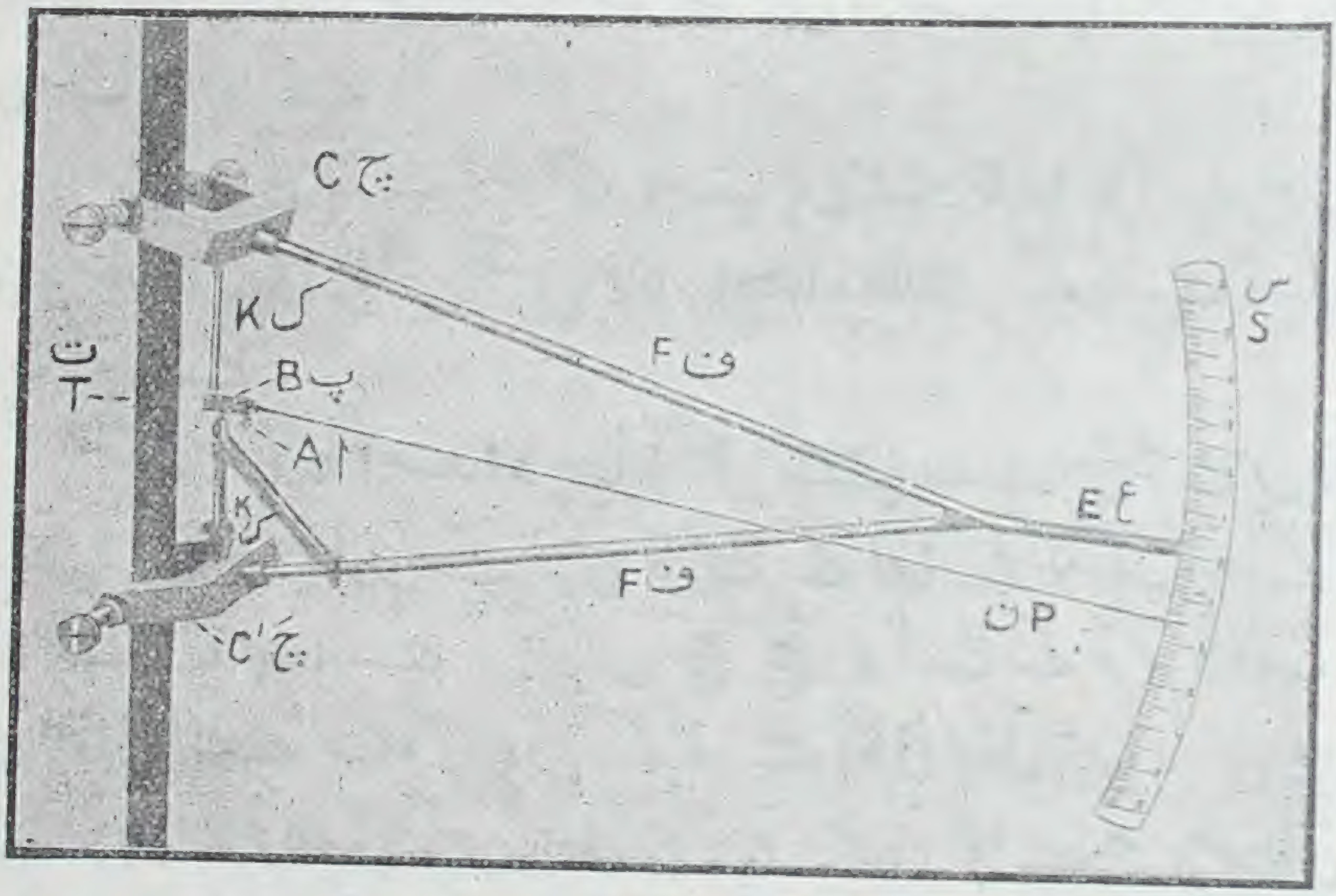
گڈمین[2] کا امتداد پیما (شکل ۲۲۰) ـــــ اس آلے میں امتحانی ٹکڑے پر کے دو نقطوں کے باہمی فاصلے کے اضافے کو ایک بیرم کے ذریعے المضاعف کرلیا جاتا ہے - چٹکیاں ج ج جو آلے کے فریم کا ایک جزو ہیں امتحانی ٹکڑے ت کو پیچوں کے ذریعے لگائی جاتی ہیں - ان پیچوں کو سنخائے ہوئے فولاد کی نوکیں ہوتی ہیں جو امتحانی ٹکڑے میں چُبھ جاتی ہیں - اِن نوکوں کے نقطوں کو "مرکز" کہا جاتا ہے اور یہ عموماً ۱۰ انچ کے فاصلے پر ہوتے ہیں - فریم ف کا باقی حصہ ہلکی پیتل کی نلیوں پر مشتمل ہوتا ہے اور اگرچہ قبضہ دار نہیں ہوتا لیکن اتنا خم پذیر ہوتا ہے کہ چٹکیوں کے درمیانی فاصلے کو لچکاکر گیج کیے ہوئے فاصلے سے بغیر کسی نقصان کے بقدر تقریباً ½ انچ کے بڑھایا جاسکتا ہے - اور چونکہ گیج کے فاصلے میں جو انتہائی اضافہ ہوگا وہ تقریباً ½ انچ ہے اس لیے لچک کی اتنی گنجائش کافی ہے - چٹکیوں ج ج کو دو سلاخیں ک ک لگائی جاتی ہیں - بالائی سلاخ ایک

سے مختلف قسموں کے امتداد پیماؤں کے تجرباتی تقابل کے لیے دیکھو برٹش ایسوسی ایشن کی رپورٹ سنہ ۱۸۹۶ء - اور بہت حساس آلات کے لیے دیکھو مضمون "امتداد پیماؤں کی تعبیر کے لیے ایک مداخلتی آلہ" مندرجہ فلوسافکل میگزین جنوری سنہ ۱۹۰۵ء -

[1] J. Morrow

[2] Goodman

فولادی پٹی کے ذریعے اور دوسری اُستوار لگائی جاتی ہے۔ سلاخوں ک کَ کے آزاد سروں میں V نما نالیاں ہیں جو دو اُفقی چاقو کی باڑھوں کے ساتھ گُتھ جاتی ہیں۔ یہ چاقو کی باڑھیں ایک پیتل کے ٹکڑے پ میں باہم ایک ثابت فاصلہ پر مضبوط جکڑی ہوئی ہوتی ہیں۔ پیتل کے ٹکڑے پ کو ایک لمبا ہلکا لکڑی کا نمائندہ ن لگا ہوا ہے۔ جب امتحانی ٹکڑا



شکل ۲۲۰۔ گُڈمین کا امتدادپیما

صفحہ ۴۹۹ ت کھینچا ہے توک اور کَ کی V نما نالیاں ایک دُوسرے سے دُور ہوتی ہیں اور اس طرح ن جھکتا ہے اور اس کا سرا پیمانے س پر نیچے کو حرکت کرتا ہے۔ یہ پیمانہ س نلی ع کو چُٹکی کے ذریعے کستا ہُوا ہے اور نلی ع فرم کا ایک جزو ہے۔ امتحانی ٹکڑے کو آلہ لگانے کے بعد مرکزوں کو صفر پر یا کسی اور نشان پر ترتیبی پیچ ا کے ذریعے لایا جاسکتا ہے جس کے ذریعے یہ بھی ممکن ہے کہ آلے کو اس سے کسی قدر زیادہ وسعت کے لیے استعمال کیا جاسکے جو کہ پیمانے سے حاصل ہوتی ہے۔ نمائندے ن کے

سرے کی حرکت پیچ کی نوکوں کے درمیان کی حرکت کا ۱۰۰ گنا ہوتی ہے۔ آلے کی اس طرح تعمیر کی جاتی ہے کہ چٹکی کے نقطوں کو ایک حرکت دی جاتی ہے جس سے نمائندہ پوری ضرب کا ایک بڑا حصّہ طے کرے۔ چٹکی کے نقطوں کی حرکت کو ایک مشین کے ذریعے ناپا جاتا ہے اور نمائندے کے سرے کی حرکت کو پیمانے پر سے نوٹ کیا جاتا ہے۔ آخری ترتیب نلی ع کے اوپر نمائندہ ن کے طول کو اور پیمانہ س کے محل کو ثابت کرنے سے حاصل ہوسکتی ہے۔ جوڑ پیچ ڈنڈوں پر ایک گیج بیٹھا ہوا ہوتا ہے (شکل میں نہیں دکھایا گیا) جو نمونے پر اس آلے کے نصب کرنے میں آسانی پیدا کرتا ہے اور اس کی مدد سے وہ طول جس پر تطول ناپنا ہے ٹھیک ٹھیک مطلوبہ مقدار کے مساوی رکھا جا سکتا ہے۔ یہ اس آلے میں عموماً ۱۰ انچ ہوتی ہے۔

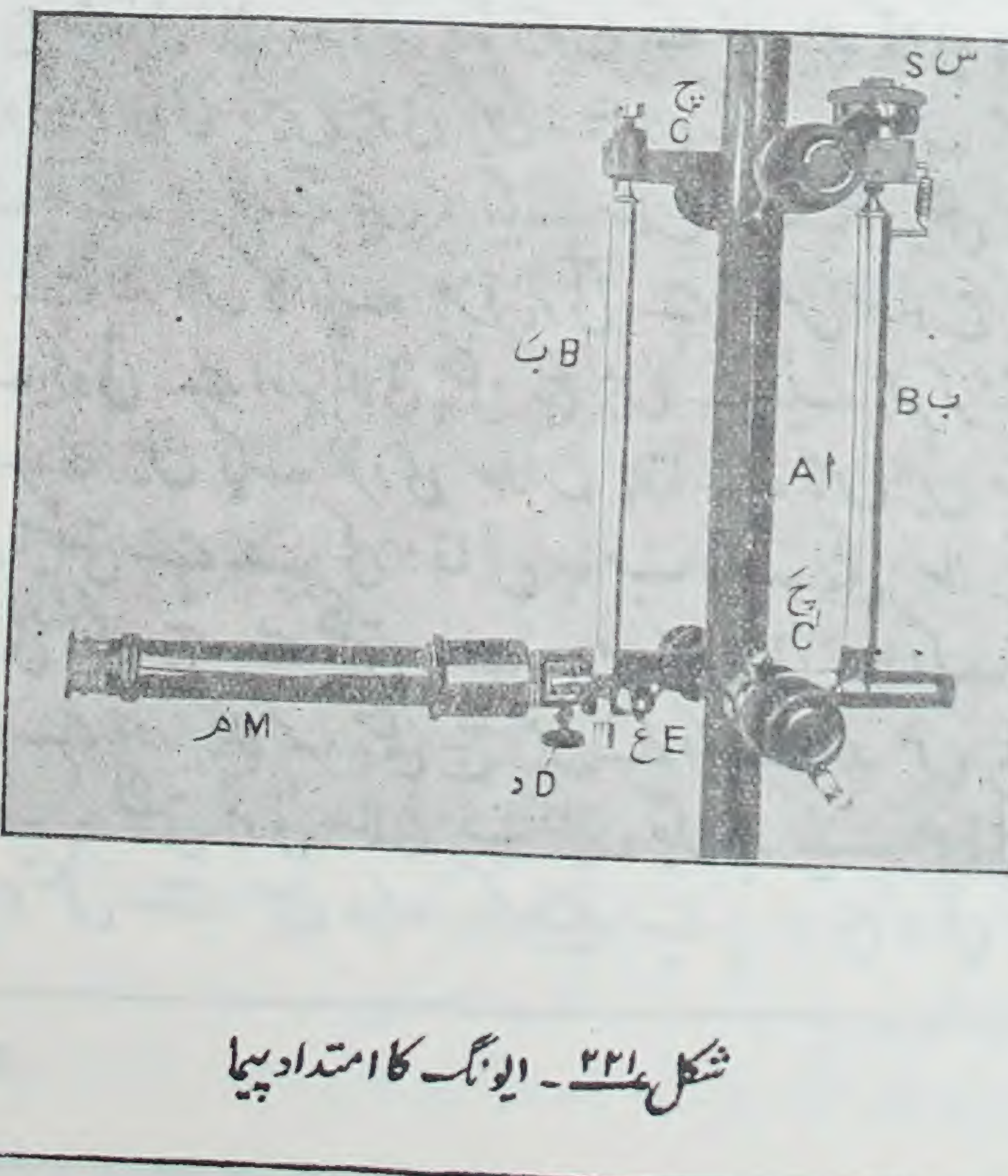
ایونگ[a] کا امتداد پیما (شکل ۲۲۱) ـــــ دو چٹکیاں چ اور چَ امتحانی ٹکڑے ا کو جوڑ پیچوں کے ذریعے پکڑتی ہیں جن کو سختائی ہوئی فولادی نوکیں ہوتی ہیں۔ پیچوں کے یہ دونوں جوڑے عموماً ۸ انچ کے فاصلے پر ہوتے ہیں۔ ایک سلاخ ب نچلی چٹکی چَ کو اُستوار لگی ہوتی ہے اور اس کا ایک جزو ہوتی ہے۔ اس سلاخ کو ایک گول نوک ہوتی ہے اور بالائی چٹکی چ میں کے ایک جم کر بیٹھنے والے پیچ کے سرے میں ایک مخروطی سوراخ ہوتا ہے جس میں سلاخ ب کی نوک بیٹھتی ہے۔ ب کی مقابل جانب ایک ہلکی سلاخ بَ ہوتی ہے جو بالائی چٹکی چ سے لٹکتی ہے۔ اس کا بالائی سرا ایک مخروطی سوراخ میں بیٹھتا ہے اور نچلا سرا چٹکی چَ میں کے ایک قائد میں سے آزادانہ گزرتا ہے۔ یہ لٹکتی ہوئی سلاخ بَ اپنی جگہ پر ایک لمبی ہلکی کمانی کے ذریعے (جو شکل ۲۲۱ میں بَ کے پیچھے ہے) جو چَ کو لگی ہوئی ہے

---

[a] Ewing

صفحہ ۵۰۰

اور ج کے قائد کے ذریعے قائم رکھی جاتی ہے - جب امتحانی ٹکڑے ا میں کھنچاؤ ہوتا ہے تو چٹکلی پیچ، ب کے گول سرے کے گرد، جو چول کا کام کرتا ہے، ایک انتصابی مستوی میں گھومتی ہے اور لٹکتی ہوئی سلاخ ب چٹکلی پیچ کی اضافت سے اوپر کو اٹھتی ہے - ب اور بَ کے گول سروں کے مرکز عموماً گرفت کے نقطوں سے مساوی الفصل ہوتے ہیں جس کی وجہ سے پیچ کی اضافت سے بَ کی حرکت ا کے تطول کی دوگنی ہوگی - یہ اضافی حرکت اس طرح ناپی جاتی ہے کہ بَ کے نچلے سرے میں ایک سوراخ ہوتا ہے اور اس سوراخ میں ایک آڑا تار تنا ہوا رہتا ہے - اس تار کو خردبین م کے ذریعے مشاہدہ کیا جاتا ہے جس کے چشمیہ (eye-piece) میں ایک پیمانہ ہوتا ہے - پیمانے پر اس موٹے تار کے ایک کنارے کا مشاہدہ کیا جاتا ہے - پیمانہ ۱۴۰ حصوں میں منقسم ہوتا



شکل ۲۲۱ - ایونگ کا امتداد پیما

ہے اور خُردبین صحیح ترتیب میں ہو تو ہر ایک حصّہ گرفتی نقاط کے درمیان $\frac{۱}{۵۰۰۰}$ انچ کے تطول کو تعبیر کرتا ہے۔ اس طرح ایک حصّے کے $\frac{۱}{۱۰}$ تک اندازہ لگایا جائے تو $\frac{۱}{۵۰۰۰۰}$ انچ تک کے تطول کو پڑھا جا سکیگا۔ د آڑے تار کو ماسکے میں ترتیب دینے کے لیے ایک تدبیر ہے اور ع ایک تنویری آئینہ ہے۔ آلہ جس وقت امتحانی ٹکڑے سے علیحدہ ہو تو آلے کو ایک شکنجہ (clamp) کے ذریعے جُڑا ہوا رکھا جاتا ہے جو چٹکیوں ج اور جَ پر مخروطی نشستوں پر بڑی ڈھبریوں کے ذریعے کسا ہوا ہے۔ یہ ڈھبریاں شکل میں نظر آتی ہیں۔ آلے کی تعبیر اس طرح کی جاتی ہے کہ پیچ مس کو جس میں ۵۰ جُوڑیاں فی انچ ہیں ایک پورا چکر گھما کر پیمانے پر تار کی حرکت مشاہدہ کی جاتی ہے۔ پیچ کے ایک چکر سے تار کو پیمانے کے ۱۰۰ درجوں میں سے ۵۰ درجے طے کرنے چاہییں کیونکہ گردانک کی $\frac{۱}{۵۰}$ انچ کی حرکت $\frac{۱}{۱۰۰}$ انچ کے تطول کے معادل ہے۔

حال میں (۱۹۰۸ء) ایک امتداد پیما ایجاد ہوا ہے جس میں تکبیر کا اصول ایونگ[۵] کے جیسا ہے لیکن حرکت کی پیمائش ایک خردہ پیما پیچ کے ذریعے کی جاتی ہے جس کو یہاں تک حرکت دی جاتی ہے کہ اس کی نوک ایک دھات کے ٹکڑے کو مس کرے۔ یہ دھات کا ٹکڑا ایک کمانی یا جیب کو لگا ہوا ہوتا ہے جو خُردہ پیما پیچ کے علی القوائم ارتعاش کرتی ہے۔

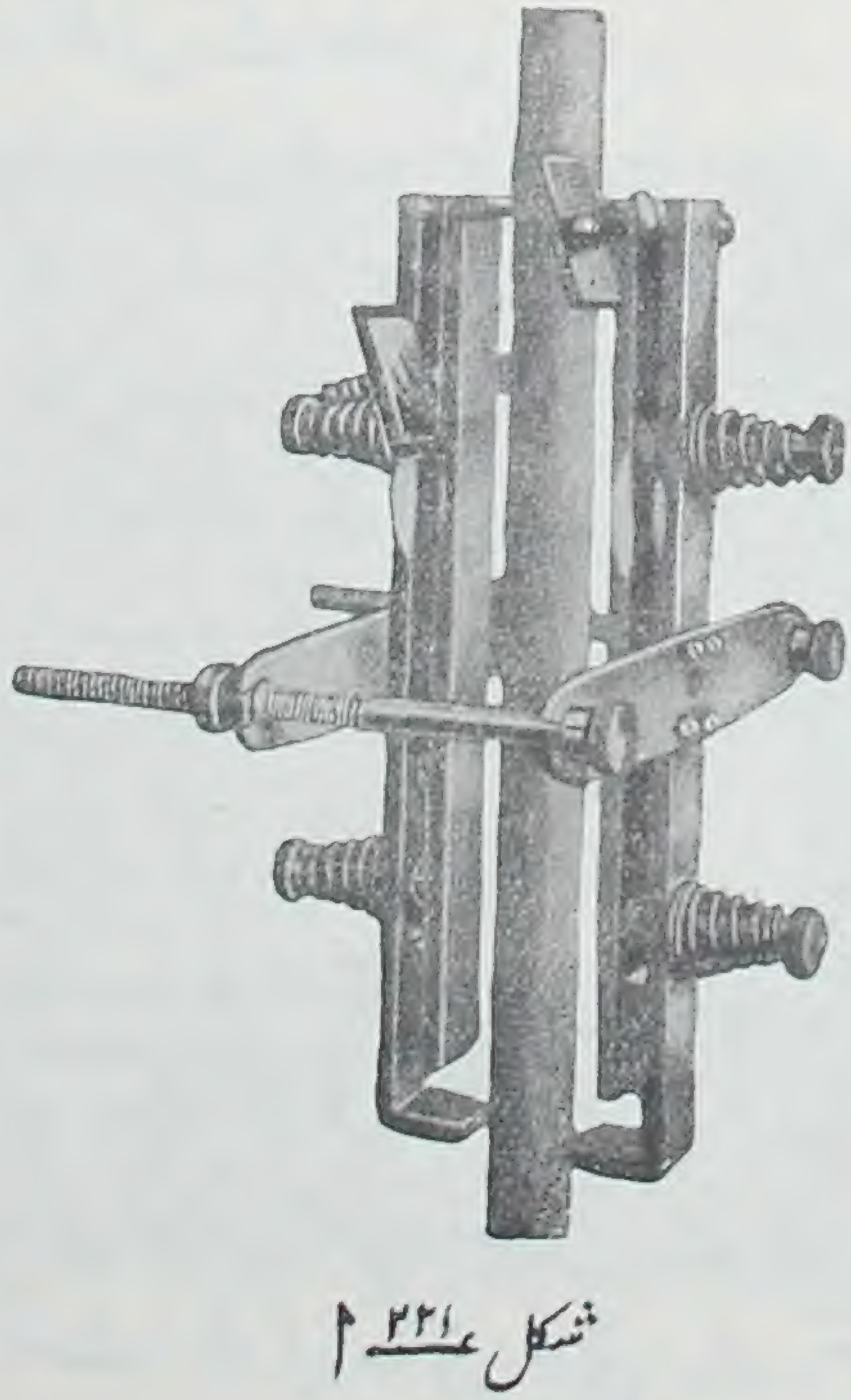
لچکدار فشار کی پیمائش ـــــ لچکدار فشاری فسادوں کی پیمائش کے لیے پروفیسر ایونگ کے امتداد پیما کی ایک ترمیم یافتہ شکل اختیار کی جاتی ہے۔ بَ کے متناظر جو لٹکتی ہوئی سلاخ ہوتی ہے اس کا محور سے فاصلہ ب کی متناظر استوار سلاخ کے مقابلے میں ۹ گنا ہوتا ہے۔ اس طرح بَ کی حرکت فساد کی ۱۰ گنی ہوتی ہے۔ تنشی امتحان میں یہ حرکت

---

۵ Ewing

صرف ۲ گنی ہوتی ہے۔ تنشی امتحان میں نمونے بڑے ہوتے ہیں۔ فشاری فساد صرف ½ انچ کے طول پر ناپا جاتا ہے۔

لیمب^ه کا بیلن امتداد پیما^ع (شکل ۲۲۱ ا) ——— دو آلات جن میں سے ہر ایک خود ایک مکمل امتداد پیما ہوتا ہے امتحانی ٹکڑے کی مقابل جانبوں میں کس کر لگا دیے جاتے ہیں۔ دونوں آلوں میں سے ہر ایک دو فولادی L نما تختیوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ ہر ایک L کا چھوٹا بازو ایک چاقو کی باڑھ پر ختم ہوتا ہے جو امتحانی ٹکڑے پر بیٹھتی ہے۔ L نما تختیوں کے بڑے بازو تنشی امتحانی ٹکڑے کے محور کے متوازی ہوتے ہیں اور ان کے درمیان ایک سرے پر ایک سخت فولادی بیلن ہوتی ہے اور دوسرے سرے پر ایک گولا ہوتا ہے۔ جب امتحانی ٹکڑے میں



شکل ۲۲۱ ا

ع۔ اس کا بیان رسالہ انجینیرنگ مورخہ ۲ جون ۱۹۲۲ء و ۱۳ فروری ۱۹۲۵ء میں دیا گیا ہے۔

ه lamb

تطول ہوتا ہے تو بیلن کو ایک گردشی حرکت اس تطول کے متناسب پہنچتی ہے۔ بیلن کو ایک چھوٹا آئینہ لگا ہوا ہے۔ اس حرکت کو ایک پیمانے پر روشنی کی ایک بُندکی کی حرکت کے ذریعے ناپا جاتا ہے۔ دو آلوں کے استعمال سے یہ ہوتا ہے کہ امتحانی ٹکڑے کی مقابل جانبوں میں کھنچاؤ مختلف ہو تو یہ اختلاف ساقط ہوجاتا ہے۔ حسبِ ذیل عمل اختیار کیا جائے تو بہتر ہے: ایک ظل انداز (Projector) لیمپ استعمال کیا جائے جس کو ایک آڑا تار لگا ہوا ہو جس کے خیال کو ماسکے پر لاکر ایک آئینے سے دوسرے پر منعکس کیا جاتا ہے اور پھر وہاں سے ایک پیمانے پر جو ایک مناسب فاصلے پر لگا ہوتا ہے۔ اس آلے کو مختلف تناسبوں میں بنایا جائے تو یہ فشار، جانبی فساد اور دھاتوں کے علاوہ کنکریٹ اور چوبینے کے لیے بھی کارآمد ہوسکتا ہے۔ اس کی ساخت اور طریقہ استعمال بہت آسان ہے اور آسانی سے نصب کیا جاسکتا ہے۔ صفحہ ۵۰۲

اس اعتبار سے اس کو اُن امتداد پیماؤں پر نمایاں تفوق حاصل ہے جن میں آئینوں اور پیمانوں کے ذریعے مناظری تکبیر (optical magnification) کا اصول استعمال کیا گیا ہے لیکن جن میں تمام تر چاقو کی باڑھوں کے گرد حرکت پر انحصار ہے۔

خود آلے کی تعییر کے لیے صرف بیلنوں کے قطروں اور گیج کے طول کی پیمائش مطلوب ہوتی ہے۔ اور جن چیزوں میں خطا کا امکان ہے وہ پیمانے کا فاصلہ، آئینوں کا باہمی فاصلہ، اور پیمانے کا مقروءہ (reading) ہیں۔ خیال کیا جاتا ہے کہ اگر معقول احتیاط برتی جائے تو تمام باتوں سے پیدا ہونے والی اعظم خطا ۵ء فی صدی سے زیادہ نہیں ہوسکتی اور معمولی احتیاط کے ساتھ ۲ء فی صدی تک صحت حاصل ہوسکتی ہے۔

۱۷۵- خود نویس راقم (Recorders)

ـــــ ایسا آلہ ایجاد کرنے کی بہت سی کوششیں کی گئی ہیں جس سے ایک تننشی امتحان کے

سارے دَوران میں زور اور فساد کی ایک مسلسل اور صحیح روداد حاصل ہو۔ اس طرح کی روداد ایک ایسے آلے سے حاصل ہوسکتی ہے جس میں ایک پنسل ایک کاغذ پر یا کسی اَور سطح پر حرکت کرے جو خود پنسل کی حرکت کے علی القوائم حرکت کرے۔ پنسل کی حرکت زور کے متناسب اور کاغذ کی حرکت نمونے کے فساد کے متناسب ہو۔ فساد کے متناسب کاغذ کی مطلوبہ حرکت آسانی سے حاصل ہوسکتی ہے اور وہ اس طرح کہ کاغذ کو ایک اُستوانی ڈھول پر لگایا جائے اور ڈھول کے گرد ایک ڈوری یا تار لپیٹا جائے جو نمونے کے علی القوائم گزر کر ایک چرخی پر سے گزرے جو نمونے کو گیج کے ناپ کے ایک سرے پر چٹکی کے ذریعے لگی ہوئی ہو اور گیج ناپ کے دوسرے سرے پر کی چٹکی سے جکڑی ہوئی ہو۔ اس ڈوری کی مدد سے ڈھول کو اس کے محور کے گرد گردش دی جاسکیگی۔ اس طرح کے آلے میں یہ ہوتا ہے کہ فانہ نما گرفتوں کے اندر نمونے میں پھسلن واقع ہو تو اس سے یا چٹکیوں کے درمیانی طول کے باہر جو تطول واقع ہو اس سے ڈھول کو حرکت نہیں ہوتی۔ نیز حرکت کو اس طرح المضاعف کیا جاسکتا ہے کہ تار یا ڈوری کو ایک چھوٹے قطر کی چرخی پر لگایا جائے جو ڈھول کو لگی ہوئی ہو۔

راقموں کو اس لحاظ سے کہ وہ زور کے متناسب حرکت کو کس طرح حاصل کرتے ہیں دو جماعتوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

(۱) نیم خود نویس راقم —— ان راقموں میں پنسل کی حرکت متحرک سوارہ وزن کے ساتھ مربوط کرنے سے یا اور کسی قسم کی گیرائی کے ذریعے حاصل کی جاتی ہے۔ اِس طرح کا آلہ صرف یہ کرتا ہے کہ اُن نتائج کو ایک منحنی کی شکل میں خود کارانہ طور پر قلمبند کرتا ہے جو علٰحدہ پیمائشوں سے حاصل ہوتے۔ اور یہ روداد اُسی وقت تک صحیح ہوگی کہ جانچ مشین کا بیرم اپنے روکوں کے درمیان "تیرتا رہے"۔ اگر بیرم ایک روک پر

ٹکا ہوا ہو تو سوارہ وزن کے محل سے زور کے متعلق کوئی اطلاع نہیں حاصل ہوتی - اس طرح کے آلے کا ایک بیان انون کی کتاب " اشیا کا امتحان " میں ملیگا -

(۲) پورے خود نویس راقم -

وِک اسٹیڈ کا ماقوائی راقم —— اس آلے میں جو ماقوائی اُستوانہ زور کو برداشت کرتا ہے اس کے اندر کا زیرِ دباؤ پانی ایک چھوٹے اُستوانے میں بھی داخل ہوتا ہے جہاں وہ ایک قوچ پر عمل کر کے ایک مرغولی کمانی کو دباتا ہے - کمانی کے پچکاؤ کو نمونے پر عمل کرنے والے زور کا ایک ناپ سمجھا جاتا ہے - راقم اُستوانے کے اندر قوچ کی رگڑ قوچ کو گھمانے سے تقریباً بالکل ساقط ہو جاتی ہے - جانچ مشین کے صدر قوچ کی بھرتی کی رگڑ کو دباؤ کے متناسب سمجھا جاتا ہے اور اس طرح صرف نقشے کے پیمانے پر اثر کرتا ہوا سمجھا جاتا ہے - نقشے کا پیمانہ اس طرح معین ہوتا ہے کہ جب بیرم اپنی روکوں کے درمیان تیر رہا ہو اس وقت خود نویس نقشے پر سوارہ وزن کے پیمانے سے چند نقاط نشان کر لیے جائیں -

کینیڈی کا خود نویس راقم —— اس آلے میں نقشہ دُھندلے شیشے کے ایک چپٹے ٹکڑے پر حاصل کیا جاتا ہے جس کو امتحانی ٹکڑے کی دو چٹکیوں کے درمیان کے فساد سے ایک ضعفی حرکت حاصل ہوتی ہے - مرتسم کرنے والے نقطے کی حرکت ایک بڑے تنتی ٹکڑے کے فساد سے حاصل ہوتی ہے جو حقیقی امتحانی ٹکڑے کے سلسلے میں کھینچا جاتا ہے لیکن جس کی تراشش اتنی بڑی ہوتی ہے کہ زور اس میں لچک کی حد کو نہیں پہنچتا - اس طرح اس کا فساد لگائے ہوئے زور کے متناسب ہوگا - اس طرح جو حرکت حاصل ہوتی ہے اس سے ایک چھوٹے قطر کے بیلن کو گھمایا جاتا ہے

ٮ Wicksteed

جس کو ایک لمبا نمائندہ لگا ہوا ہوتا ہے جس کے سرے پر مرتسم کرنے والا نقطہ ہوتا ہے ۔ مرتسم کرنے والا نقطہ خطِ مستقیم کی بجائے ایک قوس میں حرکت کریگا ۔ اس آلے کو استعمال کرتے وقت متحرک سوارہ وزن کو پیمانے پر ایسے مقام پر بھی رکھا جاسکتا ہے جو نمونے کے اعظم بوجھ سے آگے ہو ۔ آلے کی اس طرح تعبیر کی جاسکتی ہے کہ جب بڑا کمانی دار ٹکڑا کھینچا جارہا ہو اور شہتیر روکوں کے درمیان تیر رہا ہو اس وقت سوارہ وزن کی پیمانے پر مختلف نقاط کے درمیان حرکت کے متناظر مرتسم کرنے والے نقطے کی حرکت معلوم کی جائے ۔


گڈمین[a] کا خود نویس راقم ——— اس آلے میں امتحانی ٹکڑے کے زور کے متناسب پنسل کی حرکت جانچ مشین کے صدر کھم کے لچکدار فساد کی تبدیلی سے حاصل ہوتی ہے ۔ ایک کئی فٹ لمبی انتصابی سلاخ کا نچلا سرا کھم کو استوارانہ نصب کردیا جاتا ہے ۔ بالائی سرا ایک چاقو کی باڑھ کے ذریعے ایک مرکب بیرم کے چھوٹے حصے سے مربوط کیا جاتا ہے ۔ اس مرکب بیرم کے نصاب چاقو کی باڑھیں ہیں جو کھم کو استوارانہ لگی ہوئی نشستوں پر ٹکی ہوئی ہیں ۔ اِس مرکب بیرم کے سرے سے صنعتی حرکت ایک بار ایک تار کے ذریعے ایک گاڑی کو منتقل ہوتی ہے جس کو ایک نشان ڈالنے والا قلم لگا ہوتا ہے ۔ رگڑ کے اثر سے بچنے کے لیے وہ اُستوانی سلاخیں جو قلم بردار کی رہبری کرتی ہیں امتحانی مشین کے چلاؤ دھرے سے ایک تانت پٹی کے ذریعے گھمائی جاتی ہیں ۔

گرے[b] اور وِک اسٹیڈ[c] کے کمانی دار خود نویس راقم ——— گرے کے خود نویس راقم (شکل ۲۲۲) میں جو ریہلے[d] امتحانی مشینوں کو

---

[a] Goodman [b] Gray [c] Wickstead [d] Riehlé

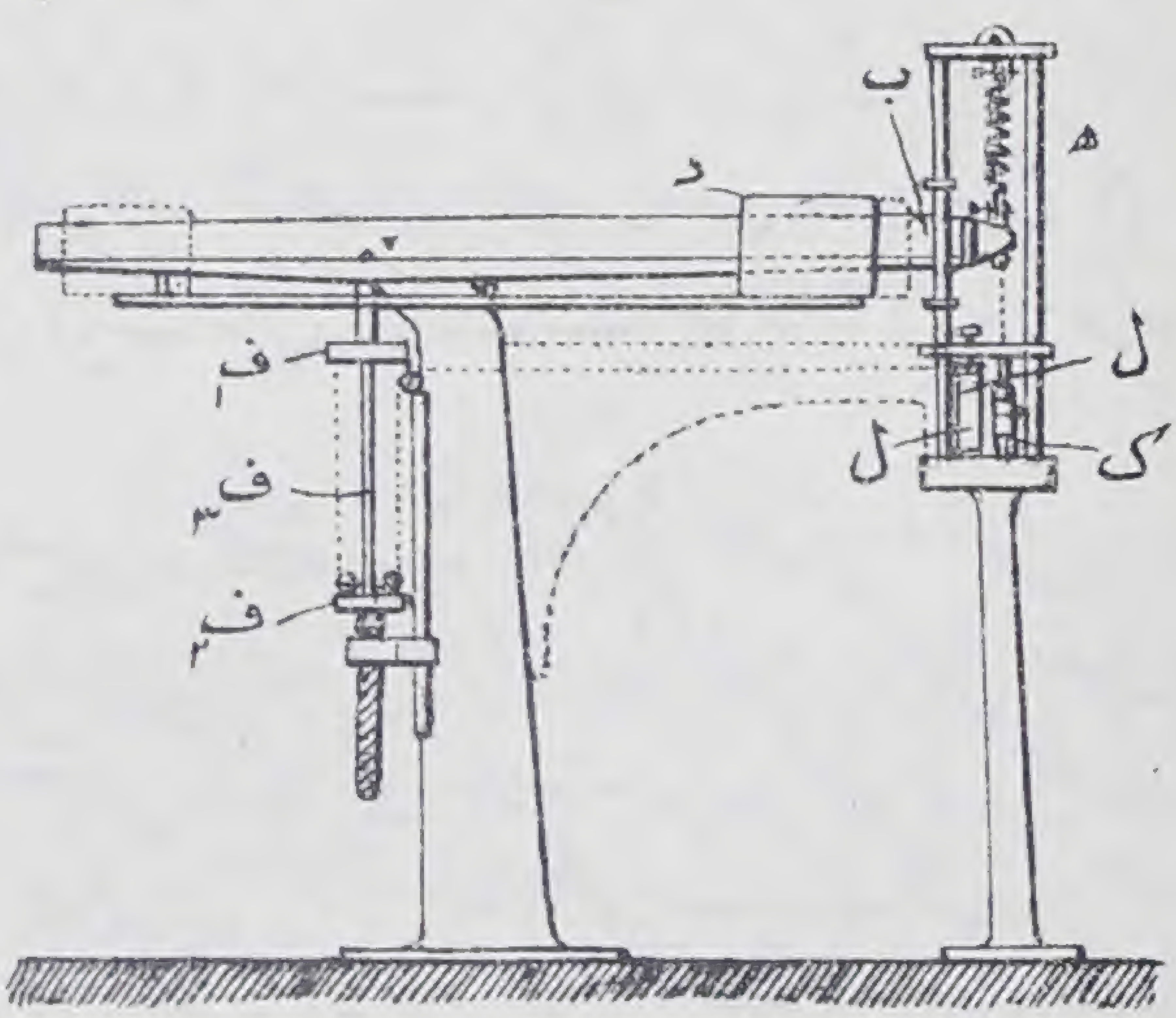
لگایا جاتا ہے زور کے متناسب حرکت ایک تعیر شدہ انقباضی کمانی کے
کھنچاؤ سے حاصل ہوتی ہے جو تول شہتیر کے لمبے بازو کے سرے کے
نیچے لگی ہوتی ہے۔ جب امتحانی ٹکڑے کو کھینچا جاتا ہے تو یہ کمانی شہتیر کو
بالائی روک سے جا لگنے سے روکتی ہے۔ اس آلے میں سوارہ وزن
امتحان کے سارے دوران میں پیمانے کے صفر نشان پر رہتا ہے اور
کمانی کی حرکت سے جو زور کو تعبیر کرتی ہے اُس ڈھول کو گھمایا جاتا ہے
جس کو نقشے کا کاغذ لگا ہوا ہے۔ ڈھول پر کی چرخی کی مختلف جسامتوں سے
شہتیر کے سرے کی حرکت کی تکبیر مختلف نسبتوں میں عمل میں آسکتی۔
پنسل کی حرکت امتحانی ٹکڑے کے فساد سے پیدا ہوتی ہے۔ حرکت کی
بیرموں کے ذریعے تکبیر کی جاتی ہے۔ لچک کی حد کے اندر مابعد کے
مقابلے میں زیادہ تکبیر کی ضرورت ہوتی ہے۔ شکل ۲۲۲ء میں دکھائی
ہوئی جو سلاخ نمونے پر کے شکنجوں کو اُس چھوٹے فرم کے بیرم سے
جوڑتی ہے جس سے اعلیٰ تکبیر حاصل ہوتی ہے اس سلاخ کے بالائی سرے
پر ایک انتظام ہے جس کی مدد سے اعلیٰ تکبیر بڑے فسادوں کے
لیے بھی کی جاسکتی ہے اور یہ اس طرح کہ پنسل کو بار بار صفر پر واپس صفحہ ۵۰۴
لایا جاتا ہے تاکہ ڈوری سے گزر نہ جائے۔ بڑے فریم کے بیرم کو جس سے صفحہ ۵۰۵
لچک کی حد کے باہر کے فسادوں کے لیے پست تکبیر حاصل کی جاتی ہے
تین متبادل نصاب ہیں جن سے مختلف اشیا اور گیج کے مختلف طولوں
کے موزوں تکبیر حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح بیرموں کا جو دوسرا سلسلہ ہے
اُن میں جدائی پذیر کڑی کے پانچ متبادل محل ہو سکتے ہیں جن سے
لچک کی حد کے اندر پانچ تکبیریں ۱۰۰ سے ۵۰۰ تک حاصل ہوتی ہیں۔
کمانی کو اس طرح تعیر کیا جاسکتا ہے کہ فولاد کے ایک انچ بڑی
تراش کے نمونے پر زور ڈالا جائے کہ لچک کی حد واقع نہ ہو اور
اس کھینچ کو سوارہ وزن سے ایک خاص محل میں متوازن کیا جائے۔ پھر
سوارہ وزن کو پیمانے کے صفر پر لایا جائے اور کمانی لگائی جائے



شکل ۲۴۴ ۔ گرسے کا خود نویس کمانی دار رقم

اور شہتیر کو اسی وضع میں واپس لاکر دیکھا جائے کہ کمانی سے اس کھینچ کو متوازن کرنے کے ڈھول کو کتنی گردش دینی پڑتی ہے -

وِک اسٹیڈ[ه] کے خود نویس کمانی دار راقم (شکل ۲۲۲ ا) کو استعمال کرنے میں پہلے سوارہ وزن د پیمانے کے ایسے نقطے پر رکھا جاتا ہے



شکل ۲۲۲ ا - وِک اسٹیڈ کا خود نویس کمانی دار راقم

جو امتحانی ٹکڑے ف۲ کے شکستی بوجھ کے آگے ہو - شہتیر ب کو ایک مرغولی کمانی ه کے ذریعے سہارا جاتا ہے اور نچلی روک کو جا لگنے سے روکا جاتا ہے - کمانی، شہتیر کے لمبے بازو کے اوپر ہوتی ہے اور تناؤ میں ہوتی ہے - جب زور ڈالنے والے آلے سے امتحانی ٹکڑے پر تناؤ ڈالا جاتا ہے تو کمانی کا زور امتحانی ٹکڑے کے تناؤ کی ایک متناسب مقدار کے بقدر کم ہوتا ہے اور کمانی میں ایک متناسب سکڑاؤ واقع ہوتا

ه - Wicksteed

ہے ۔ کمانی کی اور شہتیر کے سرے کی اس حرکت سے ایک مرتسم کرنے والے نقطہ کو حرکت دی جاتی ہے جو ایک حامل ک پر ہوتا ہے ۔ نقطہ ڈھول ل پر اس کے محور کے متوازی حرکت کرتا ہے اور اس کے ساتھ ساتھ ڈھول اس حرکت کی وجہ سے گردش کرتا ہے جو امتحانی ٹکڑے کے فساد سے حاصل کی جاتی ہے ۔ یہ فساد ایک چٹکی ف۱ اور ایک چرخی ف۲ کے درمیان کے طول کا ہوتا ہے ۔ چٹکی اور چرخی ایک ثابت فاصلے پر ہیں ۔ کمانی کی تعبیر اور نقشے کی درجہ بندی اس طرح کی جا سکتی ہے کہ سوارہ وزن کی ایک خاص حرکت کے متناظر پنسل کی حرکت نوٹ کی جائے ۔

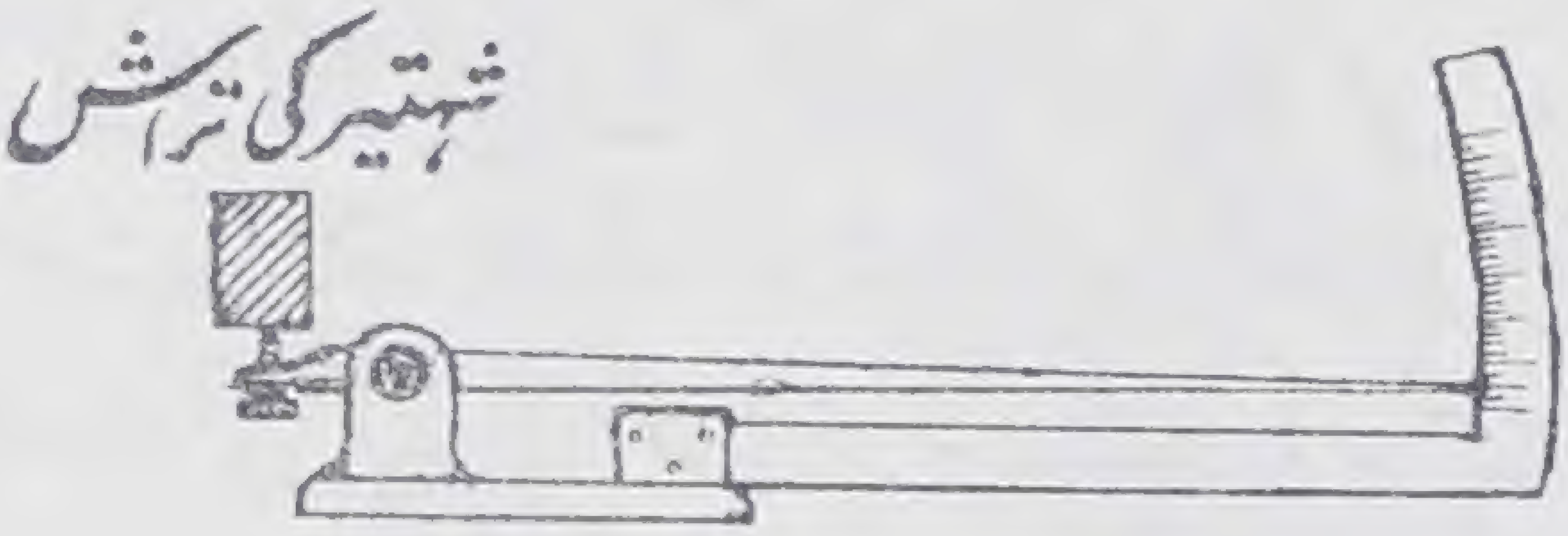
صفحہ ۵۰۶ خود نویسی نقشے ـــ انتہائی مضبوطی ، تطول ، وغیرہ ، کی دریافت میں خود نویسی نقشے کو معمولی پیمائشوں پر کوئی تفوق نہیں ۔ البتہ اس کے استعمال سے اُن حالات میں جن میں معمولی پیمائشیں مشکل یا ناممکن ہوتی ہیں مثلاً نقطۂ مغلوبیت کے قریب اور مقامی کھنچاؤ کے دوران میں جو کہ متعدد دھات میں شکستگی سے ذرا قبل واقع ہوتا ہے ان حالات میں زور اور فساد کے ربط کو کیفیتاً اور خاصی صحت کے ساتھ کمیتاً بھی معلوم کیا جا سکتا ہے ۔ خود نویسی نقشے کے ذریعے یہ بھی ممکن ہوتا ہے کہ تننشی زور لگانے کی مختلف رفتاروں کے اثرات کی اور اُن صورتوں کی تحقیق کی جائے جن میں ایک باقاعدہ بڑھتے ہوئے بوجھ کے تحت تطول غیر مسلسل طور پر بڑھے ۔

۱۷۶ - شہتیروں کے انصراف کی پیمائش ۔

لمبے شہتیر کے لچکدار انصرافوں کو اکثر کسر پیمائی چاپ[۵] کے ذریعے راست ناپا جا سکتا ہے یا اس طرح ناپا جا سکتا ہے کہ شہتیر کو ایک کسر پیما اس طرح لگا دیا جائے کہ ایک ثابت پیمانے کے اوپر حرکت کرے ۔ اگر شہتیر بہت چھوٹا ہو تو لچکدار انصراف اس طرح معلوم کیے

Vernier Calipers ۵

جا سکتے ہیں کہ شہتیر کو ایک بہت باریک تقسیم کا شیشے کا پیمانہ یا ایک آڑا تار لگایا جائے اور اس کی حرکت کو ایک خردبین سے پڑھا جائے یا حرکت کی بیرم کے ذریعے تکبیر کر لی جائے ۔ ایک سادہ بیرم کے ذریعے حرکت کی تکبیر کا انتظام شکل ۲۲۳ میں دکھایا گیا ہے ۔ اگر اس طرح آلے کے



شکل ۲۲۳ ۔ انصراف ناپنے والا آلہ

نمائندے کو ایک کسر پیما لگایا جائے اور بیرمیت ۱۰ : ۱ ہو تو انصراف $\frac{1}{1000}$ انچ تک صحت کے ساتھ ناپے جا سکتے ہیں اور اتنی صحت عموماً کافی ہوتی ہے ۔ شہتیر کے سہاروں کی ممکن مغلوبیت کو ساقط کرنے کے لیے یہ کیا جا سکتا ہے کہ وہ گردانک (Socket) جس میں تکبیری بیرم کی چاقو کی باڑھ ٹکتی ہے شہتیر سے چٹکیوں کے ذریعے لٹکایا جائے (مثلاً جیسی کہ گڈمین کے امتداد پیما شکل ۲۴۰ میں دکھائی گئی ہیں) ۔ جن نقاط کو پکڑا جائے وہ تعدیلی مستوی میں ہوں تو بہتر ہے ۔ تعدیلی سطح کے انصراف کو صحت کے ساتھ قلم بند کرنے کے لیے یہ بھی مناسب ہے کہ بیرم کے چھوٹے سرے کو شہتیر کے ساتھ ایک چٹکی کے ذریعے مربوط کیا جائے جو تعدیلی سطح میں کے نقطوں کو لگی ہو بجائے اس کے کہ خود شہتیر کا نچلا رُخ ٹکا دیا جائے جیسا کہ شکل ۲۲۳ میں کیا گیا ہے ۔

۱۷۷۔ مروڑ کے فساد کی پیمائش ــــــ شکل ۲۲۴ میں ایک آلہ دکھایا گیا ہے جو پروفیسر کوکر[1] نے مروڑ کے فساد کی پیمائش

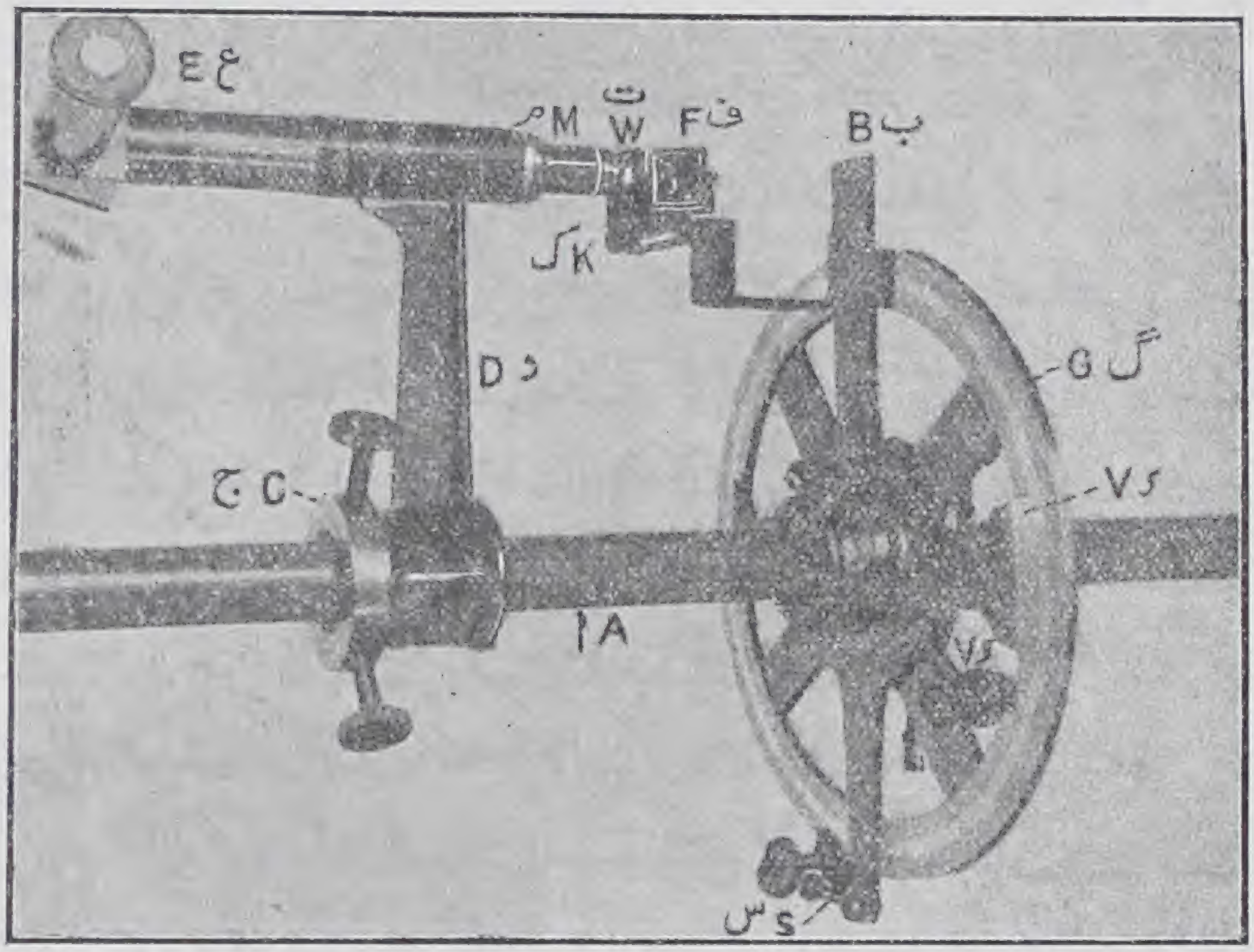
۱؎ Prof. E G Cocker

کے لیے وضع کیا ہے ۔ اس آلے میں ایک نمونہ ا کا لچکدار مروڑ ۸ انچ کے طول میں اس طرح ناپا جاتا ہے کہ ایک تار ت کی حرکت کو (ایونگ[۵۰] کے امتداد پیما کی طرح) ایک خردبین ھ میں سے مشاہدہ کیا جاتا ہے جس کے چشمیہ (eyepiece) ع کے ساتھ ایک شیشے کا پیمانہ ہے جو آئینہ ف کے ذریعے روشن ہوتا ہے ۔ آڑا تار ت، آئینہ ف، اور ناسکہ پر لانے والا پیچ ک یہ سب کسرپیما تختی ع کے بازو ب کے ایک نکلے ہوئے حصّے پر لگے ہوئے ہیں ۔ کسرپیما تختی ع کو ایک باریک درجہ دار مدور تختی گ پر گھمایا جا سکتا ہے جو کہ تین فولادی نوکوں کے پیچوں کے ذریعے (جو تختی کے پیچھے ہیں) نمونہ ا کو لگی ہوئی ہے ۔ ایک چک (chuck) ج کو، جو اسی طرح تین پیچوں کے ذریعے ا کو لگا ہوا ہے، ایک بازو د ہے جس کے بالائی حصّے میں خردبین لگائی جاتی ہے ۔ بازو د کا نچلا حصّہ ایک منقسم ہنسلی پر مشتمل ہے جس کے ذریعے بازو کو چک ج کو اُس وقت لگایا جا سکتا ہے جب کہ تختی گ اور چک ج نمونہ ا پر ایک شکنجہ کے ذریعے (جو دکھایا نہیں گیا) کس دیئے گئے ہوں ۔ شکنجہ دو منقسم ہنسلیوں پر مشتمل ہے جو تراش میں خانہ بنا ہیں اور طولاً مربوط ہیں اور جو گ اور ج کو اس طرح پکڑتی ہیں کہ یہ دونوں ایک استوار جسم بن جائیں اور ان کو اُن چھ گرفتی پیچوں کے ذریعے کسا جا سکے ۔ تب بازو د کا نچلا سرا جو دو ٹکڑوں پر مشتمل ہے چک ج پر کے شکنجے کی ایک منقسم ہنسلی کی جگہ لیتا ہے ۔ شکنجے کی منقسم ہنسلیاں اور بازو د تقسیم کی ایک جانب قبضہ کیے گئے ہیں اور آزاد سروں کو پیچوں اور ڈھبریوں کے ذریعہ شکنجہ کیا جا سکتا ہے ۔ صفحہ ۴۰۷

آلے کی تعییر (calibration) یعنی خردبین کے درجوں کی قیمت کی تعیین اس طرح عمل میں آتی ہے کہ تار ت جس بازو ب کو

۵۰ Ewing

لگا ہوا ہے اس کو کسر پیما تختی ع سمیت مماسی پیچ س کے ذریعے درجے دار تختی گ پر ایک خاص زاویے مثلاً ۱۰ دقیقے میں گھمایا جائے۔



شکل ۲۲۴ ۔ کوکر کا مروڑ کا فساد ناپنے کا آلہ

اس زاویے کو کسر پیما ع کے ذریعے چھوٹے تکبیری شیشے کے ذریعے پڑھنا چاہیے ۔ یہ شیشہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ قابلِ پیمائش فساد کی وسعت صریحاً چشمیہ کے پیمانے تک محدود نہیں کیونکہ کسی دیے ہوئے زاویۂ فساد کے بعد تار کو مماسی پیچ س کے ذریعے دوبارہ صفر پر ترتیب دیا جا سکتا ہے ۔ مقروؤں (readings) کی صحت کی حد تقریباً ۱ ثانیہ کی قوس ہے ۔

اگر ابھی جس آلے کو بیان کیا گیا ہے اس طرح کا آلہ موجود نہ ہو صفحہ ۸۰
تو پیچدار مروڑ کے فساد اس طرح ناپے جا سکتے ہیں کہ نمونے کو دو لمبے سیدھے نمائندے کس دیے جائیں اور ثابت پیمانوں پر ان کی

حرکت کو مشاہدہ کیا جائے اور ان کا فرق لیا جائے - ایک دوسرا اہل طریقہ یہ ہوگا کہ ایک نمائندے کے سرے کو ایک پیمانہ نصب کیا جائے اور دوسرے کو ایک آڑا تار اور ایک شست سوراخ (Sighting hole) تاکہ اختلاف منظر کی غلطیاں واقع نہ ہوں اور اس سوراخ میں سے پیمانے پر تار کی حرکت کو مشاہدہ کیا جائے - ایک اور متبادل طریقہ یہ ہوگا کہ نمونے کو نمائندوں کی بجائے آئینے کس دیے جائیں جو باہر نیم قطری سمت میں انعکاس کریں - ایک ثابت پیمانے کا انعکاس ایک دوربین کے ذریعے پڑھا جائے یا ایک آڑے تار کا انعکاس ایک ثابت پیمانے کے اوپر پڑھا جائے تو یہ انعکاس سلاخ کے گھومتے ہوئے زاویے کے دوگنے زاویے میں گھومتا ہے اور مشاہدے کے نقطے کو بڑے فاصلے پر رکھنا ایک بہت لمبا نمائندہ استعمال کرنے کے معادل ہے -

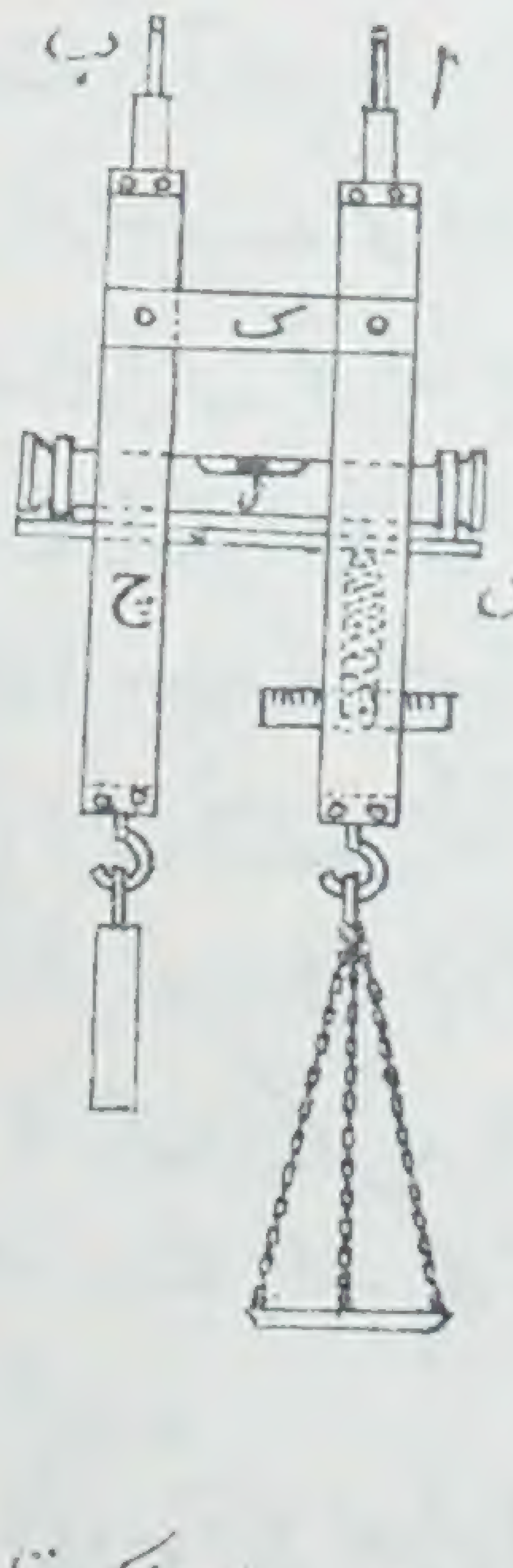
غیر لچکدار فساد --- کسی متمدد شے میں مروڑ کی لچک کی حد اور شکستی بوجھ کے درمیان جو بہت بڑے مروڑ کے فساد واقع ہوتے ہیں اُن کے لیے یہ کیا جاسکتا ہے کہ خردبین م (شکل ۲۲۴) کی بجائے ایک نمائندہ لگایا جائے جو اس طرح مڑا ہوا ہو کہ درجہ دار دائرے گ پر حرکت کرے - اگر صرف لچک کی حد کے باہر کے فسادوں کو ناپنا ہو تو آلے کو بہت آسان کیا جاسکتا ہے اور وہ اس طرح کہ گ کی بجائے ایک دائرہ لگایا جائے جو بڑے حصّوں میں مثلاً صرف پورے درجوں میں منقسم ہو اور خردبین کی بجائے ایک نمائندہ لگایا جائے جو اس طرح مڑا ہوا ہو کہ اس کی نوک درجہ دار دائرے کے قریب حرکت کرتی ہے - پٹواں لوہے کے نمونوں کو جن کا قطر ⅝ انچ ہو ۸ انچ کے طول میں شکستگی سے قبل چار پورے چکروں تک مروڑا جاسکتا ہے اور ایسی صورت میں لچک کی حد کے باہر کے فسادوں کے لیے ایک درجے تک صحیح مفروضات کافی صحیح ہونگے -

۱۷۸ - تاروں کا تناؤ ــــــ تاروں کی انتہائی مضبوطی معلوم کرنے کے لیے مختلف اقسام کی جانچ مشینیں بنائی جاتی ہیں - بعضوں کا عمل اُس ایک بیرمی جانچ مشین کے مشابہ ہے جو دفعہ ۱۶۹ میں بیان کی گئی ہے لیکن زور ڈالنے کا عمل دستی طاقت سے ایک پیچ کے ذریعے کیا جاتا ہے جس کو پیچہ یا مہمیزی گیرائی کے ذریعے چلایا جاتا ہے - دوسروں میں بوجھ ایک کمانی دار ترازو کے ذریعے ناپا جاتا ہے، یا سیالی دباؤ کے ذریعے جو ایک دیافرام (Diaphragm) پر عمل کرتا ہے جس کو تار کا ایک سرا لگا ہوا ہوتا ہے -

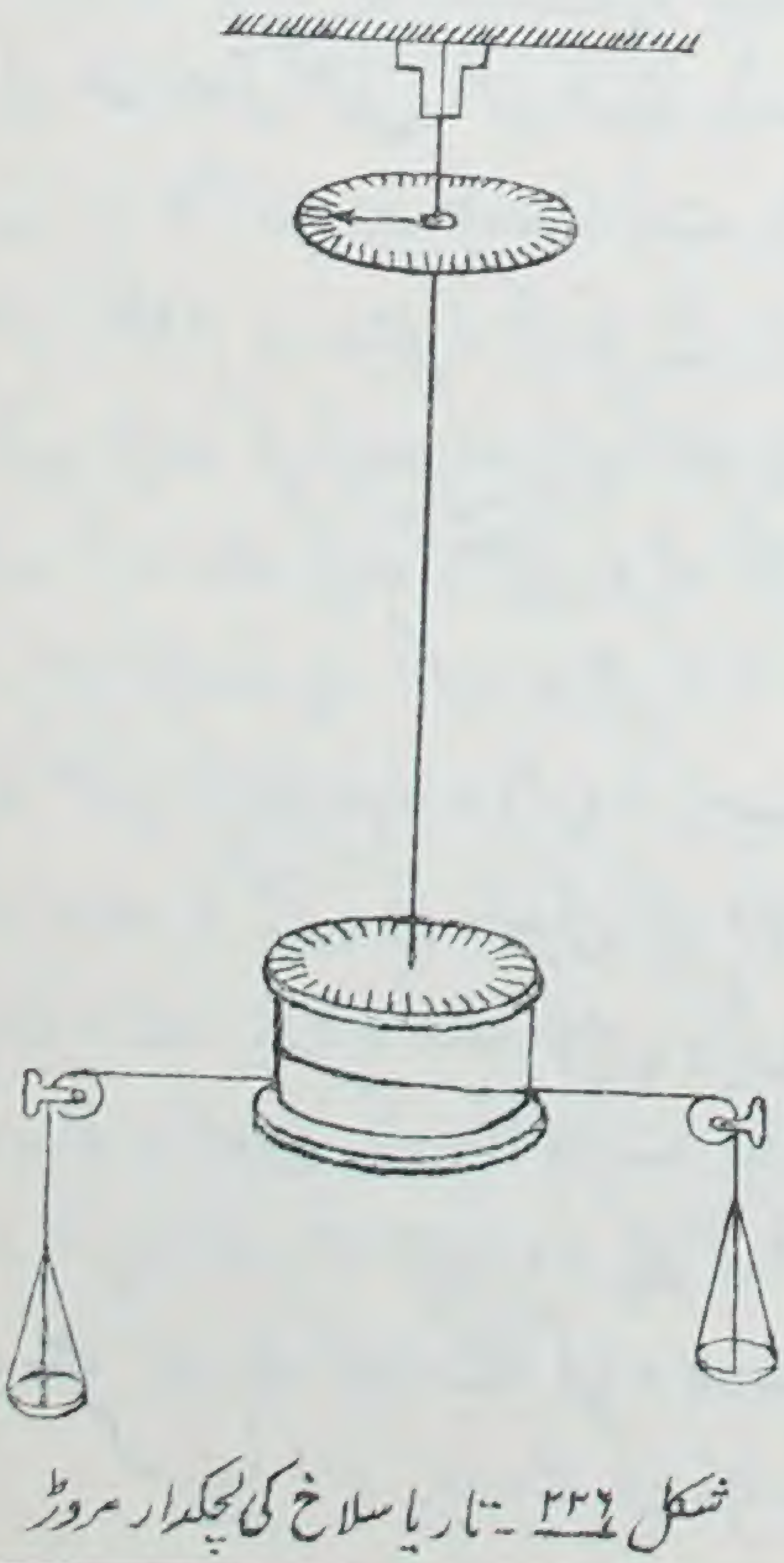
تاروں کا لچکدار تطول ــــــ پتلے تاروں کا راست لچک کا مقیاس معلوم کرنے کے لیے معلومہ بوجھ لگانے کا ایک سہل طریقہ یہ ہے کہ ایک ترازو کے پلڑے میں وزن لٹکائے جائیں - اگر تار کافی لمبا ہو تو تطول اس طرح پڑھے جا سکتے ہیں کہ تار کو ایک کسر پیما کس دیا جائے جو ایک ثابت پیمانے پر حرکت کرے - ایک عام انتظام یہ ہے کہ ایک ہی سہارے سے دو تار بازو بازو لٹکائے جائیں ایک کو ایک کسر پیما کسا جائے اور دوسرے کو ایک پیمانہ - ایک تار سے ایک مستقل بوجھ لٹکایا جائے جو اس کو تنا ہوا رکھے اور دوسرے پر اُس بوجھ کو باقاعدہ قسطوں میں ڈالا جائے جس کے لیے تطول ناپنا ہے - اِس ترکیب سے یہ ہوتا ہے کہ سہارے کی مغلوبیت یا تپش کی تبدیلی کی وجہ سے کوئی اثر نہیں پڑتا اور جھولتے رہنے سے زیادہ دِقت نہیں پیش آتی - یہ اکثر ضروری ہوتا ہے کہ چھوٹے بوجھوں کے مشاہدات ردّ کر دیے جائیں کیونکہ ان پر جو فساد ناپے جاتے ہیں وہ کچھ تو کھنچاؤ کی وجہ سے اور کچھ تار کے سیدھے ہونے اور تننے کی وجہ سے ہوتے ہیں -

کسر پیما اور پیمانے کی بجائے ایک خردہ پیما پیچ اور لیول استعمال

کیے جا سکتے ہیں جیسا کہ شکل ۲۲۵ میں کیے گئے ہیں جو کہ سرلؔ کے آلے کو تعبیر کرتی ہے - جب پلڑے میں وزن رکھے جاتے ہیں تو تار ا کھنچتا ہے اور سپرٹ لیول ل کے دائیں سرے کو جھکاتا ہے - لیول کو چ پر اس فریم پر چول دی گئی ہے جو کہ دوسرے تار ب کو لگا ہوا ہے اور لیول پیچ س کے سرے پر ٹکتا ہے جو کہ زیرِ امتحان تار ا کو لگے ہوئے فریم میں بیٹھتا ہے - تطول اُس طرح ناپا جاتا ہے کہ خُردہ پیما پیچ س کو اتنا گھماتے ہیں کہ لیول ل میں بلبلہ وسط میں آجائے اور س کی حرکت کو اِس کے درجہ دار سر کے ذریعے نوٹ کیا جاتا ہے - دونوں تاروں کو لگے ہوئے فریموں کو کڑی ک کے ذریعے مربوط کیا گیا ہے تاکہ علٰحدہ نہ ہو جائیں - یہ کڑی دونوں فریموں میں کیلوں پر آزادانہ گھومتی ہے -



شکل ۲۲۵ - تار کا لچکدار تطول



شکل ۲۲۶ - تار یا سلاخ کی لچکدار مروڑ

ے Searle

اس طرح کے دو تاروں کی اضافی حرکت اس طرح بھی ناپی جا سکتی ہے کہ اس اضافی حرکت سے ایک آئینے کو جھکانے لگایا جائے۔ پروفیسر ایونگ^ہ نے اس مناظری طریقے کو ایک آلے میں استعمال کیا ہے جس کی تکبیر اتنی بڑی ہے کہ صرف ۳ فٹ لمبے تار استعمال کیے جاتے ہیں۔

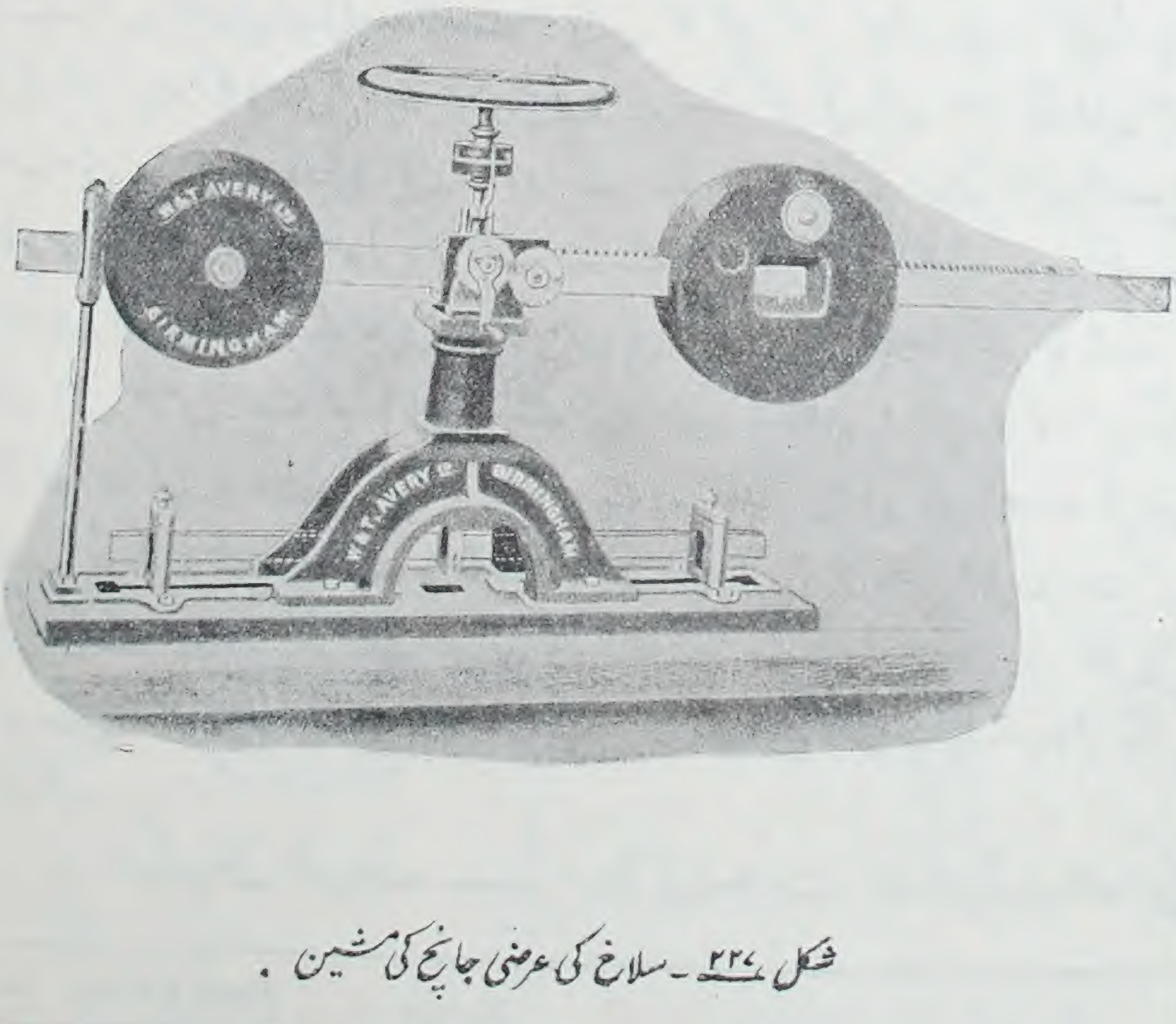
۱۷۹- تاروں کا لچکدار مروڑ ــــ تار کا اُستواری کا مقیاس معلوم کرنے کے لیے ایک بہت سادہ آلہ استعمال کیا جا سکتا ہے کیونکہ ایک لمبے پتلے تار کی مروڑ کی مضبوطی بہت خفیف ہو گی اور چھوٹے مروڑ کے جفتوں کے ذریعے مروڑ کے بڑے زاویے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ لمبی پتلی سلاخوں کے لیے جو عام انتظام استعمال ہو سکتا ہے وہ شکل ۲۲۶ میں دکھایا گیا ہے۔ ایک تار کا بالائی سرا ایک انتصابی وضع میں مضبوط کس دیا گیا ہے اور نچلا سرا ایک ڈھول یا چرخی کو کسا گیا ہے۔ اس ڈھول کو ایک جفت، جس کا محور تار ہوتا ہے، اُفقی ڈوریوں کے ذریعے لگایا جاتا ہے جو چرخیوں پر سے گذرتی ہیں اور پلڑوں میں مساوی وزن سہارتی ہیں۔ تار کے نچلے سرے کا مروڑ اس طرح ناپا جا سکتا ہے کہ ڈھول کو ایک درجے دار ڈائیل لگا ہو اور ایک ثابت نمائندے کے پاس سے اس کی حرکت کو مشاہدہ کیا جائے۔ اور اِس غرض سے کہ بالائی شکنجے میں کوئی پھسلن واقع ہو تو اس کے اثر کو دُور کیا جا سکے یہ کیا جا سکتا ہے کہ تار کو بالائی سرے کے قریب ایک نمائندہ لگایا جائے۔ ایک ثابت ڈائیل پر اس نمائندے کی جو حرکت ہو اس کو نچلے سرے کی زاویئی حرکت میں سے تفریق کرنے سے زیرِ مشاہدہ نقاط کے درمیانی طول کا مروڑ حاصل ہو گا۔ صفحہ ۵۱۰

حرکیاتی طریقہ ــــ مروڑ کی صلابت اور اس سے استواری کا

ہ Prof. Ewing

مقیاس اس طرح بھی حاصل ہو سکتے ہیں کہ ایک تار کے بالائی سرے کو ثابت کر کے آزاد سرے پر ایک معلومہ معیارِ جمود کی کمیت لگائی جائے اور اس کے مروڑ کے اہتزازوں کی مدت مشاہدہ کی جائے (دیکھو دفعہ ۱۸۱)۔

۱۸۰۔ ہلکے شہتیروں کا خماؤ — لچک کا مقیاس یا شکستگی کا مقیاس (دفعہ ۴۷) دریافت کرنے کی غرض سے ایک چھوٹی تراش کے شہتیر کا خماؤ اس طرح انجام دیا جا سکتا ہے کہ اس کے دونوں سروں کو سہاروں پر رکھا جائے اور فصل کے وسط میں بوجھ لٹکائے جائیں۔ انصراف کو اکثر راست پیمائش یا چاپ (calipers) کے ذریعے کافی صحت کے ساتھ معلوم کر سکتے ہیں یا دفعہ ۱۷۶ کے طریقے استعمال کیے جا سکتے ہیں۔



شکل ۲۲۷ - سلاخ کی عرضی جانچ کی مشین۔

چھوٹی تراش کی سلاخوں کے عرضی امتحانات کے لیے کئی چھوٹی یک بیرمی مشینیں بنائی گئی ہیں اور خاص طور پر چھوٹی ڈھلے لوہے کی سلاخوں کے لیے استعمال کی جاتی ہیں جو ایک تخصیص کو پورا کرنے کے لیے اسی دھات میں سے بنائی گئی ہوں جس سے ایک بڑا ڈھلواں (Casting) تیار کیا گیا ہو۔ ایک عام تخصیص جس پر پورا اُترنا پڑتا ہے یہ ہے کہ ۱ انچ چوڑی اور ۲ انچ گہری امتحانی سلاخ کے سہاروں کے ۳۶ انچ فصل کے وسط میں شکستی بوجھ ۲۶ ہنڈرڈ ویٹ سے کم نہ حاصل ہو۔ ایک اور تخصیص یہ ہے کہ ۱ انچ مربع تراش کی سلاخ کے ۱۲ انچ فصل پر شکستی بوجھ ۲۰۰۰ پونڈ سے کم نہ ہو۔ بعض اوقات انصراف کے متعلق کوئی تخصیص کردی جاتی ہے۔

شکل ۲۲۷ میں ایک چھوٹی عرضی جانچ کی مشین دکھائی گئی ہے جو میسرز[ه] ڈبلیو اور ٹی آیوری نے ایسی ڈھلے لوہے کی ڈھلائی گھر (foundry) کی سلاخوں کے لیے بنائی ہے جن کی تراش ۲ انچ گہری × ۱ انچ چوڑی تک ہو اور طول ۳۶ انچ فصل تک ہوں۔ فساد ایک پیچ کے ذریعے پیدا کیا جاتا ہے جس کو ہتھ پہیے کے ذریعے گھمایا جاتا ہے۔ ہتھ پہیا مرکزی گردانک (socket) کو اُٹھاتا ہے اور شہتیر پر ایک اوپروار کھینچ دونوں سروں کی گردانکوں (sockets) کے وسط میں لگاتا ہے اور ایک مساوی نچوار دباؤ نصاب کے نزدیک کے بیرم پر۔ انصراف پیچ کی حرکت کے ذریعے ناپا جاتا ہے اور پیچ کی حرکت کو چھوٹے درجہ دار ڈھول پر مشاہدہ کیا جاتا ہے۔ بوجھ کو اس طرح ناپتے ہیں کہ بیرم کو متحرک توازنی وزن کے ذریعے متوازن کیا جاتا ہے۔ توازنی وزن کو حرکت ایک پیچ کے ذریعے دی جاتی ہے جس کو ایک دستے اور گیراری کے ذریعے چلایا جاتا ہے۔ شکل میں جو مشین دکھائی گئی ہے اُس کی قابلیت ۴۰ ہنڈرڈ ویٹ ہے جو اوپر کے انتہائی ابعاد کے ڈھلے لوہے

صفحہ ۱۱

ه Messrs. W & T. Avery.

کے ٹکڑے کو توڑنے کے لیے بہت کافی ہے۔

۱۸۱ - لچک کے مستقلوں کی تجرباتی دریافت

(خلاصہ) —— اُن تمام سکونیاتی تجربات میں جن میں دئے ہوئے بوجھوں کے تحت لچکدار فساد ناپا جاتا ہے تجربے کی خطاؤں سے بچنے کے لیے یہ مناسب ہے کہ زور کی ایک اتنی بڑی وسعت لی جائے جتنی ممکن ہے اور اور مشاہدات کا ایک سلسلہ حاصل کیا جائے۔ بوجھ اور فساد کی ان مشاہدہ کی ہوئی قیمتوں کو علی القوائم محددوں کے طور پر ترسیم کیا جائے تو صحیح قیمتیں (ھوک کے قانون کی رُو سے) ایک خطِ مستقیم پر واقع ہونگی۔ اس پر دو نقطے لے کران کے زوروں اور فسادوں کا فرق لینے سے ایک عمدہ تجرباتی نتیجہ حاصل ہوگا اور خاص طور پر صفر کی غلطی کے اثر سے بچ سکینگے۔

ینگ کا مقیاس (ے)۔

(۱) دھاتی سلاخ —— جانچ مشین اور امتداد پیما کے ذریعے تناؤ اور تطول کے مشاہدات کا ایک سلسلہ حاصل کیا جائے۔ (دفعات ۱۶۹ اور ۱۷۴)۔

$$\text{ے} = \frac{\text{راست زور کی یکساں حدت}}{\text{کسری تطول}} \quad (\text{دفعہ } 9)$$

(۲) پتلا تار —— دیکھو دفعہ ۱۷۸۔ ضابطہ اوپر کی طرح۔

(۳) لمبی پتلی سلاخ —— مرکزی بوجھ کے تحت خماؤ کے ذریعے۔ اس طریقے میں سادہ خماؤ کے نظریے کی صحت ایک ایسی صورت کے لیے فرض کی جاتی ہے جس میں خماؤ "سادہ" نہیں۔ اور اگر ے کو پہلے طریقہ (۱) کے مطابق معلوم کرلیا گیا ہے تو یہ امتحان اس صورت کے لیے اس نظریے کی صحت کی ایک جانچ کا کام دیتا ہے۔ انصراف

دفعہ ۱۷۶ کی طرح معلوم کیا جاتا ہے - بوجھ وزن لٹکا کر لگایا جاتا ہے یا دفعہ ۱۸۰ شکل ۲۲۷ کی طرح لگایا جاتا ہے -

$$ی = \frac{و ل^3}{۴۸ \; آ \; ما} \text{ (دیکھو (۴) دفعہ ۷۸)}$$

جہاں ما وسطی بوجھ کے ایک فرق و کے مقابل انصراف کا اوسط فرق ہے - برآمدہ بیرموں اور دیگر شہتیروں پر بھی اسی طرح بوجھ لگایا جاسکتا ہے اور ی کو محسوب کرنے کے لیے باب ۶ کے ضابطے استعمال کیے جاسکتے ہیں -

اُستواری کا مقیاس (س) -

(۱) دھات کی استوانی سلاخ ـــــ مروڑ کی جانچ مشین اور مروڑ کا فساد ناپنے کے آلوں کے ذریعے مروڑ کے معیاروں اور مروڑ کے زاویوں کے مشاہدات کا ایک سلسلہ حاصل کرنے سے (دفعات ۱۷۳ اور ۱۷۷) ـــــ

$$س = \frac{۳۲ \; ٹ \; ل}{\pi \; ق^4 \; طہ} \text{ (دیکھو (۳۱) اور (۴) دفعہ ۱۰۹)}$$

جہاں طہ مروڑ کے معیار کے ایک فرق ٹ کے مماثل مروڑ کا اوسط فرق نیم قطریوں میں ہے -

(۲) لمبا مدور تراش کا تار یا سلاخ - سکونیاتی طریقہ ـــــ صفحہ ۵۱۲

مروڑ کے معیار اور مروڑ کے زاویے کے مشاہدات کا ایک سلسلہ حاصل کر کے دفعہ ۱۷۹ کی طرح

$$س = \frac{۳۲ \; ٹ \; ل}{\pi \; ق^4 \; طہ} \text{ (اُوپر کی طرح)}$$

(۳) لمبا مدور تراش کا تار - حرکیاتی طریقہ ـــــ ایک تار کو

انتصاباً لٹکا کر اس کے آزاد سرے سے ایک معلومہ (اور متقابلتاً بڑے) معیارِ جمود کی کمیت لٹکائی جائے اور اس کو مروڑ کے اہتزاز میں لایا جائے۔ سہولت کے لیے اس کمیت کو ایک کھوکھلا یا ٹھوس دھاتی اُستوانہ لیا جا سکتا ہے جس کا محور تار کے محور کی سیدھ میں ہو، یا ایک اُستوانی یا مستطیلی لمبی سلاخ لی جا سکتی ہے جس کا محور تار کے محور کے علی القوائم ہو اور تار سے اِس کی تنصیف ہوتی ہو۔ مساوات (۲) دفعہ ۱۶۷ سے

$$\text{س} = \frac{\text{۴}\pi^{2}\,\text{ن}^{2}\,\text{جم}\,\text{ل}}{\text{جا}} = \frac{\text{۱۲۸}\,\pi\,\text{ن}^{2}\,\text{جم}\,\text{ل}}{\text{ق}^{4}}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{۱۲۸}\,\pi\,\text{ن}^{2}\,\text{و}\,\text{گ}^{2}\,\text{ل}}{\text{۱۲} \times \text{۳۲٫۲} \times \text{ق}^{4}}$$

جہاں ن مروڑ کے ارتعاشوں کا تعددی ثانیہ ہے، اور تمام خطی ابعاد انچ کی اکائی میں ہیں۔

ایک اَور ترکیب یہ ہے کہ پہلے نامعلوم معیارِ جمود جم_{1} کے ایک حامل کے مروڑ کے ارتعاشوں کا تعدد ن_{1} معلوم کیا جائے پھر حامل میں معلومہ معیارِ جمود جم_{2} کی کمیت یا کمیتیں رکھ کر تعدد ن_{2} معلوم کیا جائے۔ تب

$$\text{س} = \frac{\text{۴}\pi^{2}\,\text{ن}_{1}^{2}\,\text{جم}_{1}\,\text{ل}}{\text{جا}} = \frac{\text{۴}\pi^{2}\,\text{ن}_{2}^{2}\,(\text{جم}_{1} + \text{جم}_{2})\,\text{ل}}{\text{جا}}$$

اور نامعلوم مقدار جم_{1} کو ساقط کرنے سے

$$\text{س} = \frac{\text{ن}_{1}^{2}}{\text{ن}_{1}^{2} - \text{ن}_{2}^{2}} \times \frac{\text{۴}\pi^{2}\,\text{ن}_{2}^{2}\,\text{جم}_{2}\,\text{ل}}{\text{جا}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ن}_{1}^{2}}{\text{ن}_{1}^{2} - \text{ن}_{2}^{2}} \times \frac{\text{۱۲۸}\,\pi\,\text{ن}_{2}^{2}\,\text{جم}_{2}\,\text{ل}}{\text{ق}^{4}}$$

حامل اس لیے استعمال کیا جاتا ہے کہ تار کو مختلف کمیتیں لگانا دِقّت طلب ہوتا ہے۔ حامل کی ایک سہل شکل ایک دھاتی نلی ہے جس میں دھاتی استوانہ (جم_{2}) بیٹھتا ہے۔ معیارِ جمود جم_{2} تول اور ناپ کر معلوم کیا جاتا ہے۔ اس کا گردشی نصف قطر ایسے مرکزی محور کے

گرو جو اس کے ذاتی محور کے علی القوائم ہو حسبِ ذیل ربط سے حاصل ہوگا:-

$$\text{گ}^2 = \frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ل}^2}{12}$$

جہاں ر نصف قطر اور ل طول ہے۔

(۴) بند لچھوں کی مرغولی کمانی ـــ سکونیاتی طریقہ۔ بوجھ محوری سمت میں لگا کر انصرافوں کو اگر بڑے ہوں تو بالراست ورنہ دفعہ ۱۷۸ کی طرح ایک کسر پیما کے ذریعے ناپا جائے۔ (۲) دفعہ ۱۱۷ سے :-

$$\text{س} = \frac{32\ \text{و}\ \text{ر}^2\ \text{ل}}{\pi\ \text{ق}^4\ \text{صہ}}$$

جہاں صہ محوری بوجھ کے فرق و کے مقابل انصراف کا اوسط فرق ہے۔

(۵) بند لچھوں کی مرغولی کمانی ـــ حرکیاتی طریقہ۔ صفحہ ۵۱۳
یعنی کمانی پر ایک بھاری محوری بوجھ و کے انتصابی ارتعاشوں کے ذریعے ـــ اگر کمانی کی کمیت قابل نظر اندازی نہ ہو تو وہیں کمانی کے وزن کا $\frac{1}{3}$ جمع کرنا چاہیے (دیکھو دفعہ ۱۶۱)۔
تب (۲) دفعہ ۱۵۹ سے :-

$$\text{ن} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{ص}\ \text{ج}}{\text{و}}}$$

اور دفعہ ۱۱۷ سے

$$\text{ص} = \frac{3\pi\ \text{ق}^4\ \text{س}}{8\ \text{ر}^2\ \text{ل}}\ \text{فی فٹ انصراف}$$

اس لیے $$\text{س} = \frac{128\ \pi\ \text{و}\ \text{ن}^2\ \text{ر}^2\ \text{ل}}{32.2 \times 12 \times \text{ق}^4}$$

جہاں ن ارتعاشوں کا تعدد فی ثانیہ ہے، اور تمام خطی ابعاد انچوں میں ہیں -

پوائی سن کی نسبت $\left(\frac{1}{\text{م}}\right)$ -

(۱) اوپر کی طرح ہے اور س معلوم کرنے سے -

(۱) دفعہ ۱۳ سے

$$\frac{1}{\text{م}} = \frac{\text{ہے}}{\text{۲س}} - 1$$

(۲) طولی فساد امتداد پیماؤں کے ذریعے (دفعہ ۱۷۴) اور جانبی فساد خاص آلات کے ذریعے معلوم کرنے سے جن کی تکبیر بہت اعلیٰ ہو - یہ آلے عموماً مناظری (optical) ہوتے ہیں - اس طرح

$$\frac{1}{\text{م}} = \frac{\text{جانبی فساد}}{\text{طولی فساد}}$$

دوسرے طریقوں کا انحصار خمیدہ شہتیروں کی تراش کی شکل کی تبدیلیوں پر ہے اور اس طرح ان کا انحصار خماؤ کے نظریے کی صحت پر رہا ہے -

حجمی مقیاس -

(۱) اوپر کی طرح ہے اور س معلوم کرنے سے - مساوات (۴) دفعہ (۱۳) سے

$$\text{ح} = \frac{\text{س ہے}}{\text{۹س} - \text{۳ہے}}$$

(۲) اوپر کے طریقہ (۲) سے پوائی سن کی نسبت معلوم کرنے اور اوپر کی طرح ہے یا س کی پیمائش کرنے سے - (۲) دفعہ ۱۳ سے

$$\text{ح} = \frac{1}{3}\,\frac{\text{م}}{\text{م} - 2} \times \text{ہے}$$

اور (۱) اور (۲) دفعہ ۱۳ سے ـــــ

$$\text{ح} = \frac{۲(\text{م}+۱)}{۳(\text{م}-۲)} \times \text{س}$$

یہ بھی ظاہر ہے کہ پوائی سن کی نسبت کی پیمائش کا جو راست طریقہ (۲) ہے اُس سے س کی پیمائش کا طریقہ ہاتھ آتا ہے کیونکہ (۱) دفعہ ۱۳ سے

$$\text{س} = \frac{\text{م}}{۲(\text{م}+۱)} \times \text{ے}$$

صفحہ ۵۱۴

سولہواں باب

خصوصی امتحانات

۱۸۲ - تکراری اور متعاکس زور ــــ وولر کی مشینیں اور امتحانات ــــ وولر نے راست زور، خماؤ کے زور، اور مروڑ کے زور کی تکرار کے متعلق اپنے مشہور تجربات (دیکھو دفعہ ۴۷) جن مشینوں پر کیے اُن کی شکلیں اور بیان اَنوِنؔ کی کتاب "اشیا کا امتحان" باب ۱۳ میں ملینگے ۔ قوتیں کمانیوں کے انصراف کے ذریعے لگائی اور ناپی گئیں ۔ ان کمانیوں کی صلابت ناپ لی گئی تھی ۔ وولر کے جس امتحان کی اب سب میں زیادہ تکرار کی جاتی ہے وہ ایک گھومتے تکلے کا ہے جو ایک سرے پر ثابت ہو اور دوسرے سرے پر ایک بوجھ اُٹھائے ہوئے ہو ۔ دیکھو خماؤ کے ایسے تمام امتحانات میں اگر زور ابتداہی میں یا امتحان کے دوران میں لچک کی حد سے زیادہ ہو جائے تو کسی تراش پر زور کی تقسیم نامعلوم ہوتی ہے اور زور کی اعظم حدت محسوب نہیں کی جاسکتی سادہ راست ازور ہی ایک وہ زور ہے جس کی تقسیم لچک کی حد کے باہر بھی صحیح طور پر معلوم رہتی ہے ۔

ہ Unwin

گھومتے برآمد ہیرم اور "گھومتے شہتیر" والے نمونے کی جوحالیہ مشینیں ہیں اُن کی تفصیلات اور شکلیں اُن پرچوں اور کتابوں میں ملینگی جن کا حوالہ دفعہ ۴۸ میں دیا گیا ہے۔

ڈاکٹر اسمتھ کی مشینیں ---- پروفیسر آسبرن رینلڈز[۱] کے خیال سے فائدہ اُٹھاکر ڈاکٹر اسمتھ نے تکراری اور متعاکس راست زور لگانے کا ایک نیا طریقہ پیش کیا جس سے تکراری زور کے امتحانات میں ایک نئی ترقی واقع ہوئی۔ ڈاکٹر اسمتھ کی ابتدائی مشین میں امتحانی ٹکڑے پر سادہ راست زور اُن متکافی کمیتوں کی جمودی قوتوں سے ڈالا جاتا تھا جن کو ایک کرینک اور جوڑ ڈنڈے کے ذریعے ایک گھومتے دُھرے سے حرکت پہنچتی تھی۔ امتحانی ٹکڑا جوڑ ڈنڈے اور متکافی وزنوں کے درمیان رکھا جاتا تھا۔ اِسی نمونے کی ایک زیادہ تفصیلی مشین جس میں ایک وقت میں چار نمونے لگائے جا سکتے ہیں نیشنل فزیکل لیباریٹری[۱] میں سرٹی۔ اسٹینٹن[۲] نے استعمال کی ہے۔

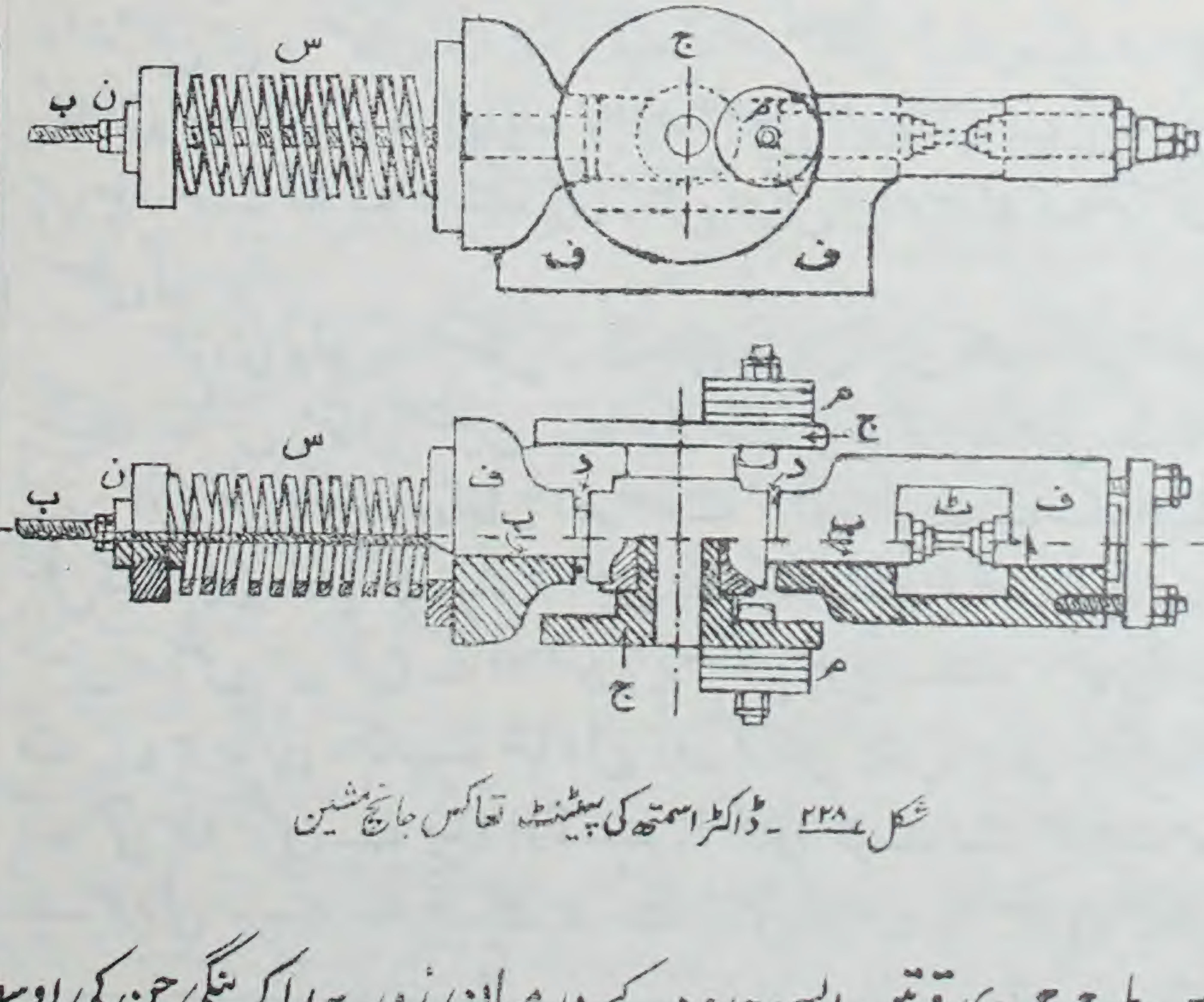
جمودی قوتوں کو استعمال کرنے والی بہترین مشین غالباً ڈاکٹر اسمتھ کی پیٹنٹ متعاکس امتحانی مشین ہے جو کومب[۳]، باربر[۴] اینڈ کمپنی نے بنائی ہے۔ اس مشین کا نقشۂ ارتفاع اور نصف تراشی سطحی خاکے کے ذریعے شکل ۲۲۸ میں دکھایا گیا ہے جو مشین کے ایک حصے کو تعبیر کرتی ہے۔ مشین دراصل اس طرح کے دو حصوں پر مشتمل ہوتی ہے۔ امتحانی ٹکڑے ت میں جو ساکن رہتا ہے متبادل زور گردشی کمیتوں م کی مرکز گریز قوت کے اُفقی جزو ترکیبی سے پیدا ہوتا ہے۔ امتحانی ٹکڑے ت کا ایک سرا ایک مخروطی سرے کے ذریعے جو کٹے (یعنی ٹکڑوں پر مشتمل) ٹھپوں پر

صفحہ

---

[۱] Prof. Osborne Reynolds
[۱] National physical Laboratory [۲] Sir T. Stanton [۳] Combe [۴] Barbour

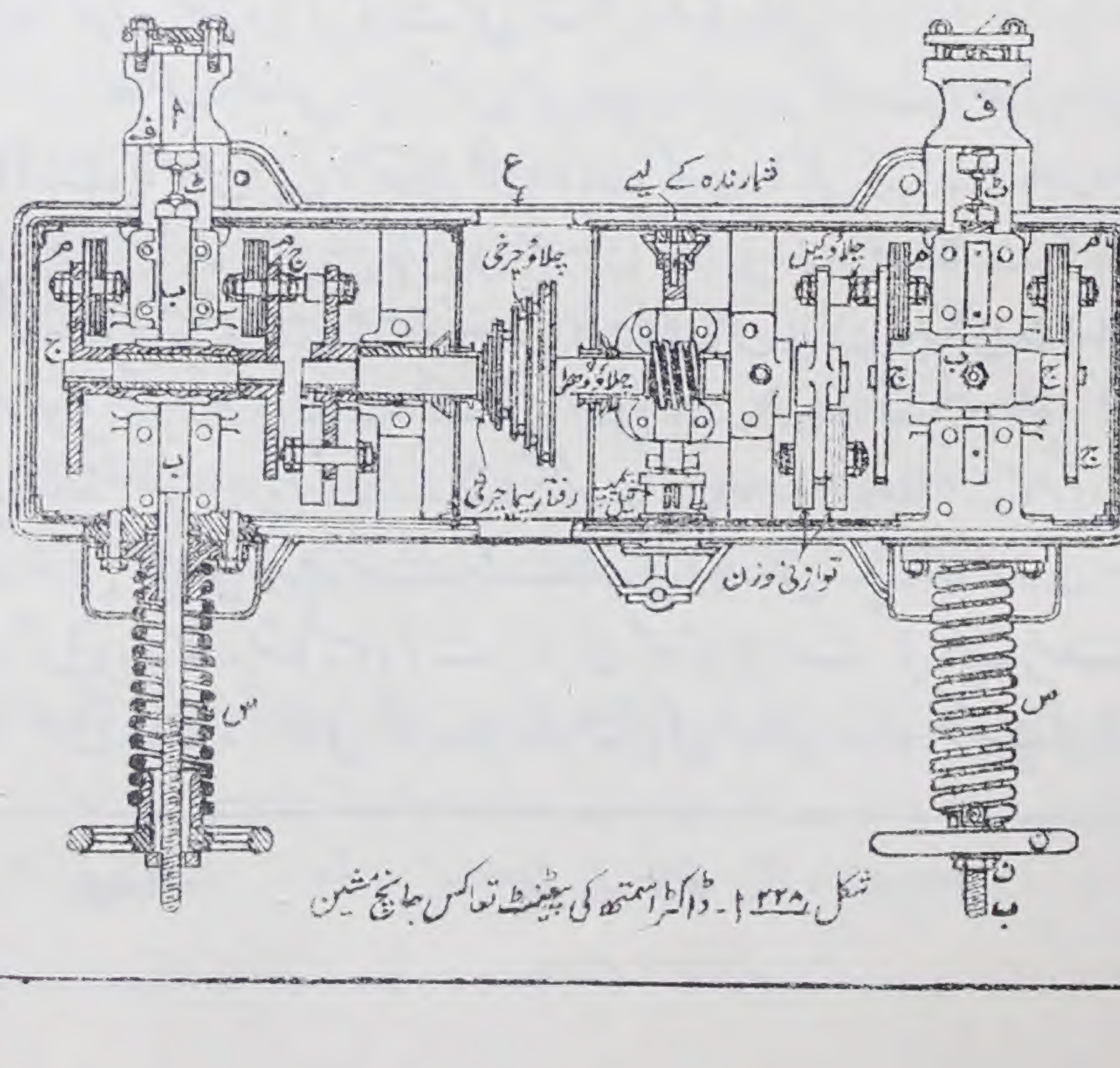
بیٹھتا ہے ٹکڑے ب کو مقفل کیا جاتا ہے جس کا ایک حصہ مُربع تراش کا ہے تاکہ مروڑ کے ممکن ارتعاش کو روکے ۔ ٹکڑا ب گھومتے ٹکڑے ج کے لیے جو کہ کمیتوں م کو حمل کرتا ہے اپنے طول کے علی القوائم ایک طرح کی مسند کا کام دیتا ہے ۔ امتحانی ٹکڑے کا دوسرا سرا ٹکڑے ا کو مقفل ہے جو قوتوں کو فریم تک پہنچاتا ہے ۔ ابتدائی زور سے بچنے کے لیے ت کو پہلے ا کو مقفل کیا جاتا ہے پھر ب کو، اور آخر میں ا کو فریم کے ساتھ مقفل کیا جاتا ہے ۔ د د پر حائلے لگائے گئے ہیں تاکہ امتحانی ٹکڑے کے ٹوٹنے پر مشین کو صدمہ نہ پہنچے ۔ کمانی س اور کسنے والی ڈھبری ن کے ذریعے امتحانی ٹکڑے میں جو ابتدائی زور چاہیں پیدا کر سکتے ہیں۔



شکل ۲۲۸ ـ ڈاکٹر اسمتھ کی پیٹینٹ تعاکس جانچ مشین

اس طرح جمودی قوتیں ایسی حدود کے درمیان زور پیدا کرینگی جن کی اوسط قیمت ضروری نہیں کہ صفر ہو ۔ اس عمل سے زور کی وسعت کا محل بدلیگا مقدار نہیں بدلیگی ۔ گھومتے ٹکڑے ج کو ایک چلاؤ ڈھرے کی حرکت

جو کہ ثابت مسندوں میں گھومتا ہے اور ج کے ساتھ ہم محور ہے ایک کیل کے ذریعے منتقل ہوتی ہے جو چلاؤ دُھرے کو لگی ہوئی ایک تختی کے ایک نیم قطری شگاف میں آسانی کے ساتھ بیٹھتی ہے۔ چلاؤ دُھرا ان دو حصوں کے درمیان رکھا جاتا ہے جن میں سے ایک شکل ۲۲۸ میں دکھایا گیا ہے اور چلاؤ دُھرے کو ایسے توازنی وزن لگائے جاتے ہیں جو مشین کے فریم پر کی قوتوں کو متوازن کریں اور بنیاد کے ارتعاش کو روکیں۔ تمام دائر مسندوں میں تدہین قسری ہوتی ہے۔ معیاری امتحانی ٹکڑا $1\frac{1}{2}$ انچ کے طول تک $\frac{1}{4}$ انچ کے قطر تک خرادا ہوا ہوتا ہے اور بڑے قطر کے کاندھوں کو خوب گول کی ہوئی جیبوں (fillets) کے ذریعے جوڑا جاتا ہے۔ اس طرح کے نمونے میں، گردشی کمیتوں اور کمانی س کی مناسب تبدیلیوں کے ذریعے یہ مشین زور کی حدت تقریباً جن حدود کے درمیان چاہو پیدا کرسکتی ہے صفحہ ۵۱۶ اور تدہین کی حدود کے اندر، نعاکس کی جو رفتار چاہو پیدا کی جاسکتی ہے۔ ایک حقیقی مشین کا ایک منظر شکل ۲۲۸ ا میں دکھایا گیا ہے جس کے اندر



شکل ۲۲۸ ا۔ ڈاکٹر اسمتھ کی پیٹنٹ نعاکس جانچ مشین

حوالے کے حروف وہی ہیں جو شکل ۲۲۸ میں استعمال کیے گئے ہیں۔

برقی مشین ـــــ حال میں بہت سی مشینیں ایسی بنائی گئی ہیں جن میں امتحانی ٹکڑے پر زور لگانے کے لیے ایک برقی مقناطیس کی قوت استعمال کی جاتی ہے۔ یہ مشینیں اعلیٰ تعدد پیدا کرنے کی قابلیت رکھتی ہیں جو بعض صورتوں میں ۷۰۰۰ فی منٹ سے زیادہ ہوتا ہے۔

برقی مشینیں بہت مختلف ہوتی ہیں۔ ھیے^ہ کی مشین میں، جو اب راست زور کے تھکن کے امتحانات کے لیے عام طور پر استعمال ہوتی ہے، متبادل کھینچ کی قوت بالراست لگائی جاتی ہے جو ایک طبق دار آہنی آرمیچر (armature) پر ایک متبادل مقناطیسی بہاؤ سے پیدا ہوتی ہے۔ اس صورت میں اُن تمام کمیتوں کی جمودی قوتوں کا معاوضہ کرنا پڑتا ہے جو امتحانی ٹکڑے کو لگی ہوں اور اس کے ساتھ (خفیف) حرکت کریں تاکہ نمونے میں صرف ایک معلومہ موثر قوت باقی رہے۔ یہ معاوضہ کمانیوں کے ذریعے کیا جاتا ہے جو فساد کی حالت میں اپنی قوت کے ذریعہ متحرک کمیتوں کی قوت کی تعدیل کرتی ہیں۔

ھاپ کنسن کی مشین میں ایک بہت مختلف اصول اختیار کیا جاتا ہے۔ اس میں امتحانی ٹکڑا ایک کمانی کا عمل کرتا ہے اور اس کو لگی ہوئی مقابلتاً بڑی کمیتوں کی جمودی قوتوں سے زور لگانے کا کام لیا جاتا ہے۔ کمیتیں اس طرح ترتیب دی جاتی ہیں کہ ان کی طبعی مدت ارتعاش جو امتحانی ٹکڑے کی لچک کے تابع ہوتی ہے تقریباً مقناطیسی کھینچ کی مدت کے ساتھ منطبق ہوتی ہے۔ تب گمک (Resonance) کے معروف اصولوں کے مطابق کھینچ کی قوت بہت بڑے قسری ارتعاش اپنے^ا تعداد کے ساتھ پیدا کرتی ہے۔ مقناطیسی قوت زور کی مجموعی وسعت کی ایک بہت چھوٹی کسر ہوتی ہے۔ امتحانی ٹکڑے کے طول کی تبدیلی سے حرکت کی جو وسعت صفحہ ۵۱۷

---

^ہ Haigh

^ا محافظ

پیدا ہوتی ہے وہ ناپ لی جاتی ہے اور اس سے زور محسوب کیا جاتا ہے ایک تو سادہ موسیقی طور پر حرکت کرتی ہوئی کمیتوں کی اسراعی قوتوں سے، دوسرے امتحانی ٹکڑے کے لچکدار فساد کے ذریعے جس کو معلومہ سکونیاتی قوتوں کی رقوم میں تعبیر کیا جاتا ہے۔ دوسرے طریقے سے جو نتائج حاصل ہوتے ہیں وہ پہلے کے مقابلے میں التزام کے ساتھ کم ہوتے ہیں اور اس کی وجہ غالباً ناقص لچک ("پس ماندگی") ہے۔

اسٹرامیئر[ه] کی مشینیں —— خماؤ کے امتحانات میں ایک گھومتا ہوا برآمدہ بیرم استعمال کیا گیا اور مروڑ کے امتحانات میں اُڑیہیوں کو ایک گردشی اہتزاز دے کر نمونے پر ایک مروڑ کا جمودی بوجھ لگایا گیا۔

اسٹرامیئر کے آلے کی سب میں نمایاں خصوصیت وہ حرارہ پیمائی ترکیب تھی جو تھکن کے زور کی حد دریافت کرنے کے لیے استعمال کی گئی۔ اگر ایک کامل لچکدار دھات کے ٹکڑے پر باری باری سے مساوی تناؤ اور فشار لگایا جائے تو تپش میں کوئی اضافہ نہیں ہوگا۔ لیکن زور جونہی کہ پیکر پذیر مغلوبیت پیدا کرے یا صرف لچکدار پس ماندگی (دیکھو دفعہ ۵۲) ہی پیدا کرے تو توانائی صرف ہوتی ہے اور حرارت پیدا ہوتی ہے۔ اس لیے اسٹرامیئر نے اپنے نمونوں کو ایک ربڑ کے غلاف میں رکھا جس میں سے پانی کی ایک رَو گزرتی تھی۔ نازک تپش پیماؤں کے ذریعے معلوم کیا گیا کہ اس دَورانی پانی کی تپش میں کب اضافہ ہوتا ہے اور اس طرح تھکن کی حد معلوم کی گئی۔ بعد میں گاف[ل] نے امتحانی ٹکڑے کی تپش کے اضافے کو مشاہدہ کرنے کے لیے برقی ذرائع اختیار کیے (دیکھو دفعہ ۵۰)۔

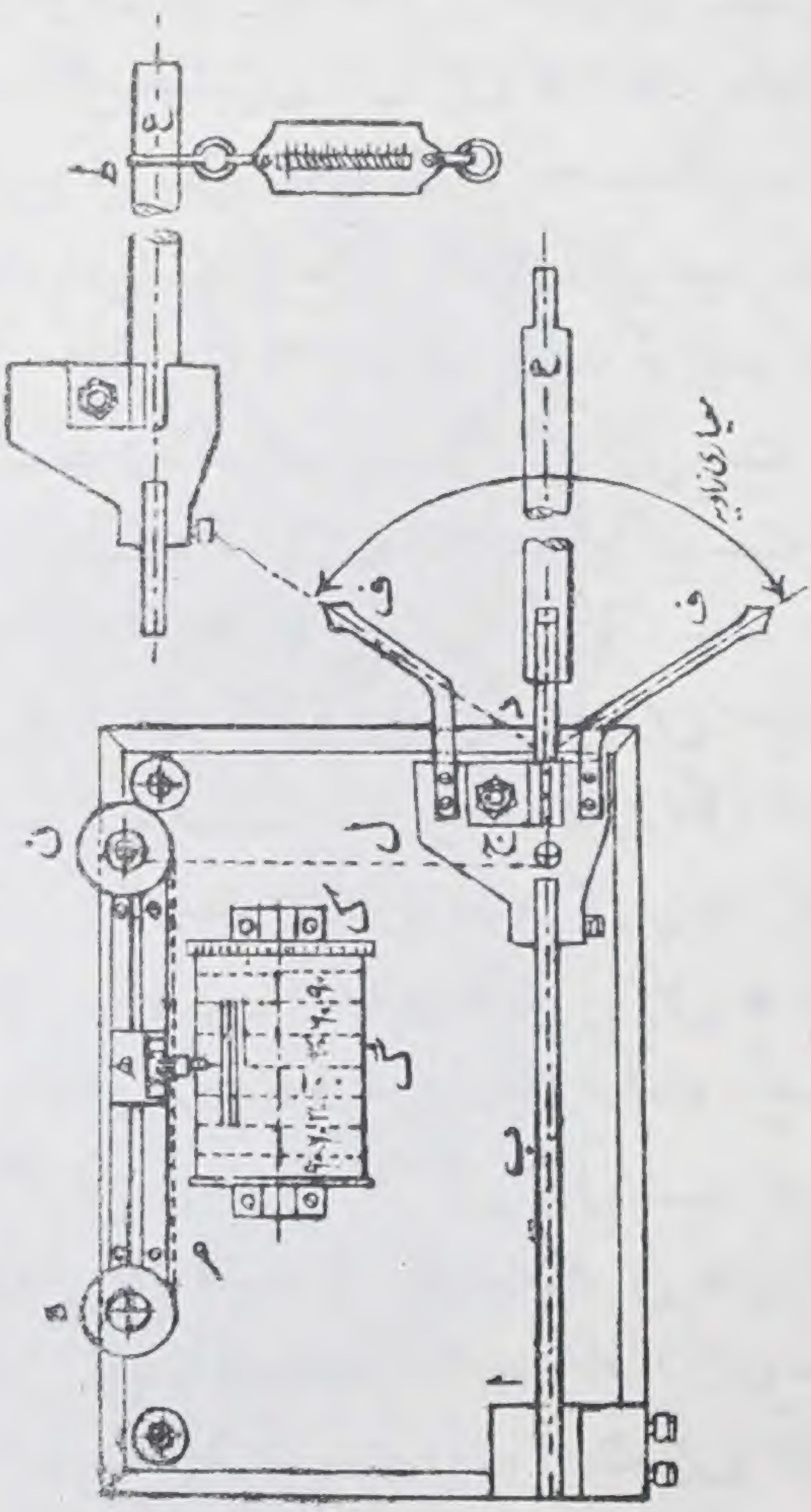
پروفیسر آرنلڈ[ط] کی جانچ مشین —— اس مشین میں ایک سلاخ

[ه] Stromeyer [ل] Gough [ط] Prof. Arnoid

جس کا قطر $\frac{۳}{۸}$ انچ ہوتا ہے ایک سرے پر مضبوطی کے ساتھ نصب یعنی دربستہ کی جاتی ہے اور ایک متکافی غواص کے ذریعے ایک شگاف میں جس میں سے نمونہ گزرتا ہے نمونے پر اِدھر سے اُدھر اُدھر سے اِدھر تکراری خماؤ لگایا جاتا ہے۔ پروفیسر آرنلڈ نے اپنے امتحانوں میں تعاکس کی شرح ۶۵۰ فی منٹ اور شگاف دار غواص کے خطِ ضرب اور اعظم خماؤ کے زور کے مستوی کے (یعنی اس مقام کے جہاں نمونہ شکنجے میں داخل ہوتا ہے) درمیان ۳ انچ کے فاصلے کو معیار قرار دیا ہے۔ غواص کے خطِ ضرب میں نمونے کا انصراف غیر منصرف محل کے دونوں جانب $\frac{۳}{۸}$ انچ ہوتا ہے۔ انصراف معین ہو تو لچک کی حدود کے اندر خماؤ کے زور کی حدت مختلف اشیا میں ینگ کے مقیاس کے متناسب ہوگی۔ لیکن دراصل لچک کی حد سے تجاوز ہوتا ہے اور زور کی حدت نامعلوم ہوتی ہے۔ البتہ اتنا کہا جاسکتا ہے کہ مختلف اشیا کے لیے مختلف ہوگی۔ پیمائش جس چیز کی کی جاتی ہے وہ شکستگی تک تعاکسوں کی تعداد ہے اور پروفیسر آرنلڈ نے اس چیز کو مختلف فولادوں کے وصف کا اور استعمال میں صدمات کے تحت شکستگی کی مزاحمت کی قابلیت کا ایک قابلِ اعتبار پیمانہ پایا ہے۔ صفحہ ۵۱۸

یہ امتحان وولر، اسمتھ اور اسٹینٹن کے امتحانات سے بالکل الگ ہے۔ ان کے امتحانات کا مقصد زور کی وہ وسعت معلوم کرنا ہوتا ہے جو کوئی شے دئے ہوئے حالات کے تحت شکستگی کے بغیر بے انتہا بار برداشت کرسکے۔ اور یہ پیمائش چونکہ ایک انتہائی قیمت ہوتی ہے اس لیے قدرتی طور پر اس کو بہت تیزی کے ساتھ انجام نہیں دیا جاسکتا۔ پروفیسر آرنلڈ کے امتحانات میں تعاکسوں کی تعداد کبھی ۲۰۰۰ تک نہیں پہنچتی اور اس طرح مطلوبہ وقت ۳ منٹ فی نمونہ سے بھی کم ہے۔ تعاکس کنے امتحان کی مشینوں میں بھی امتحان میں سرعت پیدا کی جاسکتی ہے اور وہ اس طرح کہ زور کی ایک اعلیٰ وسعت اختیار کی جائے۔ پروفیسر آرنلڈ کے امتحان سے جو باتیں واضح ہوتی ہیں ان میں سے ایک یہ ہے کہ ایک بڑی

گھڑائی (forging) کے مختلف حصوں کا وصف مختلف ہوتا ہے۔ امتحانی ٹکڑا اتنا چھوٹا لینے کی وجہ سے اِن اختلافات کی تحقیق ممکن ہوتی ہے۔



شکل ۲۲۹ سینکی کی دستی خماؤ کی مشین

سینکی[۵] کی دستی خماؤ کی مشین ـــــ کسی شے کا وصف معلوم کرنے کے لیے ایک عام کارگاہی امتحان (Workshop test) یہ ہے کہ ایک ٹکڑے کو ایک خاص زاویے میں اِدھر سے اُدھر اُدھر سے اِدھر موڑا جائے

---

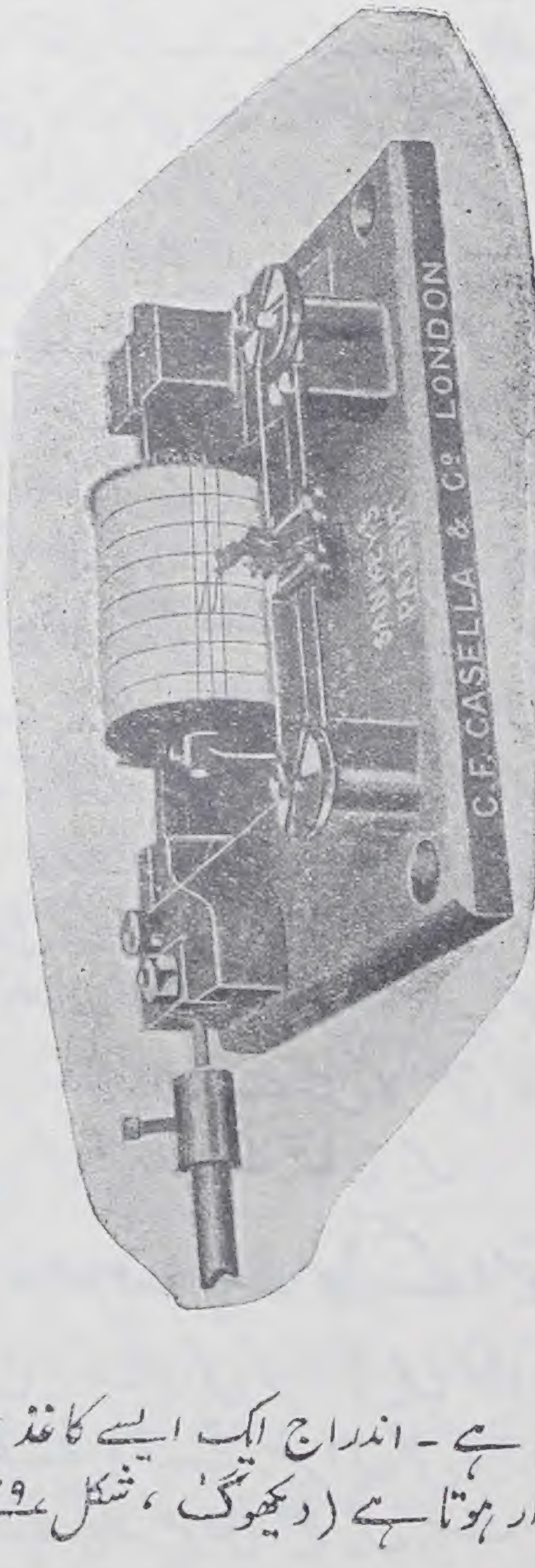
۵ Sankey

یہاں تک کہ شکستگی واقع ہو۔ وصف کا اندازہ اس سے ہوگا کہ نمونے کو شکستگی
تک کتنے بار موڑا گیا۔ کیپٹن سینکی نے یہ امتحان کرنے اور موڑنے کے
عمل کی تعداد کے قلم بند ہونے اور دیگر اطلاعات کے لیے ایک چھوٹی دستی
مشین نکالی ہے۔ شکل ۲۲۹ میں اس مشین کا انتظام دکھایا گیا ہے۔ یہ
کیسلا اینڈ کمپنی کی بنائی ہوئی ہے۔ نشست تختی کے ایک کونے میں
ایک گرفت ا ہے جس سے ایک چپٹی فولادی کمانی ب کے ایک سرے کو
پکڑا جاسکتا ہے۔ کمانی کے دوسرے سرے کو ایک گرفت ج لگی ہوئی
ہے جو امتحانی ٹکڑے د کے ایک سرے کو بھی پکڑتی ہے۔ امتحانی ٹکڑے کا
دوسرا سرا ایک لمبے دستے ع میں نصب کیا گیا ہے جس کے ذریعے صفحہ ۵۱۹
اس کو آگے پیچھے ایک مقررہ زاویے میں موڑا جاتا ہے۔ یہ زاویہ منظہار
ف سے معلوم ہوتا ہے۔ خماؤ کی سعی کو یعنی اس معیار کو جو امتحانی ٹکڑے
د کو مقررہ زاویے میں موڑنے کے لیے دستے پر لگانا ضروری ہے اس
انصراف سے ناپا جاتا ہے جو کمانی ب میں پیدا ہوتا ہے۔ یہ انصراف
ڈھول گ پر لگائے ہوئے اندراجی کاغذ پر پنسل ھ کی اُفقی حرکت سے
درج ہوتا ہے۔ کمانی کے آزاد سرے کی حرکت ایک فولادی پٹی ل
کے ذریعے ایک تضعیفی چرخی ن کو منتقل ہوتی ہے اور پھر ایک فولادی پٹی
م کے ذریعے جو کمانی دار ڈبے ی کے ذریعے تنی ہوئی رکھی جاتی ہے یہ
حرکت پنسل ھ کو منتقل ہوتی ہے۔ جب خماؤ دائیں سے بائیں کو ہو تو
پنسل کاغذ کے وسط کے صفر خط سے ایک سمت میں حرکت کرتی ہے اور
بائیں سے دائیں کو ہو تو مخالف سمت میں۔ اور دونوں صورتوں میں صفر
خط سے پنسل کا طے کردہ فاصلہ اُس مزاحمت کے متناسب ہوگا جو امتحانی ٹکڑا
د خماؤ کی کرے۔ پنسل کے حامل کی حرکت ڈھول کو ہر ایک موڑ کے بعد
ایک (ratchet) کتا پہیے ک کے ایک دانت کے بقدر آگے بڑھاتی ہے

۵۰ Captain Sankey

۵۱ Messrs C. F. Casella & Co

اور اس طرح ایک خودنویسی نقشہ پیدا ہوتا ہے جس کی نوعیت جزوی طور پر شکل ۲۲۹ میں ڈھول گ پر دکھائی گئی ہے ۔ مشین کی ایک مجموعی ہیئت



شکل ۲۳۰ ۔ سینکی کی دستی خاؤکی مشین

شکل ۲۳۰ میں دکھائی گئی ہے ۔ اندراج ایک ایسے کاغذ پر کیا جاتا ہے جو پونڈ فٹ میں درجے دار ہوتا ہے (دیکھو گ ، شکل ۲۲۹) ۔ کمائی

ب کے آزاد سرے کو گرفت ا پر مناسب طور پر ترتیب دیا جاتا ہے۔
تعبیر اس طرح کی جاتی ہے کہ بیرم ع کو معکوس کرتے ہیں جس کے بیرونی سرے کا ایک حصہ چھوٹا کر دیا گیا ہے تاکہ ج میں بیٹھ سکے اور ایک کمانی دار ترازو کے ذریعے، جس کا حلقہ ایک نالی ط میں رکھا جاتا ہے، وہ کھینچ معلوم کرتے ہیں جو امتحانی ٹکڑے کے مڑنے کے نقطے سے ۳ فٹ کے فاصلے پر عمل کر کے پنسل کو اندراجی کاغذ کے کسی خاص درجے پر لائے یعنی ظاہر ف کا معیاری یا مقررہ زاویہ دو نیم قطری ہے۔ اس طرح وہ توانائی جو ایک پورے موڑ میں (مثلاً بائیں سے دائیں کو) جذب ہو فٹ پونڈوں میں اس طرح حاصل ہوگی کہ خماؤ کے معیار (پونڈ فٹ) کو ۲ سے ضرب دیا جائے۔ صفحہ ۵۲۰
چونکہ شے تقریباً پیکر پذیر ہوتی ہے اور چونکہ ڈھول پر ایک موڑ کے بعد ایک مساوی فاصلہ آگے بڑھتا ہے اس لیے نقشے کے تمام خطوط کے بیرونی سروں کو ملانے والے خط سے گھرنے والا رقبہ اُس مجموعی توانائی کے متناسب ہوگا جو ٹکڑے کی شکستگی تک جذب ہو اور اس کا پیمانہ اندراجی گیرے پر منحصر ہوگا۔ مشین جن چیزوں کو خاص طور پر بتاتی ہے وہ یہ ہیں ایک تو موڑوں کی تعداد جو تمدد کا ایک ناپ ہے۔ دوسرے وہ خماؤ کا معیار جو پہلے موڑ کے لیے ضروری ہے جو نقطۂ مغلوبیت کا ناپ سمجھا جاسکتا ہے تیسرے شکستگی تک موڑوں میں جذب شدہ توانائی جس کو وصف کا ایک کسی طرح کا ناپ سمجھا جاسکتا ہے۔ اس کی صحیح تعبیر اور اُن مقداروں سے اس کا تعلق جو سکونیاتی تنشی امتحان سے حاصل ہوتی ہیں ابھی امتحان کے محتاج ہیں۔

۱۸۳۔ صرف ایک موڑ کے امتحانات ـــــ تعمیری فولاد کا

ایک عام امتحان یہ ہے کہ اس کو ۱۸۰° میں موڑا جائے۔ اگر دھات کا ایک چپٹا ٹکڑا ٹوٹے یا تڑخے بغیر اس عمل کو برداشت کرے تو یہ اس کے تمدد کا ثبوت ہے کیونکہ بیرونی سطح میں بہت خاصا تطول واقع ہوتا ہے۔

مروڑ کے امتحان کی اکثر مختلف تپشوں پر تخصیص کی جاتی ہے۔ معمولی کرۂ ہوائی کی تپش پر اس کو سرد موڑنے کا امتحان کہا جاتا ہے۔ بعض اوقات موڑنے کے امتحان کی لوہے اور فولاد کے لیے سرخ حرارت کے لیے یا نیلی حرارت کے لیے تخصیص کی جاتی ہے جب کہ ریتی سے تازہ گھسی ہوئی سطح نیلا رنگ اختیار کرتی ہے۔

آب دے کر موڑنے کے امتحان کے نام سے یہ تعمیری فولاد میں بھی ایسے ٹکڑوں پر کیا جاتا ہے جو سرخ دموی حرارت تک تپائے جاتے ہیں اور پھر ۸۰°ف سے کم تپش کے پانی میں بجھائے جاتے ہیں۔ اگر خماؤ کے امتحان کے چپٹے امتحانی ٹکڑوں کو مختلف شکلوں کی تراش کے ٹکڑوں سے کتر کر لیا گیا ہو تو دستور ہے کہ کترے ہوئے کناروں کو مشین کیا جائے یا گھس لیا جائے تاکہ وہ مادّہ دور ہو جائے جو کترے جانے کی وجہ سے سخت ہو گیا ہو۔ خماؤ کے امتحانات میں خماؤ کے زاویے کے متعلق دستور یکساں نہیں۔ بعض اوقات نمونے کو بالکل بند کر دیا جاتا ہے جس سے دونوں متوازی چہرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، اور بعض اوقات دونوں متوازی چہروں میں کچھ فاصلہ رہتا ہے جو موڑ کے ایک مخصوص اندرونی نصف قطر انحنا کا دگنا ہوتا ہے۔ برطانوی معیاروں کی مجلس نے تعمیری فولاد کے لیے یہ تخصیص کی ہے کہ امتحانی ٹکڑے کو شکستگی کے بغیر دوہرا ہو جانا چاہیے یہاں تک کہ اندرونی نصف قطر امتحانی ٹکڑے کی موٹائی کے $\frac{1}{2}$ اگنے سے زیادہ نہ ہو اور پہلو متوازی ہوں۔ امتحانی ٹکڑا $1\frac{1}{2}$ انچ سے کم چوڑا نہیں ہونا چاہیے۔

خماؤ کا امتحان دباؤ کے ذریعے یا ضربات کے ذریعے کیا جا سکتا ہے۔ ضربات کے طریقے میں صرف معمولی کارخانہ (workshop) کے آلات استعمال کیے جاتے ہیں۔ اس طرح یہ امتحان بہت عام اور ساتھ ہی بہت عمدہ ہے۔ جو بٹواں لوہا یا فولاد ۱۸۰° میں تہ ہو جائے اور اندرونی نصف قطر انحنا صفر ہو وہ بلاشبہ اعلیٰ وصف کا ہے۔ اس سے گھٹیا دھات کے لیے

بعض اوقات اس زاویے کو وصف کا ایک پیمانہ سمجھا جاتا ہے جس میں یہ شکستگی تک موڑی جا سکے۔

۱۸۴۔ سختی کے امتحانات —— سختی کی بہترین تعریف غالباً یہ ہوگی کہ یہ دوسرے اجسام کو اپنے اندر گھُسنے نہ دینے کی خاصیت ہے۔

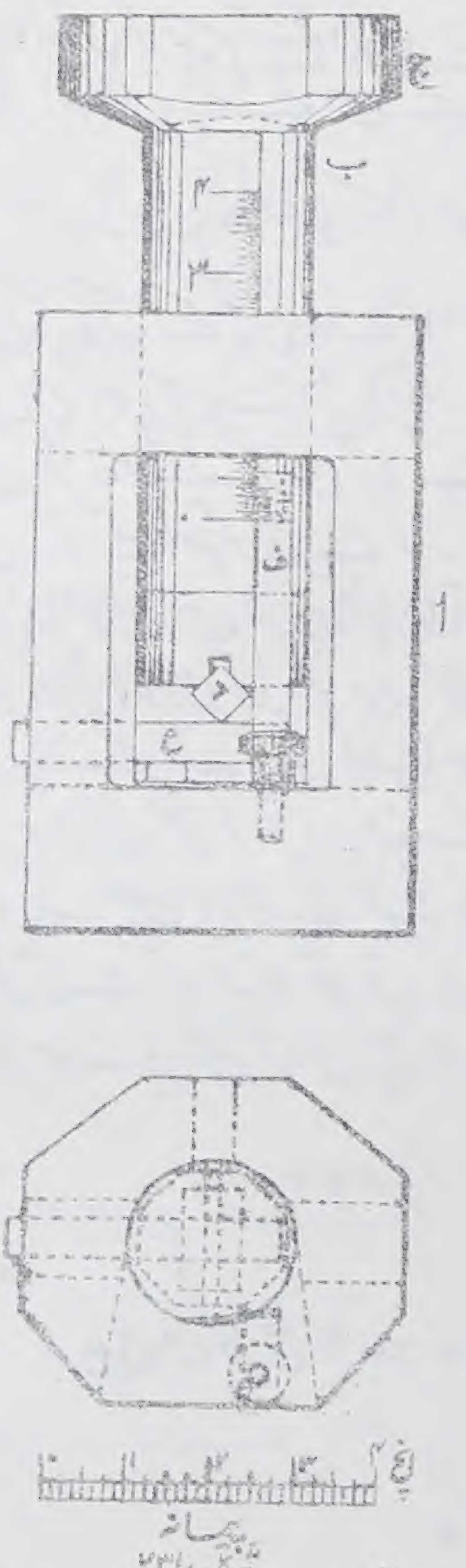
سختی کو دریافت کرنے کے لیے جو مختلف امتحانات وضع کیے گئے ہیں وہ دو قسم کے ہیں اُن کو کھانچا سازی (Indentation) کے امتحانات اور چھیلنے یا کھرچنے کے امتحانات کہا جا سکتا ہے۔ کھانچا سازی کے امتحانات کے لیے مختلف شکلوں کے سُنبے یا کھانچہ ساز اوزار بنائے گئے ہیں اور پیمائش کے مختلف طریقے اختیار کیے جاتے ہیں۔ ایک دیے ہوئے سکونی دباؤ سے یا ایک خاص بلندی سے گرنے والے خاص وزن سے پیدا ہونے والے کھانچے کی گہرائی یا سطحی رقبہ یا حجم ناپا جا سکتا ہے، یا اُس دباؤ یا ضرب کو ناپ سکتے ہیں جو ایک مختص کھانچے کو پیدا کرنے کے لیے درکار ہو۔ سختی کے امتحانات میں کھانچے والے طریقے میں ایک خرابی یہ ہے کہ تمام سُنبے یا کھانچہ ساز اوزاروں میں ایک ہی درجے کی سختی پیدا کرنا مشکل ہے۔ سختی کے امتحان کا ایک طریقہ جو ممالک متحدہ امریکہ کے سررشتۂ توپ سازی میں اختیار کیا گیا یہ تھا کہ ایک مخروطی شکل کے ایک سُنبے کو جس کی تراش ایک معین ہے جس کا ایک وتر بہت بڑا اور ایک بہت چھوٹا ہے ایک خاص وزن کو ایک خاص بلندی سے گرا کر ضرب پہنچائی گئی۔ اس سے جو کھانچا پیدا ہوا اس کے حجم کو اضافی سختی کے درجے کے بالعکس متناسب مانا گیا۔ یہ حجم اس مخروطی شکل کے جوف کے خطی العاد کے مکعب کے متناسب ہوگا اور کھانچہ ڈالی ہوئی (indented) مستوی سطح پر معین کے بڑے وتر کو ناپنے کے بعد حجم کو محسوب کر سکتے ہیں۔ صفحہ ۵۲۱

الون کا سختی کا امتحان —— اس امتحان میں ایک غواص ب

(شکل ۲۳۱) جو ایک قائد بلاک ا میں ڈھیلا بیٹھتا ہے ایک کھانچہ ساز اوزار د کو دباؤ پہنچاتا ہے اور د ایک سختایا ہوا اور گھسا ہوا فولاد کا ٹکڑا ہے جس کی تراش $\frac{۳}{۸}$ انچ مربع ہے اور طول $۲\frac{۱}{۲}$ ہے اور یہ چھوٹے چپٹے امتحانی ٹکڑے ع میں کھانچا ڈالتا ہے۔ غواص ب کی نیچوار حرکت ایک پھسلواں پیمانے سے ناپی جاتی ہے جو ب کو لگا ہوا ہے اور اس کو کسر پیما ف کے ذریعے پڑھا جاتا ہے جو فریم کو نصب ہے۔ آلہ ایک معمولی امتحانی مشین کی فشاری تختیوں کے بیچ میں استعمال کیا جاتا ہے۔ سر ج کا جوڑ غواص ب کے ساتھ کردی ہے۔ ایک علیحدہ امتحان کے ذریعے آلے کا فشار معلوم کرکے اس کی رعایت رکھی جائے تو پیمانے کے مقروؤں سے کھانچے کی گہرائی معلوم ہوگی۔ اُنون نے فی انچ چوڑائی جو مختلف دباؤ د لیے اُن کے لیے کھانچہ حسبِ ذیل قانون کا پابند ثابت ہوا:

$$\frac{د}{غ} = مں$$

صفحہ ۵۲۲



شکل ۲۳۱

(اُنون کی کتاب "اشیاء کے امتحان" سے)

جہاں خ کھانچے کی گہرائی ہے اور س ایک عدد ہے جو سختی کو تعبیر کرتا ہے۔ قوت نما ن کسی خاص شے کے لیے اس طرح معلوم کیا جاتا ہے کہ د اور خ کے لوکارثموں کو ترسیم کرتے ہیں۔ اس کی قیمت نرم فولاد کے لیے ۲،۱ ہے اور دیگر دھاتوں کے لیے اس سے زیادہ مختلف نہیں۔

بری نل کا سختی کا امتحان[ہ] —— تمام نوکدار کھانچا ساز اوزاروں میں ان کی نوک کے گھس جانے کا احتمال ہے اور نوک کے گھس جانے سے امتحانوں پر اس کا بہت اثر پڑیگا۔ اس لیے کھانچہ پیدا کرنے کے لیے بہترین چیز غالباً ایک کروی گولا ہے۔ یہی شکل مسٹر بری نل نے اپنے امتحان کے لیے اختیار کی ہے اور ان کا طریقہ غالباً سب سے زیادہ مستعمل ہے۔ یہ امتحان اس طور پر کیا جاتا ہے کہ ایک خاص جسامت کی سختائی ہوئی فولادی گولی کو زیر امتحان شے کی ایک مسطح سطح میں ایک خاص دباؤ کے تحت بزور گھسایا جاتا ہے اور کھانچے کے قطر کو ناپا جاتا ہے۔ بری نل سختی کو اس جوف کے رقبے کے بالعکس متناسب مانتا ہے جو ایک معین دباؤ کے تحت ایک معین جسامت کی گولی سے پیدا ہو۔ اگر گڑھے کے منہ کا قطر ق ہو اور گولی کا نصف قطر ر اور مجموعی دباؤ د ہو تو جوف کی منحنی کروی سطح کا رقبہ

$$۲\pi ر \left(ر - \sqrt{ر^{۲} - \frac{ق^{۲}}{۴}} \right)$$

ہوگا اور

$$\text{بری نل کا سختی کا عدد} = \frac{\text{مجموعی دباؤ}}{\text{گڑھے کا منحنی رقبہ}}$$

$$= \frac{د}{۲\pi ر \left(ر - \sqrt{ر^{۲} - \frac{ق^{۲}}{۴}} \right)}$$

ہ Brinell

اگر د اور ر معین ہوں تو یہ عدد صرف ق پر منحصر ہوگا۔گولی کا دستوری قطر ۱۰ ملی میٹر (ر = ۵ ممر) ہے اور د = ۳۰۰۰ کیلوگرام رکھا جاتا ہے۔ گڑھے کے قطر ق کو عموماً ایک خردبین کے ذریعے ۱/۲۰ ممر تک پڑھا جاتا ہے، اور سختی کا عدد ایک جدول سے حاصل کیا جاتا ہے۔ د کی مختلف قیمتوں سے سختی کے عدد بھی مختلف حاصل ہوتے ہیں۔ غالباً اگر د کی بجائے دن لیا جائے جہاں ن ایک دی ہوئی شے کے لیے مستقل ہے تو مختلف دباؤں سے سختی کا عدد مستقل حاصل ہوگا لیکن سختی کا "معیاری" بری نل (Brinell) عدد وہ ہے جو اوپر کے ضابطے سے ۱۰ ممر کی گولی اور ۳۰۰۰ کیلوگرام کے دباؤ (د) سے حاصل ہو۔

جامعۂ اپسالہ[ب] کے مسٹر بینی ڈکس[ا] نے معلوم کیا ہے کہ اگر بری نل عدد کو گولی کے نصف قطر کے پانچویں جذر سے ضرب دیا جائے تو مختلف جسامتوں کی گولیوں سے ایک ہی عدد حاصل ہوگا یعنی۔

$$\text{بینی ڈکس کا سختی کا عدد} = \frac{\text{مجموعی دباؤ}}{\text{گڑھے کا منحنی رقبہ}} \times \sqrt[5]{ر}$$

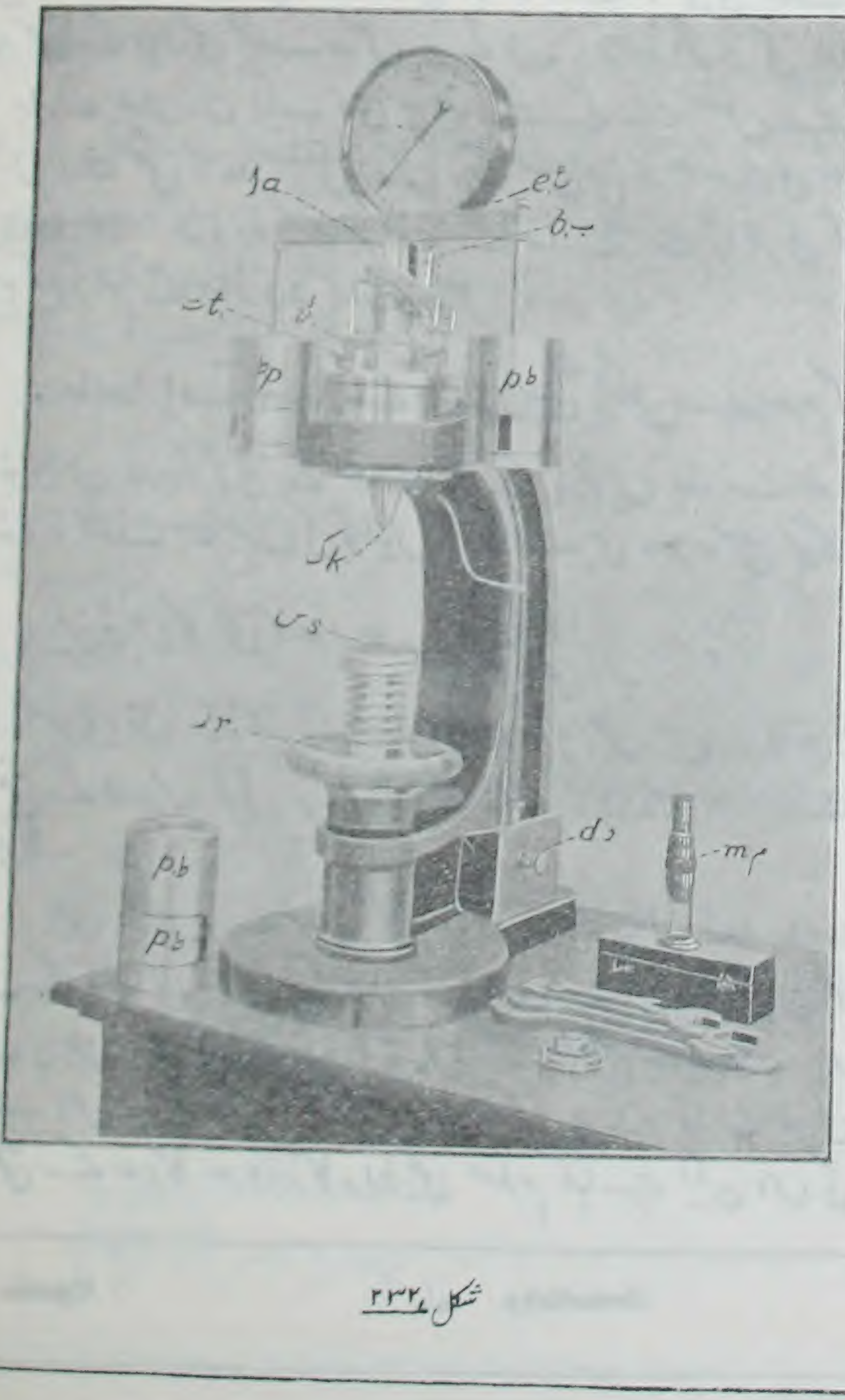
بری نل کے سختی کے معیاری عدد کو (جس میں ر = ۵) بینی ڈکس کے سختی کے عدد میں تحویل کرنے کے لیے صرف $\sqrt[5]{5}$ یعنی ۱٫۳۸ سے ضرب دینا ہوگا۔

صفحہ ۵۲۳

بینی ڈکس نے مختلف عملی دباؤں سے حاصل شدہ عددوں کو دباؤں کے بالمقابل ترسیم کرکے معلوم کیا کہ دو اشیا کے درمیان مختلف دباؤں پر ان کے سختی کے عددوں میں ایک مستقل نسبت ہوتی ہے۔ اس نے مختلف دباؤں پر حاصل ہونے والے بری نل کے سختی کے عدد کا اور دباؤ کا ربط بھی معلوم کیا ہے لیکن اس کی کوئی

ا Benedicks   ب Upsala

صفحہ ۵۱۴ ایسی اہمیت نہیں کیونکہ ...۳۰ کیلوگرام کے معیاری دباؤ پر کام کرنے میں کوئی دِقّت نہیں۔



شکل ۲۳۲

بمقام سٹاک ہام[ے] کے مسٹر ڈِل نر[۱] نے سویڈنی فولادوں کے سختی کے عدد میں اور تنشی استحکام میں ربط کاربن کے جزو کی ایک بڑی وسعت کے لیے معلوم کیا ہے۔ اُنھوں نے سختی کی بڑی وسعتوں کے لیے ایک نمایاں مماثلت پائی ہے۔ چنانچہ جن فولادوں کا سختی کا عدد ۱۷۵ سے کم ہو اُن کا تنشی استحکام ٹن فی مربع انچ میں ۳٫۳ فی صدی کی اوسط غلطی کے ساتھ اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ اگر کھانچا لڑھکنے کی سمت کے علی القوائم کیا گیا ہو تو سختی کے عدد کو ۰٫۲۳۰ سے اور لڑھکنے کی سمت میں ہوا ہو تو ۰٫۲۲۵ سے ضرب دیا جائے۔ چارپی[۲] نے اسی طرح کا نتیجہ فرانسیسی فولادوں کے لیے معلوم کیا ہے۔ اس طرح سختی کے امتحان سے ایک بہت سہل طریقہ اس کا ہاتھ آتا ہے کہ فولاد کے تنشی استحکام کا معمولی تنشی امتحانی ٹکڑا تیار کرنے کا صرفہ برداشت کیے بغیر ایک چھوٹے سے نمونے سے تقریبی اندازہ حاصل کیا جائے۔ بعض صورتوں میں ایک چھوٹا نمونہ علٰحدہ کرکے امتحان کرنے کی بجائے اصلی شے پر ہی امتحان کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح کا امتحان اور اس کے ساتھ تصادم کا امتحان (دفعہ ۱۸۵) مل کر تمدد کی ایک جانچ کے طور پر کارخانوں (workshops) میں خاصے مقبول ہوئے ہیں۔

سختی کے امتحان کی مشینیں ——— اشکال ۲۳۲ اور ۲۳۳

میں بریِ نل کی سختی کے امتحان کی مشین دکھائی گئی ہے جو ایکٹی بولاگٹ الیفا[۳] اور جیکمین[۴] کمپنی کی بنائی ہوئی ہے۔ گولی ک ایک فشارے کی نچلی جانب لگی ہوئی ہے جس کے اوپر تیل کا ضروری دباؤ ڈالا جاتا ہے۔ ریتی سے گھسا ہوا نمونہ جس کا امتحان کرنا ہے استادہ س پر رکھا جاتا ہے اور ہتھ پہیہ ر کے ذریعے اُٹھایا جا کر گولی کے ساتھ تماس میں لایا

ے Stockholm — ۱ Dillner — ۲ Charpy

۳ Aktiebolaget Alpha — ۴ Messrs J. W. Jackman

جاتا ہے (شکل ۲۳۲ء) ۔ تب کواڑی د (شکل ۲۳۳ء) جو فشارے کے بالائی
رُخ کو تیل کے خزانے سے جوڑتی ہے بند کر دی جاتی ہے اور دباؤ ایک
چھوٹے دستی پمپ کے ذریعے پیدا کیا جاتا ہے۔ جونہی کہ مطلوبہ ۳۰۰۰ کیلوگرام
کا (مجموعی) دباؤ پیدا ہو جائے یہ واقعہ نہ صرف داب پیما سے ظاہر ہو جاتا
ہے بلکہ اُس چھوٹے بالائی فشارے کے اوپر اُٹھ آنے سے بھی جو آڑی سلاخ
ع کو اور ضروری (ترتیب پذیر) مردہ بوجھوں ط کو حمل کرتا ہے۔ اور اس طرح
دباؤ کا اور زیادہ بڑھنا رُک جاتا ہے اور صحیح دباؤ حاصل ہوتا ہے۔ فشارہ
بغیر کسی بھرتی کے چُست بیٹھا ہوا ہے جس کی وجہ سے رگڑ ساقط ہو جاتی
ہے۔ اگر فشارے کے پاس سے تیل کی تراوش واقع ہو تو وہ ایک نلی
کے ذریعے قابلہ د کو جاتی ہے جہاں سے اس کو قیف ت کے ذریعے
خزانے میں اُنڈیل دیا جاتا ہے۔ امتحان کے بعد کواڑی د کھولی جاتی
ہے اور فشارہ مرغولی کمانی کے ذریعے، جو فشارے کے اوپر دکھائی گئی
ہے، اپنے ابتدائی محل میں واپس آتا ہے۔ گولی سے جو نقش بنتا ہے
اس کو خُردبین م کے ذریعے ناپا جاتا ہے۔

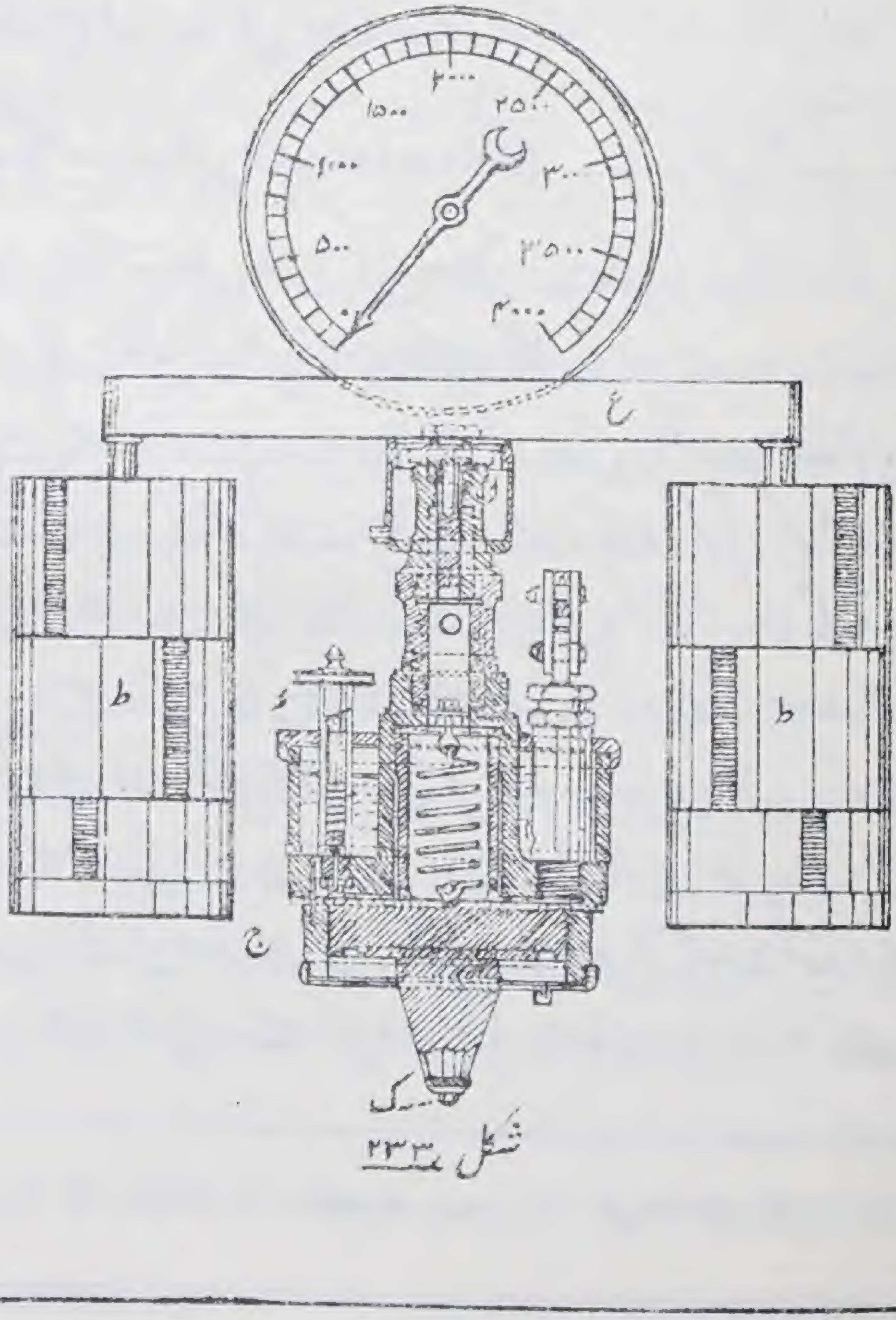
گلری[ے] نے سختی کے امتحان کے لیے ایک مشین بری نل کے
اصول پر وضع کی ہے۔ دباؤ ایک دستی ہیرم کے ذریعے ڈالا جاتا ہے
اور اس کی تنظیم بل وِل کمانیوں (یعنی کھوکھلی مدور رکابی نما تختیوں)
کے ایک گٹھے کے ایک معین انصراف کے ذریعے عمل میں آتی ہے۔

بری نل نے سختی کے امتحان کی ایک ایسی مشین وضع کی ہے
جس میں گولی کا نقش ایک خاص کمیت کو ایک خاص بلندی سے گرا کر
پیدا کیا جاتا ہے۔ گلری نے ایک گولی کے ذریعے سختی کی تصادمی
امتحانی مشین وضع کی ہے جس میں گولی کو ضرب بل ول کمانیوں کے ذریعے
پہنچتی ہے جو صرف ایک مختص مقدار کے بقدر منصرف ہو سکتی ہیں اور ضرب کی
باقی توانائی بالحرکت کسی اور جگہ صرف ہو جاتی ہے۔

ے Guillery

بری نل نے گولی کے ذریعے سختی کے جو امتحانات ایک مستقل ضرب کے ساتھ کیے اُن سے معلوم ہوا کہ جو ضرب ایک بہت نرم فولاد پر ۳۰۰۰ کیلوگرام کے سکونی دباؤ سے پیدا ہونے والا نقش پیدا کرتی ہے وہ زیادہ کاربن والے صفحہ ۵۲۵ فولادوں میں اس سکونی دباؤ سے بڑا نقش پیدا کرتی ہے یعنی ضرب سے حاصل ہونے والے سختی کے عدد اور سکونی امتحان سے حاصل ہونے والے عدد کی نسبت اگر نرم فولاد کے لیے اکائی ہو تو سخت فولادوں میں یہ نسبت کم ہوتی ہے۔

کھانچا ساز اوزار کو گھسا کر سختی معلوم کرنے کے امتحانوں میں اوزار کے نقائص کے اثرات سے بچنے کا ایک بہت پُرفن طریقہ



شکل ۲۳۳

ڈاکٹر ہیگ[ہ] نے وضع کیا ہے۔ اس نے ایک ہی شے کے دو مربع منشور لے کر ان کو اس طرح رکھا کہ ان کے محور علی القوائم ہوں اور ان کی مربع تراشوں کے وتر باہم اور دباؤ کے خط کے ساتھ ایک سیدھ میں ہوں۔ اس طرح کھانچے کی شکل دباؤ پر منحصر نہیں ہوگی اور سختی کی پیمائش اس طرح ہوگی کہ دباؤ کو کھانچے کی چوڑائی کے مربع سے تقسیم کیا جائے۔

رج وِھٹورتھ[لے] تحقیقی معمل میں ایک خود کار شنبہ بنایا گیا ہے جس میں ایک چھوٹا کمانی دار ہتوڑا ایک ۱/۸ء کی فولادی گولی کو ضرب لگاتا ہے۔ یہ جیبی آلہ چھوٹی سختائی ہوئی اشیا کا تیزی سے امتحان کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے اور گڑھے کا قطر ایک شفاف V نما پیمانے سے ناپا جاتا ہے۔ اس کو ایک تعبیری منحنی کے حوالے سے استعمال کریں تو برنیل کا سختی کا عدد تقریباً طور پر حاصل ہوتا ہے۔

صلابت بیں (Scleroscope) ——— اس آلے سے جسے شور[۲ے] نے وضع کیا ہے سختی اس طرح ناپی جاتی ہے کہ ایک چھوٹے استوانی گرہتوڑے کو ایک کند الماسی کھانچاساز ٹکڑا لگا ہوتا ہے اور ہتوڑا ایک درجہ دار شیشے کی نلی میں پھسلتا ہے۔ اس ہتوڑے کی بازگشت سے سختی پائی جاتی ہے۔ بازگشت ظاہر ہے کہ سخت سطح پر سے زیادہ ہوگی کیونکہ نرم شے کی صورت میں کھانچا زیادہ گہرا ہوتا ہے جس میں ہتوڑے کی زیادہ توانائی صرف ہوتی ہے۔ سختی کا پیمانہ اس طرح لیا جاتا ہے کہ بہت سخت اور بازپید (reproducible) فولاد سے سختی کا عدد ۱۰۰ حاصل ہو۔ برنیل کے عدد اور شور کے پیمانے کے عدد کی نسبت سخت اشیا میں نرم اشیا سے بڑی ہوتی ہے اور کسی خاص شے کی صورت میں تحویل اس طرح کی جاسکتی ہے کہ شور کے عدد کو ایک جزوِ ضربی سے ضرب دیا جائے جو ۶ء۶ سے لے کر ۶ء۶۳ تک

صفحہ ۵۲۶

Shore ؎۲ Rudge Whitworth ؎۱ Dr. B. P. Haigh ؎

ہوتا ہے۔ پہلی قیمت سخت کئے ہوئے اوزاری فولاد کے لیے ہے اور دوسری قیمت ڈھلے لوہے کے لیے ہے۔

اس میں شک نہیں کہ ہر آلہ کسی خاص غرض کے لیے کارآمد ہے۔ صلابت بین سختائی ہوئی دھاتوں کے لیے کارآمد ہے جن پر معمولی گولی کا امتحان کوئی نقش نہیں پیدا کرتا مثلاً کاٹنے والے اوزار وغیرہ۔ سختی کے امتحانات کے متعلق بہت سے دلچسپ مضامین حال میں شائع ہوئے ہیں جن کا مطالعہ فائدے سے خالی نہ ہوگا۔

سختی کا چھیلنے یا کھرچنے کا امتحان —— جامعۂ برلن کے پروفیسر ماڑٹنز[ے] نے ایک کھرچنے کے امتحان کا معیار قائم کیا ہے جس میں ایک الماسی نوک، جو ایک بیرم پر حرکت کرنے والے ایک وزن سے لدی ہوئی ہے، امتحانی ٹکڑے کو کھرچتی ہے۔ اس نے اشیا کا مقابلہ کرنے کے دو طریقے استعمال کیے (۱) ایسے بوجھ جو ۰۱، مم چوڑا کھرچ پیدا کریں (۲) کھرچ کی چوڑائی ایک دیے ہوئے بوجھ کے تحت۔ کھرچ کی چوڑائی دونوں صورتوں میں ایک خردبین کے ذریعے دریافت کی جاتی ہے۔

صلابت پیما (Sclerometer) —— سطح سختائی کے لیے سب میں سادہ اور سب میں عام موٹا امتحان یہ ہے کہ ہاتھ سے ایک ریتی سے گھسا جائے۔ اس گھسنے کے طریقے کو مسٹر ہیتھ کوٹ[لہ] نے ترقی دی ہے۔ انھوں نے ہاتھ کے غیر یکساں عمل سے بچنے کے لیے میکانی ذرائع وضع کیے۔ ان کا صلابت پیما جو اسطوانی ٹکڑوں کی محدب سطح پر استعمال کرنے کے لیے ہے دو ریتیوں پر مشتمل ہے جن کو باہم قبضے کے ذریعے جوڑا گیا ہے اور جن کے درمیان نمونے کو رکھا جاتا ہے۔ ایک ریتی افقی رکھی جاتی ہے۔ اس "قینچی نما" اجتماع کی گرفت نرم اشیا پر سخت اشیا سے بہت زیادہ ہوتی ہے۔ نرم اشیا میں ہموار ریتی افق سے ۷۰° کا زاویہ بناتی ہے

ے Prof. Martens of Berlin

لہ Mr. H. L. Heathcote

اور سخت اشیا کی صورت میں صرف ۲۰° سختی رتیوں کی زاویئی وضع سے معلوم کی جاتی ہے جس کو ایک درجہ دار رُبع دائرہ پر پڑھا جاتا ہے ۔ آلے کو اس غرض سے استعمال کیا جاتا ہے کہ موزوں حدود کے اندر معلوم کریں کہ سطح سختائی کا عمل کتنا موثر ہوا ہے ۔ مقعر استوانی سطحوں کے لیے آلے کی ترمیم یافتہ شکل استعمال کی جاتی ہے جس میں ایک مدور ریتی استعمال کی جاتی ہے ۔

گھسنے کے امتحانات ـــــ سختی میں ایک عنصر ایسا ہے جو نہ تو بالکل کسی چیز کے گھسنے کی مزاحمت ہے اور نہ کسی نوک سے کھرچے جانے کی مزاحمت ہے ۔ یہ چکنے اجسام سے رگڑے جاکر گھسے جانے کی مزاحمت ہے اور بہت سے مشینی پرزوں میں یہی خاصیت مطلوب ہوتی ہے پھسلواں سطحوں کا گھساؤ معلوم کرنے کے لئے ایک مشین انگلستان کے سرکاری معمل طبیعیات میں بنائی گئی ہے ۔

سختی کا رقاصی امتحان ـــــ مسٹر ہربوٹ نے سختی معلوم کرنے صفحہ ۵۲۷
کی ایک پُرصنعت مشین کو تجویز کیا ہے ۔ یہ ایک کماندار وزن پر مشتمل ہے جو ایک مرکب رقاص کے طور پر ایک فولادی یا الماسی گولی کے گرد جھول سکتا ہے جس کا قطر ا مم ہوتا ہے اور جو کماندار وزن کے مرکز جاذبہ کے قریب استوار طور پر پکڑی ہوئی ہوتی ہے ۔ گولی کو زیر امتحان نمونے پر رکھا جاتا ہے اور گولی نمونے پر ایک محدود زاویے میں لڑھکتی ہے ۔ جب آلے کا مرکز جاذبہ گولی کے مرکز سے ۱/۱۰ مم نیچے ترتیب دیا گیا ہو تو اگر رقاص کسی بہت سخت شے مثلاً شیشے پر رکھا گیا ہو تو آہستہ اہتزاز کرتا ہے اور ایک دفعہ جھولنے کے لیے تقریباً ۱۰ ثانیے کا وقت لیتا ہے ۔ نرم شے پر اہتزاز زیادہ تیز ہوتا ہے اور اس کی وجہ رقاص کے ”موثر طول“ کی

Mr. E. G. Herbert

تبدیلی ہے۔ ۱۰ جھولوں کے وقت کو " وقت سختی " کا پیمانہ سمجھا جاتا ہے۔ شیشے کے لیے یہ عدد ۱۰۰ ہے (یعنی ۱۰ جھولوں کا وقت ۱۰۰ ثانیہ ہے) اور سخت فولاد کا عدد ۵۰ سے ۸۰ تک ہے۔

یہ آلہ ایک بالکل مختلف طریقے پر " سختی " کا ایک مختلف ناپ حاصل کرنے کے بھی کام آتا ہے جسے " پیمانہ سختی " کہتے ہیں۔ اس کے لیے ایک خمدار نلی ہوتی ہے اور کمان کی چوٹی پر ایک پیمانہ ہوتا ہے اور نلی میں ایک بُلبلہ حرکت کرکے جھولے کے حیطے کو ظاہر کرتا ہے۔ اگر ابتدائی ہٹاؤ ایک معیاری معین مقدار ہو تو گولی جس نمونے پر رکھی گئی ہے وہ جتنا سخت ہو جھولے کا حیطہ اور بُلبلے کی حرکت اتنی ہی زیادہ ہوگی کیونکہ نرم اشیا میں گولی لڑھکتے وقت گڑھا پیدا کرتی ہے جس سے حرکت کی مزاحمت ہوتی ہے۔ مختلف اشیا کے نتائج کے درمیان دونوں امتحانوں میں مکمل مطابقت نہیں پائی جاتی۔ ان میں " وقت سختی " کی عام استعمال کے لیے سفارش کی جاتی ہے۔ اس قسم کے سختی جانچنے کے آلے میں خوبی یہ ہے کہ یہ بہت چھوٹی ساختہ صنعتی اشیا پر بھی ان کو نقصان پہنچائے بغیر استعمال کیا جاسکتا ہے۔

۱۸۵ - ضرب کے امتحانات — تیز رفتار مشینری میں ایک دھکے کی نوعیت کی تکراری قوتوں کے تحت ایسی بہت سی اشیا ٹوٹ جاتی ہیں جو سکونی تفتیشی امتحان میں خاطر خواہ مضبوطی اور تطول ظاہر کرتی ہیں۔ اس وجہ سے ایک ضربات یا صدمات کا امتحان وضع کرنے کی بہت سی کوششیں کی گئی ہیں جس سے ایسی اشیا کا نقص ظاہر ہو جائے جن کے " صدمے " کے تحت ٹوٹنے کا احتمال ہے۔

ضرب کا امتحان کرنے والی مشینوں میں عموماً وہ توانائی ناپنے کی کوشش کی جاتی ہے جو ایک امتحانی ٹکڑا ایک اکیلی ضرب سے جذب کرکے شکستہ ہو یا ایک خاص توانائی کے ضربات کی وہ تعداد شمار کی جاتی ہے

جو شکستگی کے لیے ضروری ہو - ایسی مشینیں بنائی گئی ہیں جن میں نمونہ ایک گرنے والے وزن کی ضرب سے سادہ تناؤ یا فشار کی وجہ سے ٹوٹتا ہے۔ اس طرح کی مشین میں جو نقائص ہیں اُن میں ایک بڑا نقص یہ ہے کہ امتحانی ٹکڑے میں فساد پیدا کرنے والی جذب شدہ توانائی کو صحیح صحیح محسوب کرنا ناممکن ہے کیونکہ توانائی کا ایک حصہ لازماً خود گرنے والے وزن مشین کے فریم یا سندان (anvil) اور بنیادوں کے فساد میں جذب ہوگا - اس وجہ سے اس طرح کی مشین اور امتحان کی تعبیر تقریباً ناممکن ہو جاتی ہے، البتہ ایک ہی مشین استعمال کی جائے اور اس میں امتحان کے وہی حالات ہر بار پیدا کیے جا سکیں تو اس طرح مفید تقابلی نتائج حاصل ہو سکتے ہیں۔ ضربی امتحان کی سب میں زیادہ مستعمل قسم یہ ہے کہ چھوٹے ٹکڑوں پر عرضی یا خماؤ کا امتحان کیا جائے - یہ ٹکڑے یا تو مسطح ہوتے ہیں یا ان میں ایک معیاری کٹھنہ یا نالی بنی ہوئی ہوتی ہے۔

تکراری عرضی ضربات ـــــ بعض اوقات اس طرح کا امتحان کیا جاتا ہے کہ ایک پٹڑی کتنی عرضی چوٹیں ٹوٹے بغیر برداشت کر سکتی ہے، یا بعض اوقات سب میں بڑی ضربوں کی شدت کی تخصیص کردی جاتی ہے - صریحاً یہ چیز بڑی حد تک پٹڑی کے سہاروں کی استواری پر منحصر ہے - یہ بتایا جا چکا ہے (دفعہ ۴۵) کہ اگر ضربیں متغیر شدت کی ہوں تو شکست کرنے والی ضرب کی شدت سابقہ ضربوں کی تعداد اور شدت کے ساتھ کوئی سادہ ربط نہیں رکھتی - ایک مشین میسرز سیٹن اور جوڈ نے تجویز کی ہے جس میں ایک کٹھنہ دار چھوٹے امتحانی ٹکڑے کا عرضی ضربوں کے تحت امتحان کیا جاتا ہے۔ اس میں پیمائش اس کی کی جاتی ہے کہ امتحانی ٹکڑے کی شکستگی تک ایک معین وزن ایک معین بلندی سے گر کر کتنی ضربیں صفحہ ۵۲۸

۵ - Messrs. Seaton & Jude

لگاتا ہے۔ مشین کے عام استعمال کے لیے صریحاً امتحانی ٹکڑے کی جسامت، گرنے کی بلندی، اور ہتوڑے کے وزن کو معین کرنا ہوگا۔ تمام ضربی مشینوں کی طرح اس مشین کو معیاری بنانے کے لیے فریم یا سندان (anvil) اور بنیادوں کا وزن اور ان کی قسم کو معین کرنا ہوگا۔

ایک واحد عرضی ضرب ——— شکل ۲۳۴ میں رقاص کی قسم کی ایک واحد ضرب کی ضربی مشین دکھائی گئی ہے جو میسرز ڈبلیو اور ٹی آیوری[۱] نے بنائی ہے۔ کٹھنہ دار امتحانی ٹکڑا جو ۲ انچ لمبا، $\frac{۳}{۱۶}$ انچ موٹا اور $\frac{۳}{۸}$ انچ چوڑا ہوتا ہے ایک شکنجے میں جکڑا جاتا ہے اور ۷۶۰ کٹھنہ کا محور گیج کے ذریعے شکنجے کے جبڑوں کے مستوی میں رکھا جاتا ہے۔ رقاص کو اس کے مرکزِ تصادم (centre of percussion) پر ایک ضارب باڑھ ہوتی ہے۔ رقاص ایک لبلبے کے ذریعے ایک معین بلندی سے چھوٹتا ہے اور امتحانی ٹکڑے کو ضرب لگا کر توڑتا ہے اور آگے بڑھ جاتا ہے۔ آگے بڑھ کر اس کا جھولا جس بلندی پر ختم ہوتا ہے وہ ایک نمائندے کے ذریعے ظاہر ہوتی ہے جس کو رقاص کی سلاخ کا بالائی سرا ایک پیمانے پر حرکت دیتا ہے۔ رقاص کا مرکزِ جاذبہ جھولے کے ختم پر آغاز کے مقابلے میں جس بلندی کے بقدر نیچے ہوتا ہے اُس کو رقاص کے وزن سے ضرب دینے سے وہ توانائی معلوم ہوگی جو ضرب میں جذب ہوئی۔ پیمانے کی درجہ بندی اس طرح کی گئی ہے کہ اس کے درجے اس مقدار کو بالراست فٹ پونڈوں میں ظاہر کریں اور اگر نشست اور آلے کے دیگر اجزا بالکل استوار ہوتے تو یہ نمونے کی شکستگی میں جذب شدہ توانائی کے مساوی ہوتی۔ رقاص کی قسم کی ایک ضرب والی ضربی امتحانی مشینیں چارپی[۲] اور رسل[۳] نے بھی استعمال کی ہیں۔ ضربی مشین کی ایک اور قسم ہے جس میں ایک اڑپہیہ

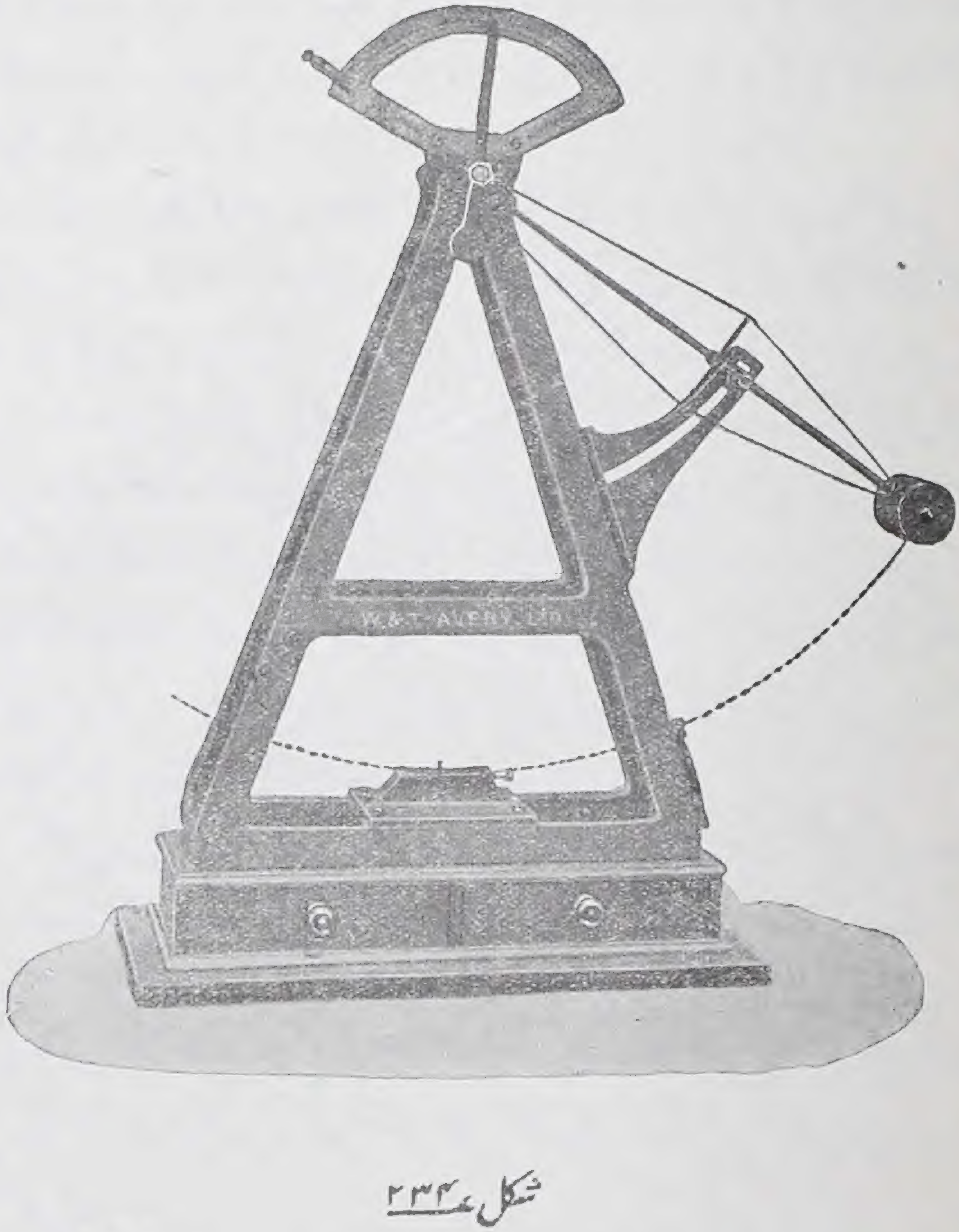
۱ Messrs W. T. Avery ۲ Charpy ۳ Russell

ہوتا ہے اور اُڑ پہیے کے گھیرے پر ایک ضارب ہوتا ہے جو امتحانی ٹکڑے کو توڑتا ہے۔ اُڑ پہیے کی ضرب سے پہلے اور بعد کی رفتار کو ایک سیالی (رفتار پیما) (Tachometer) کے ذریعے مشاہدہ کیا جاتا ہے اور ان مقروؤں سے جذب شدہ توانائی محسوب کی جاتی ہے۔

۱۸۵او۔ زور کی تقسیم کی بصری دریافت۔۔۔ بہت سی شفاف اشیا زور کے عمل کے تحت ثنائی انعطافی خواص رکھتی ہیں یعنی مستوی مقطب نور کو دو شعاعوں میں پھاڑ دیتی ہیں۔ سفید نور کی ایسی شعاعوں کے دوبارہ ملنے سے جو اختلال حاصل ہوتا ہے اس سے رنگ کی پٹیاں پیدا ہوتی ہیں جن کو ایک پردے پر مشاہدہ کیا جاسکتا ہے یا ان کا عکس (فوٹو) لیا جاسکتا ہے۔ یہ پیدا شدہ رنگ شے کے مختلف حصوں میں صدر زوروں کے اختلاف کے لحاظ سے مختلف ہوتا ہے متغیر زور کی صورت میں شے کے اندر کسی مقام پر کے زور کے فرق کا تقریبی اندازہ اس طرح کیا جاسکتا ہے کہ پیدا شدہ رنگ کا اس رنگ سے مقابلہ کریں صفحہ ۵۲۹ جو کسی معیاری زور کے مثلاً ایک سادہ طور پر کھنچے ہوئے تنشی ٹکڑے سے پیدا ہوتا ہے جس میں ایک معلومہ یکساں زور کی حدت ہو۔ ایک چپٹی تختی کے مستوی زور اور مستوی مقطب نور کی صورت میں اگر تجزیہ گر (analyser) کو اس طرح رکھا جائے کہ اس کا خاص مستوی مقطب (polariser) کے خاص مستوی کے علی القوائم ہو تو جو نور بے زور شفاف تختی میں سے منتقل ہوتا ہے وہ بالکل کٹ جائیگا۔ اگر شفاف تختی میں اس کے مستوی کے متوازی زور لگایا جائے تو نور خاص زور کے فرق کی حدت کے لحاظ سے منتقل ہوگا۔ سیاہ دھبوں سے صفر زور یعنی مساوی خاص زوروں کے طبقات ظاہر ہونگے۔۔ پروفیسر کوکر نے

Prof. Coker ـہ

شفاف زائیلونائیٹ (xylonite) کے نمونے استعمال کر کے ایسی صورتوں کے زور کی بصری تحقیق کو ترقی دی ہے جن کی ریاضیاتی بحث بہت مشکل ہے۔



شکل ۲۳۴

صفحہ ۵۲۰

اس نے لدے ہوئے زائیلونائیٹ نمونوں کے ذریعے زور کی تقسیم کے چند معروف حسابات کی تقریبی تصدیق کی ہے مثلاً آنکڑے کی تراش اور سوراخ دار بندھن سلاخیں، اور ایسی بہت سی صورتیں جن میں مادہ غیر مسلسل ہو مثلاً مختلف قسم کے کٹخنے جہاں صحیح صحیح ریاضیاتی بحث تقریباً ناممکن ہوتی ہے۔

اس میں بحث کی گنجائش ہے کہ آیا ایسی تحقیقوں میں جن میں یکسانیت، اور ابتدائی زور سے اور بیں مانڈگی سے پاک ہونا اہمیت رکھتا ہو زائیلونائیٹ (xylonite) بہترین شے ہے یا نہیں۔ لیکن اس سے مختلف شکلوں کے نمونے مقابلتاً جس آسانی سے تیار کیے جا سکتے ہیں اس کا لحاظ کرتے یہ ایسے تجربات میں بہت کار آمد ہے جن میں اس سے حاصل ہونے والی صحت کافی خیال کی جا سکے۔

کوکر کے کام کے ساتھ اسکوبل نے جانبی فساد کی پیمائشیں شریک کردی ہیں جن کے متعلق میس نیگر کا خیال ہے کہ یہ زور کی مستوی تقسیموں کی صورت میں یعنی جہاں کہ تیسرا خاص زور ہر جگہ صفر ہو ایسی صورتوں میں دونوں زوروں کا حاصل جمع معلوم کرنے میں کار آمد ہے۔ اگر فرق کو بصری طریقوں سے معلوم کرلیا گیا تو چونکہ حاصل جمع ناپے ہوئے جانبی فساد کا م سے گنا ہوگا (دیکھو (۳) دفعہ ۱۹، جس کے ساتھ ف =٠) اس لیے دونوں خاص زور پورے طور پر معلوم ہو جائینگے۔ یہ معلوم ہو کہ ینگ کا مقیاس سے زائیلونائیٹ کے لیے شیشے کی تختی کا صرف $\frac{1}{25}$ ہے، جس کی وجہ سے فسادات مقابلتاً بڑے ہوتے ہیں۔

ممکن ہے کہ اگر زور کے فرق کی بصری دریافت شیشے کے نمونوں پر کی جائے اور اس کے ساتھ عرضی فسادوں کی پیمائش کے ذریعے زور کا حاصل جمع معلوم کرنے کا عمل کسی دھات مثلاً فولاد پر کیا جائے تو اس سے زور کی تقسیم کے متعلق نتائج خاصی صحت کے ساتھ ملیں۔ زور کی تقسیم کی تحقیق کے بصری طریقوں کے متعلق مزید تفصیلات ذیل کے پرچوں میں مل سکتی ہیں :-

---

Mesnager ے Scoble ے

Brewster, *Phil. Trans.*, 1818, p. 156.

Neumann, "Abhandlungen der K. Akademie Wissenschaften zu Berlin," 1841, vol. ii. pp. 50-61.

Maxwell, *Trans. Roy. Soc. Edin.*, vol. xx., 1853, p. 117.

Kerr, *Phil. Mag.*, Oct., 1888.

Carus Wilson, "The Influence of Surface Loading on the Flexure of Beams," *Phil. Mag.*, Dec., 1891.

Coker, Papers in *Phil. Mag.* Oct., 1910, and in *Engineering*, Jan. 6, 1911, March 8, 1912, Dec. 13, 1912, March 28, 1913, June 18, 1919, Feb. 20, and 27, 1920, and Jan. 7, 1921.

Filon, "Investigation of Stresses in a Rectangular Bar by Means of Polarised Light," in *Phil. Mag.*, Jan., 1912.

Mesnager, *Comptes Rendus*, Nov. 25, 1912, or *Science Abstracts*, 1913, p. 322.

صفحہ ۵۳۱

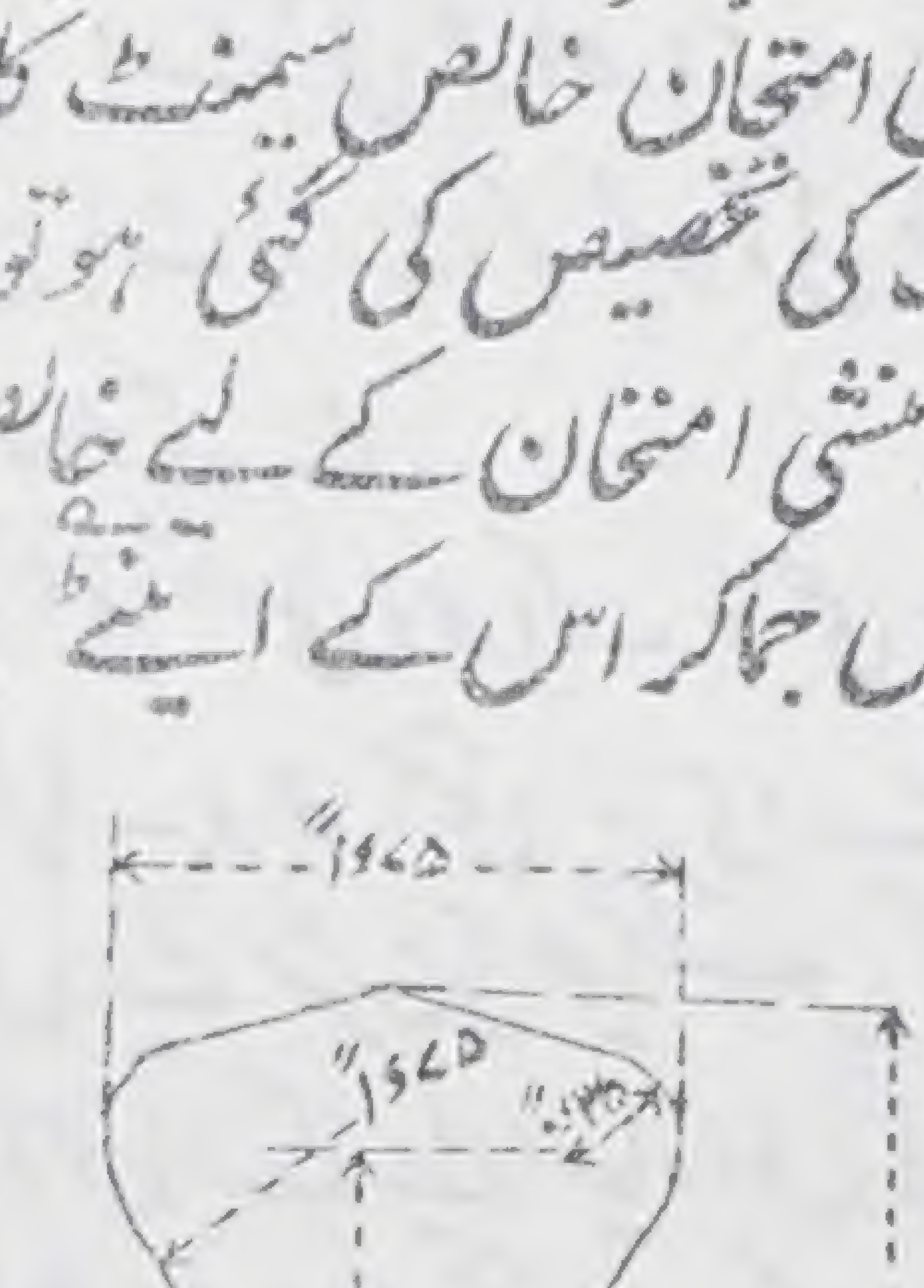
ستر ہواں باب

خصوصی مسالے

۱۸۶۔ سیمنٹ ـــــ سیمنٹیں اس طرح تیار کی جاتی ہیں کہ چونا پتھر کو مٹی کی مختلف مقداروں کے ساتھ بھونتے ہیں اور اس کے بعد باریک پیستے ہیں مٹی چونا پتھر کے ساتھ قدرتی طور پر ملی ہوئی بھی ہو سکتی ہے اور مصنوعی طور پر ملائی بھی جا سکتی ہے۔ انجینیر کے استعمال کی سب میں اہم سیمنٹ پورٹلینڈ سیمنٹ ہے جو تقریباً ۳ حصے چونا پتھر یا کھریا اور ایک حصہ مٹی سے تیار کی جاتی ہے جس سے ایک کیلسیم سلیکیٹ اور ایک کیلسیم ایلومینیٹ بنتا ہے۔ قدرتی سیمنٹ اور دیگر سیمنٹوں میں اور پورٹلینڈ سیمنٹ میں فرق زیادہ تر یہی ہے کہ ان سیمنٹوں میں مٹی کا جزو کم ہوتا ہے۔ چونوں میں مٹی بہت کم یا بالکل مفقود ہوتی ہے سوائے آبی چونے کے جس میں مٹی تھوڑی مقدار میں موجود رہتی ہے اور جو پانی کے نیچے متمکن ہو سکتا ہے۔ پورٹ لینڈ سیمنٹ کی صنعت میں سرعت کے ساتھ ترقی اور تغیرات ہوئے ہیں۔ یہ ایک ایسی چیز ہے جو بڑی باضابطگی کے ساتھ بنائی جا سکتی ہے جیسا کہ متعدد مختلف اقسام کے امتحانات سے ظاہر ہے جب اس میں پانی ملایا جاتا ہے تو وہ ایک خاص مقدار کے ساتھ کیمیائی طور پر ترکیب کھاتی ہے اور جم کر ایک ٹھوس جسم بن جاتی ہے جس میں پانی نفوذ

نہیں کر سکتا۔ یہ آبی خاصیت ایلومینا کے ایک سلی کیٹ (Silicate) کی موجودگی کی وجہ سے ہوتی ہے۔ پورٹ لینڈ سیمنٹ میں چونے کا تناسب سلیکا اور ایلومینا کے متحدہ وزن کا تقریباً ۲½ تا ۳ گنا ہے۔ جپسم جو چونا پتھر کے کیلسیم کے ساتھ موجود رہتا ہے سلفیٹ یا پیرسی پلاستر (Plaster of Paris) پیدا کرتا ہے۔ ۲ فی صدی تک ہو تو سیمنٹ میں اس مادے کا اثر یہ ہے کہ جم کر سخت ہونے کے لیے زیادہ وقت لگتا ہے اور یہ بات عموماً فائدہ مند ہے۔ اس سے زیادہ مقدار مضر ہے۔

۱۸۷۔ سیمنٹ کے تنشی امتحانات —— عملاً پورٹ لینڈ سیمنٹ پر تناؤ نہیں ڈالا جاتا بلکہ صرف فشار۔ اور عموماً اس کو تنہا یا "خالص" استعمال نہیں کیا جاتا بلکہ کسی غیر عامل شے مثلاً ریت، پتھر کے ٹکڑے یا اینٹ کے ساتھ ملا کر۔ تاہم سیمنٹ کی مضبوطی کا دستوری امتحان خالص سیمنٹ کا تنشی امتحان ہی ہے کیونکہ احتیاط کے ساتھ حالات کی تخصیص کی گئی ہو تو یہ امتحان سیمنٹ کے وصف کا ایک عمدہ پیمانہ ہے۔ تنشی امتحان کے لیے خالص سیمنٹ میں پانی ملاتے ہیں اور اس کو ایک سانچے میں جما کر اس کے اینٹے[۵] بناتے ہیں۔ امتحان میں اینٹا جس تراش پر ٹوٹتا ہے اس کے اندر زور کی تقسیم وہ ایک خاصی حد تک اینٹے کی شکل پر اور گرفتی شکنجوں پر منحصر ہے۔ اس لیے ان کی تخصیص ضروری ہے۔ شکل ۲۳۵ میں اینٹے کی معیاری شکل دکھائی گئی ہے جو برطانوی انجینیری معیاروں کی مجلس نے اختیار کی ہے۔ اینٹے کی موٹائی ۱ انچ ہے اور اقل تراش ۱ انچ مربع ہے۔ شکل ۲۳۶ میں معیاری شکنجے یا جبڑے دکھائے گئے ہیں جو



شکل ۲۳۵

۵ Briquette

تنتشی امتحان میں اینٹے کو پکڑے رہتے ہیں۔ برِاعظم یورپ کے دیگر ممالک میں
ایک شکل کا اینٹیا استعمال کیا جاتا ہے جو شکل ۲۳۹ء میں حرف ر سے دکھایا
گیا ہے اور اینٹے تیار کرنے کا سانچہ شکل ۲۳۸ء میں دکھایا گیا ہے۔ خالص صفحہ ۵۳۲
سیمنٹ کے امتحانوں میں اینٹے کی مضبوطی پر آمیزش یا گچ کاری میں استعمال
کیے ہوئے پانی کی مقدار کا بہت اثر ہوتا ہے۔ پانی اتنا ہونا چاہیے کہ ایک
چکنی لئی تیار ہو جائے۔ ہر ایک پورٹ لینڈ سیمنٹ کے لیے پانی کا ایک
مخصوص تناسب ہوتا ہے جس سے ممکنہ اعظم تنتشی مضبوطی حاصل ہوتی ہے۔
یہ تناسب تجربے سے معلوم کیا جاتا ہے اور وزن کے لحاظ سے سیمنٹ کے
۱۸ فی صدی سے ۲۵ فی صدی تک ہوتا ہے۔

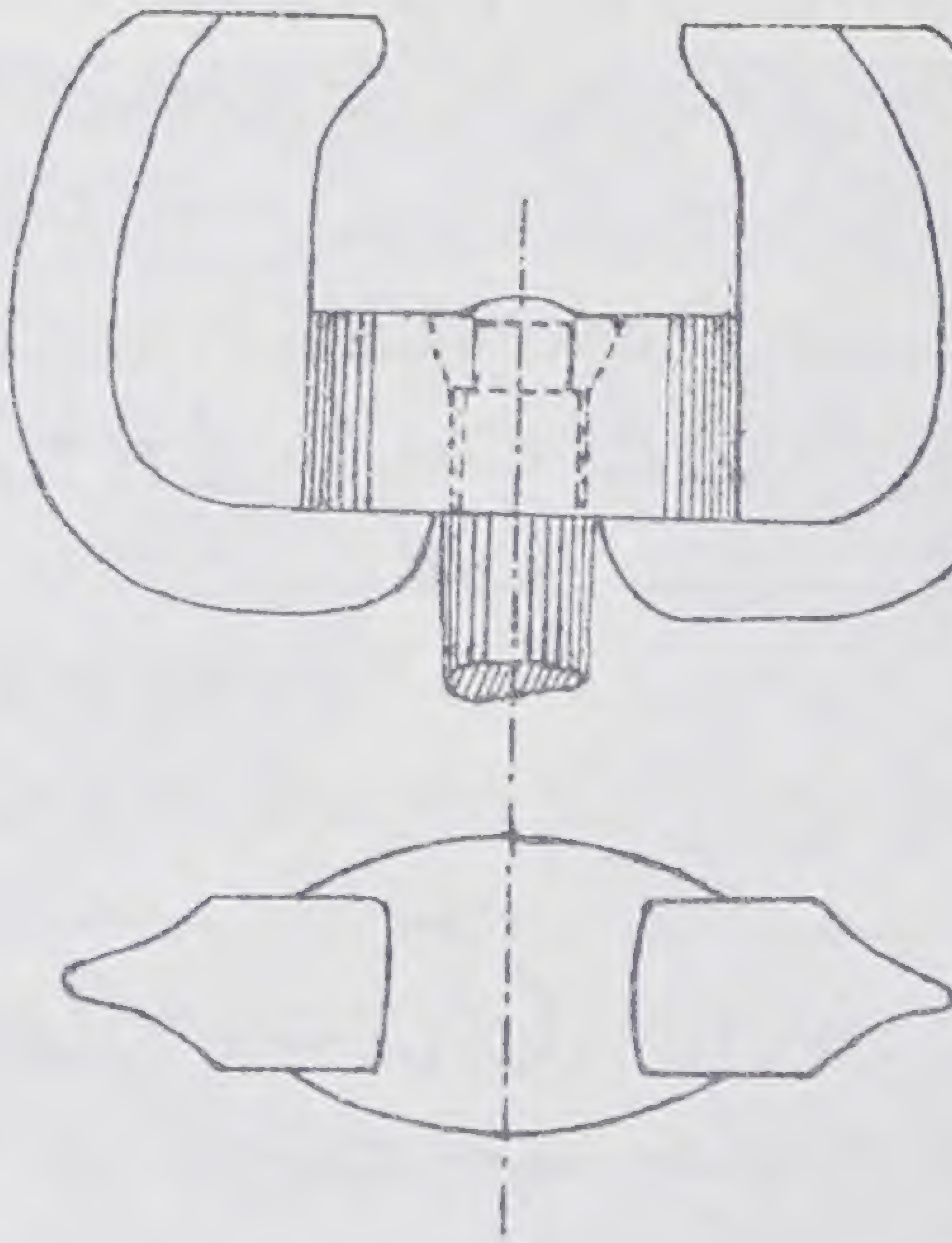
سیمنٹ کی تناؤ اور کچلاؤ دونوں کی مزاحمت اس کی عمر کے ساتھ بڑھتی ہے۔ (عمر جمنے کے وقت سے شمار کی جاتی ہے)۔ اس لیے ملانے کے بعد کی اینٹے کی عمر اور اس پر کیے ہوئے عمل کی تخصیص کرنی چاہیے۔ ایک اچھی بات یہ ہے کہ کچلاؤ کی مزاحمت کا اضافہ تنتشی مضبوطی کے اضافے سے زیادہ ہوتا ہے۔

تنتشی شکستی بوجھ ایک خاصی حد تک اس پر منحصر ہوتا ہے کہ بوجھ کس شرح
سے لگایا گیا۔ بوجھ جتنی تیزی سے لگایا جائیگا تنتشی شکستی بوجھ اتنا ہی زیادہ صفحہ ۵۳۳
ہوگا۔ اس لیے شرح کی بھی تخصیص کرنی چاہیے۔ شکل ۲۳۵ء میں جو اینٹا دکھایا
گیا ہے اس کے لیے معیاروں کی مجلس نے ۱۲ ثانیے میں ۱۰۰ پونڈ یعنی
۵۰۰ پونڈ فی منٹ کی تخصیص کی ہے۔

انتہائی تنتشی مضبوطی کی تخصیصات مختلف ہیں لیکن مربع انچ تراش کے لیے جو "معیاری" تخصیص ہے اس سے ایسے اینٹے کے لیے جو سانچے میں میکانی دھمس (ramming) کے بغیر بنایا گیا ہو اور ایک گیلے کپڑے نیں ہوا میں ۲۴ گھنٹے رکھا گیا ہو اور پھر امتحان کیے جانے تک پانی میں رکھا گیا ہو حسبِ ذیل اعداد حاصل ہوتے ہیں:-

ناپ سے، ۷ دن بعد، ۶۰۰ پونڈ فی مربع انچ تراش۔

ہر ایک مدت کے نتائج چھ چھ اینٹوں[2] کے اوسط سے حاصل کرنے چاہییں۔



شکل ۲۳۶

ریت کے آمیزے کے امتحانات — چونکہ استعمال میں سیمنٹ کے ساتھ عموماً ریت ملائی جاتی ہے اس لیے اس کی مطابقت کے لحاظ سے امتحان اکثر ایسے اینٹوں پر کیا جاتا ہے جو ۳ حصے ریت (بلحاظ وزن) اور ایک حصہ سیمنٹ سے تیار کیے گئے ہوں۔ یہ ریت اور سیمنٹ کی چپک کا امتحان ہے اور لازماً استعمال شدہ ریت کے ذرات کی جسامت اور شکل سے متاثر ہوگا۔ مختلف ممالک میں ریت کے معیار مقامی ہیں۔ برطانوی معیاری (سفید) ریت لیٹن بزارڈ[1] سے حاصل

[1] Leighton Buzzard [2] Briquettes

کی جاتی ہے اور اس کا وہ حصہ استعمال کیا جاتا ہے جو ایسی چھلنی میں سے گزر جائے جس میں فی مربع انچ ۰.۱۶۴ انچ قطر کے ۲۰×۲۰ تار ہوں اور ایسی چھلنی میں سے بالکل نہ گزرے جس میں فی مربع انچ ۰.۱۰۸ انچ قطر کے ۳۰×۳۰ تار ہوں۔ ریت اور سیمنٹ کو ملانے کے لیے پانی کا فی صد حسب ذیل ربط سے حاصل ہوتا ہے:

(۱/۶ ف + ۲.۵۰) فی صد

جہاں ف پانی کا وہ فی صد تناسب ہے جو خالص سیمنٹ کو پیکر پذیر بنانے کے لیے درکار ہو۔ اس طرح کے گارے سے جو اینٹے تیار ہوں اُن کی مضبوطی حسب ذیل ہونی چاہیے:-

ناپ کے ۷ دن کے بعد ۲۲۵ پونڈ فی مربع انچ سے کم نہ ہو

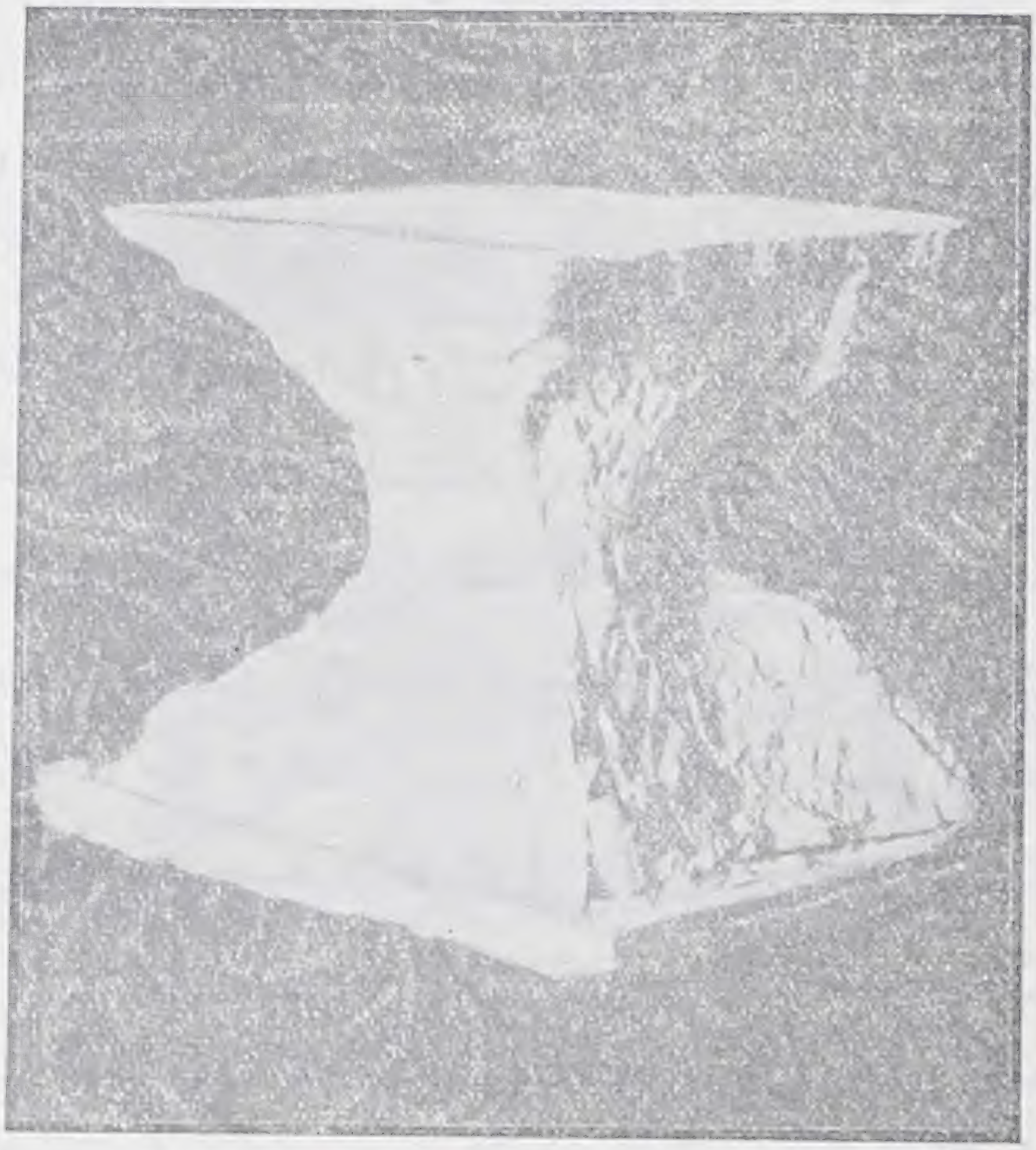
" ۲۸ " " ۳۵۶ " " " "

اور نیز ایسے نمونوں کی صورت میں جن کی مضبوطی اوپر بیان کی ہوئی مضبوطی سے زیادہ ہو ۷ دن کے بعد سے ناپ کے ۲۸ دن بعد تک مضبوطی کا اضافہ پونڈ فی مربع انچ میں ۱۰۰۰÷ (۷ دن کے بعد کی شکستی مضبوطی) سے کم نہ ہونا چاہیے۔

۱۰۸۔ فشاری امتحانات

سیمنٹ کے فشاری امتحانات کثرت سے نہیں کیے جاتے کیونکہ تنشی امتحان قابلِ اطمینان اور بہت آسان ہوتا ہے۔ فشاری امتحان کرنے کے لیے ۳ یا ۴ انچ کے مکعبوں پر معمولی امتحانی مشین استعمال کی جا سکتی ہے۔ فشاری امتحان کے لیے قابلِ اطمینان نشست پیدا کرنے کی دقت اور اس کا اثر دفعہ ۳۷ میں بیان کیے گئے ہیں۔ خالص سیمنٹ کی دباؤ کے تحت مضبوطی اس کی تنشی مضبوطی کے ۸ سے ۱۱ گنے تک ہوتی ہے اور یہ نسبت عمر کے ساتھ بڑھتی ہے۔ زور فساد کا منحنی، دھاتوں کے برخلاف، عموماً صفر سے زور کے محور کی طرف مقعر ہو کر چلتا ہے اور زیادہ بوجھوں پر کسی قدر محدب ہو جاتا ہے۔ شکستگی اس طور پر

عمل میں آتی ہے جو کہ چھوٹک اشیا کا خاصہ ہے یعنی فشار کی سمت سے ۵ ۴ کے زاویوں پر جز واقع ہونے کی وجہ سے (دیکھو شکل ۲۳۷)۔



شکل ۲۳۷۔ پورٹلینڈ سیمنٹ
(گڈمین کی کتاب "علم میکانیات کا اطلاق انجینیری میں" سے)

۱۸۹ سیمنٹ کی امتحانی مشینیں — سیمنٹ کے اینٹوں کے تنشی امتحان عموماً خصوصی مشینوں پر کیے جاتے ہیں جن کے مختلف نمونے ہیں۔ ان میں مفرد اور مرکب بیرم استعمال کیے جاتے ہیں۔ بوجھ کو ایک برقرار اور معین شرح کے ساتھ لگانے کا عمل بعض صورتوں میں آب رواں یا باریک آہنی گولیوں کے ذریعے انجام دیا جاتا ہے جو ایک زیرِ قابو سوراخ کے ذریعے ایک ظرف میں گرتی ہیں جو بیرم کے سرے سے لٹکتا ہے۔ بعض

صفحہ ۵۳۲

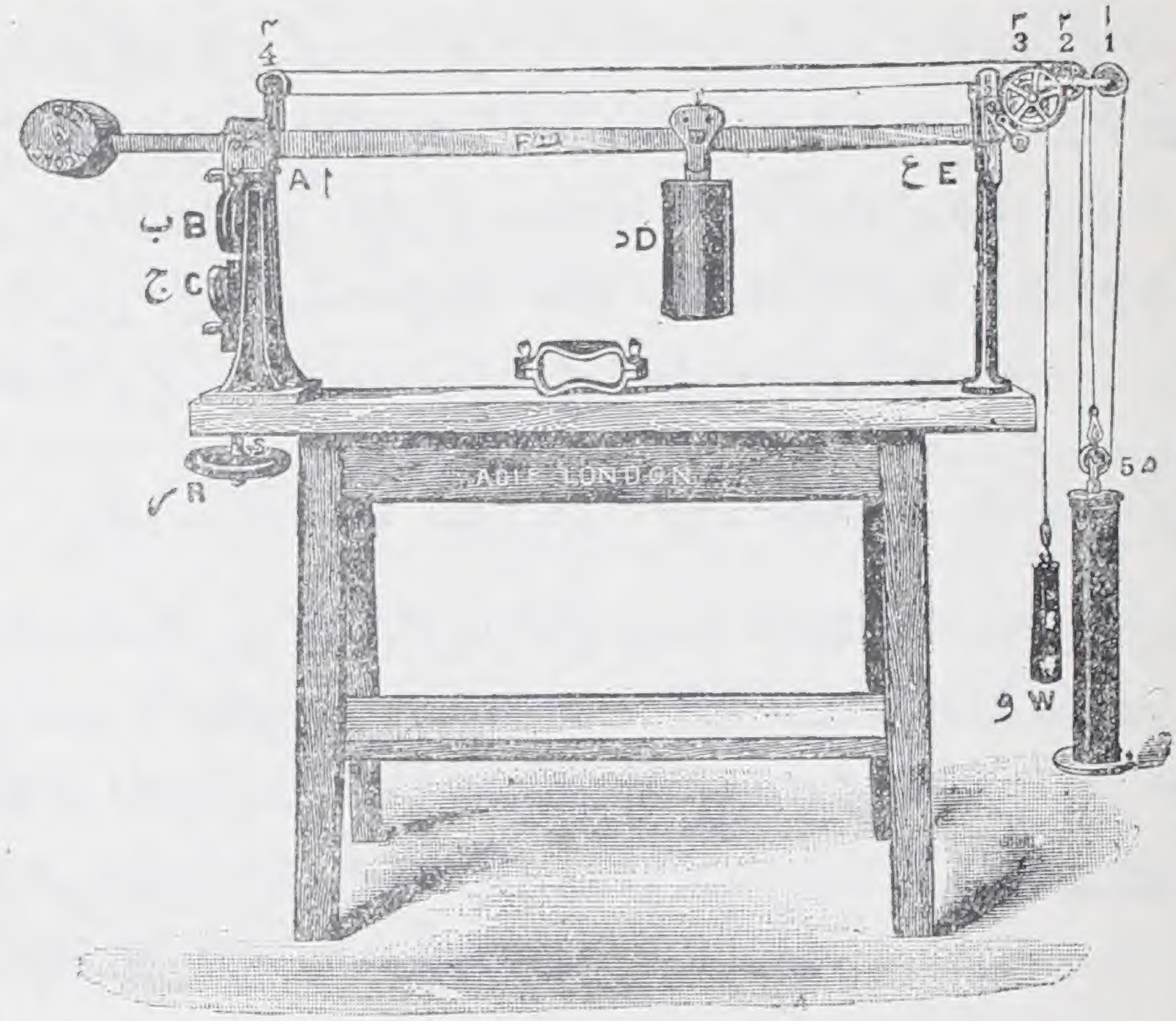
صورتوں میں ایک متحرک وزن کو ایک درجہ دار بیرم پر ایک برقرار رفتار کے ساتھ حرکت دی جاتی ہے۔

شکل ۲۳۸ میں مسٹر ایڈی کی بنائی ہوئی ایک یک بیرمی امتحانی مشین دکھائی گئی ہے جس میں ایک متحرک وزن د ہے۔ اینٹھیا شکنجوں ب ج میں رکھا جاتا ہے اور ہتھ پہیے کے ذریعے اُس پیچ کو تنگ کیا جاتا ہے جو نچلے شکنجے ج کو لگا ہوا ہے۔ اس سے بیرم ف کھم ع کو لگی ہوئی روکوں کے درمیان ایک توازنی وضع میں آجاتا ہے۔ وزن د کو بیرم ف پر اُس دستے کے ذریعے حرکت دی جاتی ہے جو شہتیر کے سرے پر لگا ہوا ہے۔ بوجھ ایک یکساں شرح سے لگانے کے لیے وزن کی حرکت ایک لٹکتے ہوئے وزن و کی کھینچ کے ذریعے انجام دی جاتی ہے اور اس کھینچ کو ایک صدمہ گیر اُستوانے کے ذریعے ترتیب دیا جاتا ہے جو چرخی نمبر ۵ کے نیچے ہے۔ حرکت کی شرح کی تنظیم ایک ڈاٹ کی ترتیب کے ذریعے کی جاتی ہے جو صدمہ گیر کے فشارے میں لگا ہوا ہے۔

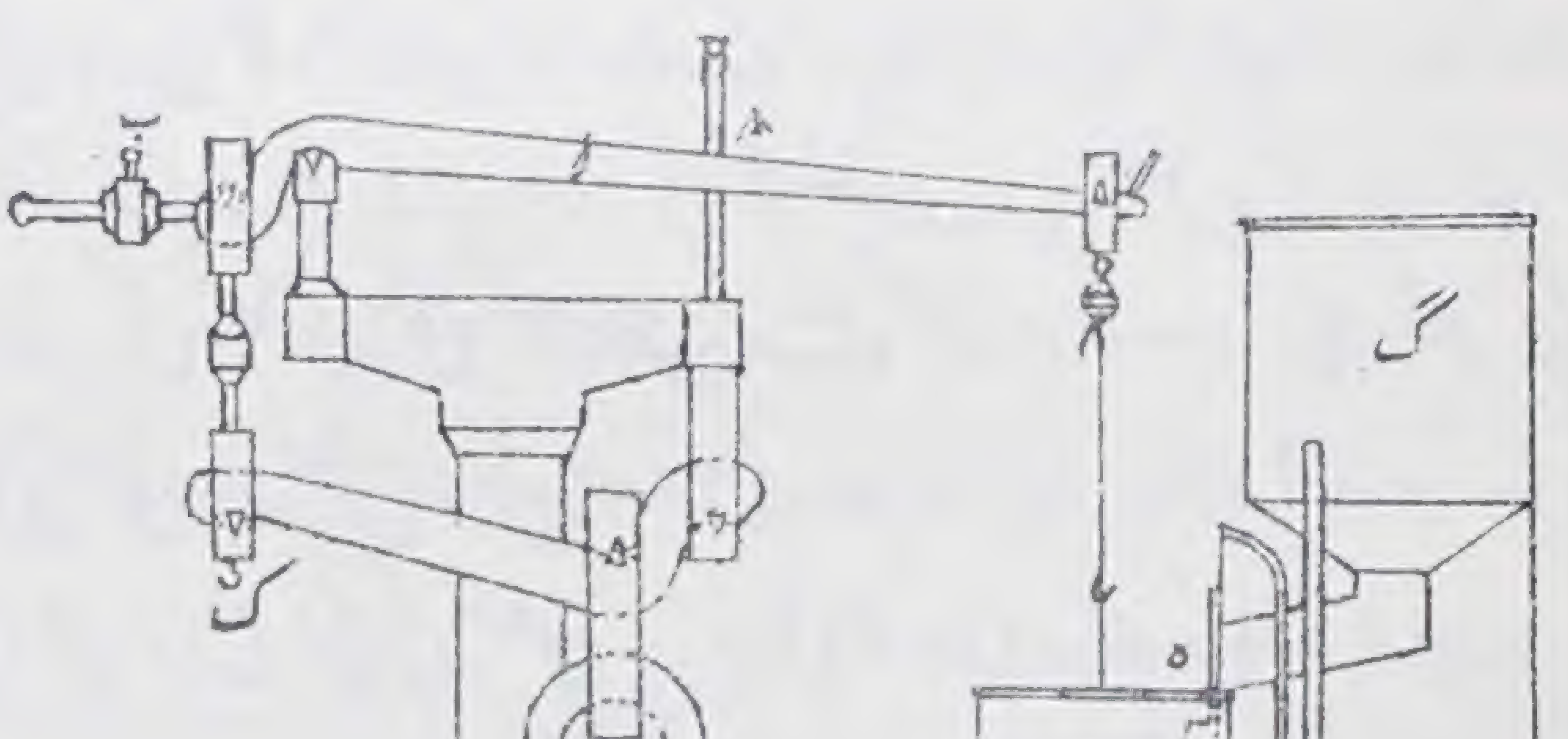
شکل ۲۳۹ میں میسرز[5] ایڈی کی بنائی ہوئی ایک اور سیمنٹ کی امتحانی مشین کا خاکہ دکھایا گیا ہے۔ یہ مشین ڈاکٹر میکیالس[1] کی مجوزہ ہے۔ اس مشین کو جو مرکب بیرم کی قسم کی ہے اور جس میں بوجھ گولیوں کے ذریعے لگایا جاتا ہے جرمن دستور کی ایک تمثیلی مثال سمجھا جاسکتا ہے۔ اینٹھیا ی شکنجوں د اور ع کے درمیان پکڑا جاتا ہے۔ شکنجہ ع کے نچلے سرے کو ایک زور لگانے والا پیچ لگا ہوا ہے جس کو ہتھ پہیہ ف سے گھمایا جاتا ہے۔ اینٹھے پر کی کھینچ کو دو بیرموں کے ذریعے گولیوں کے وزن سے متوازن کیا جاتا ہے۔ گولیاں ظرف ج میں ہیں جو بیرم ا کے سرے پر لگا ہوا ہے صفحہ ۵۳۵
اور بیرم ا کو ایک ترتیب پذیر توازنی وزن ب بھی لگا ہوا ہے۔ دونوں بیرموں کی متحدہ بیرمیت ۵۰ : ۱ ہے۔ گولیاں ظرف ج میں ایک خزانہ

۵ Messrs Adie

۱ Dr. Michealis



شکل ۲۳۸



شکل ۲۳۹

گ سے ایک نالی کے راستے آتی ہیں جس کو ھ پر ایک بیرم ل کے ذریعے کسی مطلوبہ شرح کے لحاظ سے ترتیب دیا جاتا ہے۔ اینٹھ کے ٹوٹنے سے ہے بیرم گرتا ہے اور گولیوں کی رسد خود بخود موقوف ہو جاتی ہے۔ اب ج میں کی گولیوں کے وزن کا ۵۰ گنا لینے سے شکستی بوجھ حاصل ہوگا۔ یہ مقدار ل پر کی کمانی دار ترازو سے معلوم ہو جاتی ہے۔ صفحہ ۵۳۶

۱۹۰۔ سیمنٹ کے دیگر امتحانات

سیمنٹ کے تنشی امتحان کے علاوہ اکثر اس کی بھی تخصیص کی جاتی ہے کہ رطوبت کی اور کیلیم سلفیٹ کی کتنی مقدار جائز رکھی جا سکتی ہے، نیز وہ اعظم نسبت جو چونے کے وزن کو سلیکا اور ایلومینا کے متحدہ وزن کے ساتھ جائز رکھی جا سکتی ہے۔ "معیاری" تخصیص میں یہ نسبت ۲٫۷۵ مقرر کی گئی ہے۔ چونا اس نسبت سے زیادہ ہو تو جمنے کے بعد سیمنٹ کو چورا کر دیتا ہے۔

باریکی کے امتحانات —— سیمنٹ میں موٹے دانے رہ جائیں تو یہ کم زوری کا موجب ہوتے ہیں جیسا کہ ریت یا کسی اور غیر عامل شے سے ہوتا ہے۔ پسائی کی باریکی کا امتحان کرنے کے لیے سیمنٹ کو چھانا جاتا ہے اور معلوم کیا جاتا ہے کہ دیے ہوئے ابعاد کی چھلنیوں پر تفل کا کیا تناسب باقی رہتا ہے۔ معیاروں کی مجلس کی تخصیص ہے کہ ۰۰۴۴ انچ قطر کے ۷۶×۷۶ تار فی مربع انچ کی چھلنی پر تفل ۱ فی صدی سے زیادہ نہ ہو اور ۰۰۲ انچ قطر کے ۱۸۰×۱۸۰ تار فی مربع انچ کی چھلنی پر ۱۰ فی صدی سے زیادہ نہ ہو۔

کثافتِ اضافی —— ناقص طور پر جلی ہوئی سیمنٹ عمدہ وصف کی سیمنٹ سے ہلکی ہوتی ہے۔ نیز اگر سیمنٹ ہوا میں کھلی چھوڑ دی جائے تو رطوبت اور کاربانک ایسڈ کو جذب کر کے ناقص ہو جاتی ہے اور پانی کے ساتھ ملنے کی خاصیت کو کھو دیتی ہے۔ اس سے اس کی کثافتِ اضافی کم ہو جاتی ہے۔

لیکن تھوڑی سی ہوا دینا بھی ضروری ہے تاکہ اگر کچھ آزاد چُونا موجود ہے تو وہ بُجھ جائے ورنہ وہ سیمنٹ میں تڑاق پیدا کریگا۔ بعض اوقات یہ تخصیص کی جاتی ہے کہ پورٹ لینڈ سیمنٹ کا وزن ۱۱۲ تا ۱۱۵ پونڈ فی بُشل ہونا چاہیے لیکن غالباً بہتر یہ ہوگا کہ نکاسی کے بعد کثافتِ اضافی ۳٫۱۰ کی تخصیص کی جائے۔ اس کے متعلق شبہ ہے کہ صحیح کلساؤ ہوا ہے یا نہیں معلوم کرنے کے لیے کثافت اضافی کوئی قابلِ قدر چیز ہے۔ کثافت اضافی کو ایک شیشے کے ظرف کی لمبی تنگ گردن میں تارپین کی سطح کے ہٹاؤ کے ذریعے ناپا جاتا ہے۔ سیمنٹ کی ایک تولی ہوئی مقدار ظرف میں ڈالی جاتی ہے اور سیمنٹ کے وزن کے گراموں کی تعداد کو تارپین کے ہٹے ہوئے حجم کے مکعب سنتی میٹروں کی تعداد سے تقسیم کرنے سے کثافتِ اضافی حاصل ہوتی ہے۔ اور ایک ترکیب یہ ہے کہ ایک تنگ گردن کی بوتل کو ایک خاص سطح تک پانی سے بھر کر تولا جائے۔ پھر تھوڑا پانی پھینک کر سیمنٹ کا ایک معلومہ وزن داخل کیا جائے، اور پھر اور پانی ڈال کر سطح کو ابتدائی مقام تک لایا جائے اور تولا جائے۔ تب اس سیمنٹ کے ہم حجم پانی کا وزن مساوی ہے سیمنٹ کا وزن منفی (بوتل اور اس کے اندر کی اشیا کے پہلے وزن اور دوسرے وزن کا فرق) اور کثافت اضافی سیمنٹ کے وزن کو اس مساوی الحجم پانی کے وزن سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوگی۔ یعنی

$$\text{کثافتِ اضافی} = \frac{\text{سیمنٹ کا وزن}}{\text{بوتل کا پہلا وزن} + \text{سیمنٹ کا وزن} - \text{بوتل کا دوسرا وزن}}$$

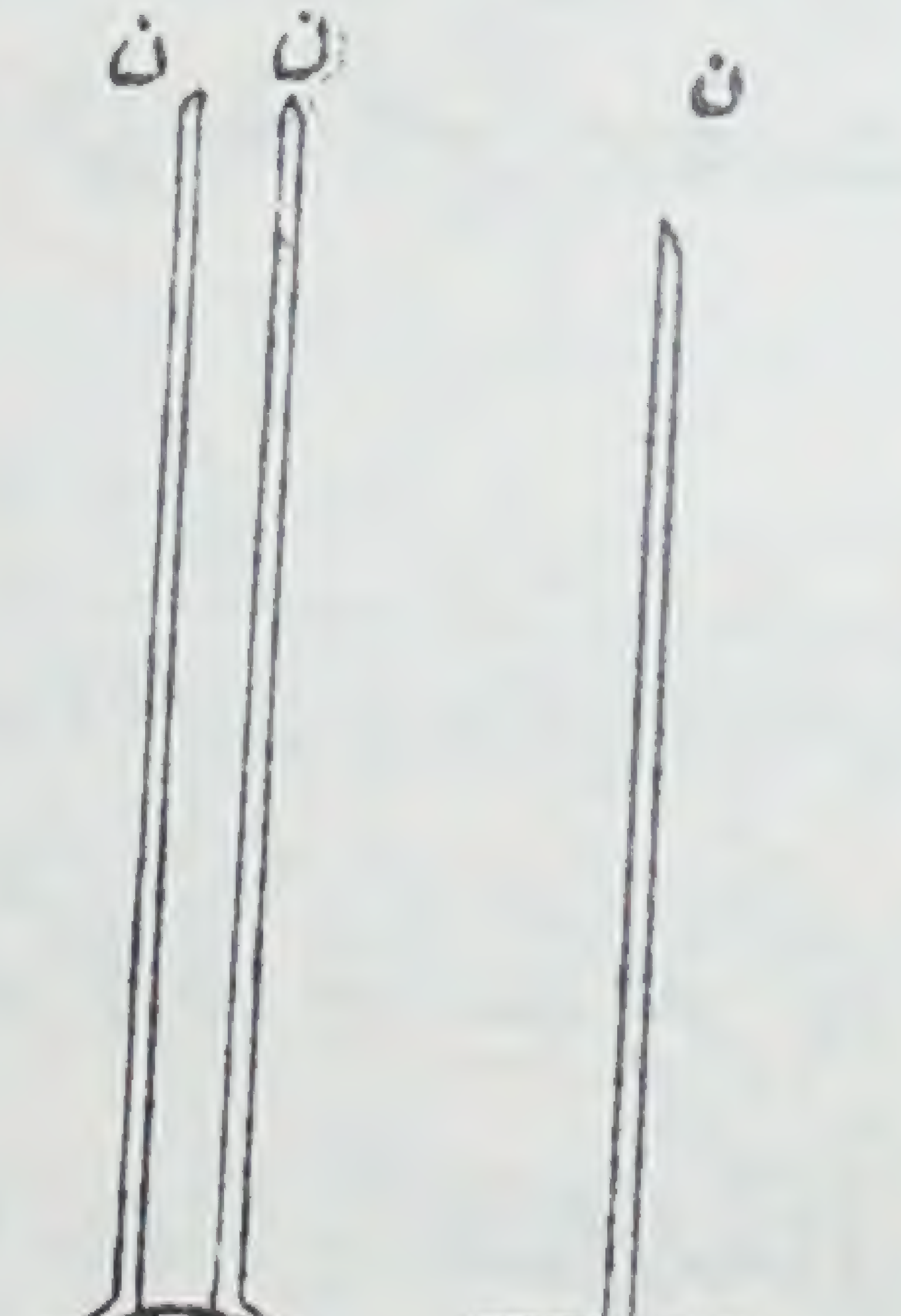
صحت[ل] کا امتحان — صحت کا لی شاتے لیئے[ے] کا امتحان

شکل نمبر ۲۴۰ میں دکھائے ہوئے آلے میں کیا جاتا ہے۔ یہ ایک چھوٹے چیتلی کٹے (Split) اُستوانے میں پر مشتمل ہے جس کی موٹائی ۰٫۵ ملی میٹر ہے۔ یہ آلہ ایک

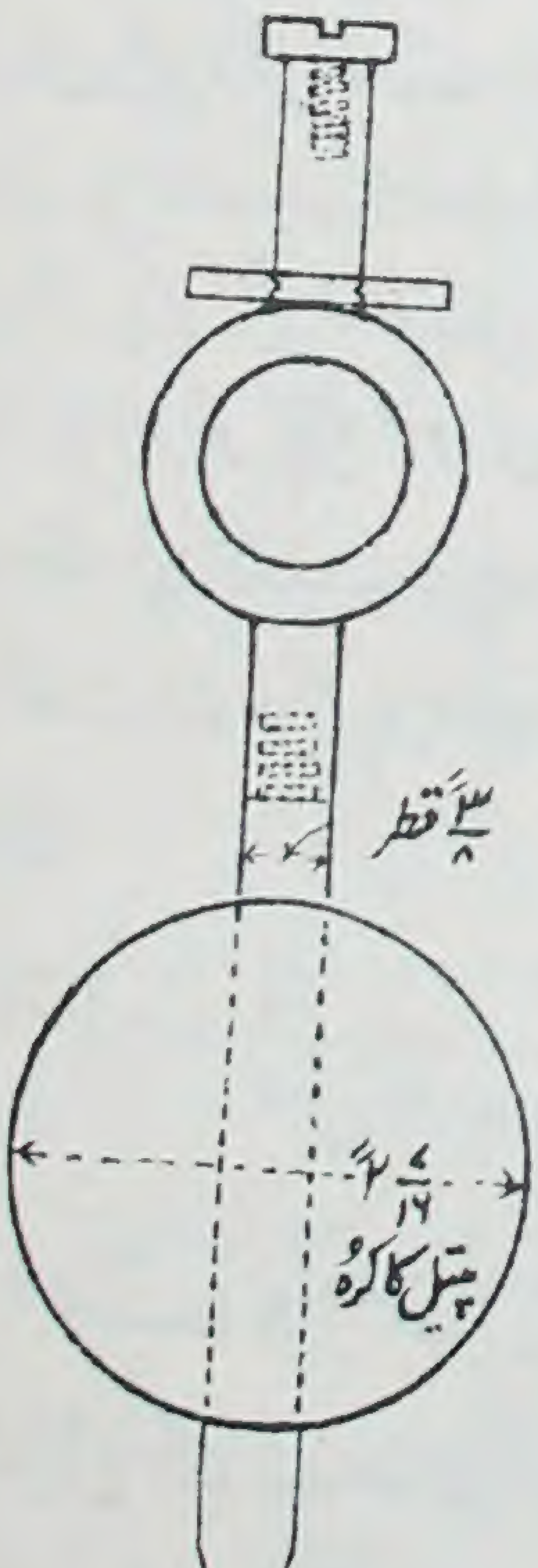
ے - دیکھو ڈی۔ بی۔ بٹلر کا مضمون انسٹی ٹیوشن آف سول انجینیرز کی روداد جلد ۱۶۶ حصہ چہارم میں یہ جانچ اب معیاری تخصیصات میں سے خارج کردی گئی ہے۔

ل Soundness ے Le Chatelier

صفحہ ۵۲۷ سانچہ ہے جس کا اندرونی قطر ۳۰ ملی میٹر اور موٹائی ۳۰ ملی میٹر ہے ۔ نمائندے ن ن کتاؤ کے دونوں طرف لگائے گئے ہیں اور ان کا طول نوک سے استوانے کے مرکز تک ۱۲۵ ملی میٹر ہے ۔ سانچہ کو شیشے کے ایک ٹکڑے پر رکھ کر سیمنٹ اور پانی کے معمولی آمیزے سے بھرا جاتا ہے اور اس اثنا میں کٹے کنارے آہستگی کے ساتھ ملائے رکھے جاتے ہیں ۔ بھرنے کے بعد سانچے کو ایک شیشے کی تختی اور ایک چھوٹے وزن سے ڈھانکا جاتا ہے اور ۵۸° تا ۶۰° ف کے پانی میں اس کو رکھ کر ۲۴ گھنٹے تک چھوڑ دیا جاتا ہے ۔ سیمنٹ جم جائیگی اور نمائندوں ن ن کے درمیان کے فاصلے کو ایک ملی میٹری پیمانے پر ناپا جاتا ہے ۔ سانچہ ٹھنڈے پانی میں رکھ کر اس پانی کو نقطہ جوش تک گرم کیا جاتا ہے اور ۶ گھنٹے تک



شکل ۲۴۰



شکل ۲۴۱

جوش دیا جاتا ہے۔ ٹھنڈا ہونے کے بعد نمائندوں ن ن کے درمیان کے فاصلے کو پھر دوبارہ ناپا جاتا ہے۔ اگر سیمنٹ میں آزاد چونے کی زیادتی ہے یا کسی اور وجہ سے بہت زیادہ تڑق آگئی ہو تو اس کا پتہ اس طرح چلتا ہے کہ نمائندوں کے باہمی فاصلے میں بہت اضافہ واقع ہوتا ہے۔ ''معیاری'' تخصیص کی رُو سے ایسی سیمنٹ میں ۵ ملی میٹر تک کے پھیلاؤ کی اجازت ہے جو ملانے سے پہلے ہوا میں سات دن تک رکھی گئی ہو اور جس سیمنٹ کو ملانے سے پہلے ۲۴ گھنٹے تک ہوا دی گئی ہو اس میں ۱۰ ملی میٹر تک کی اجازت ہے۔

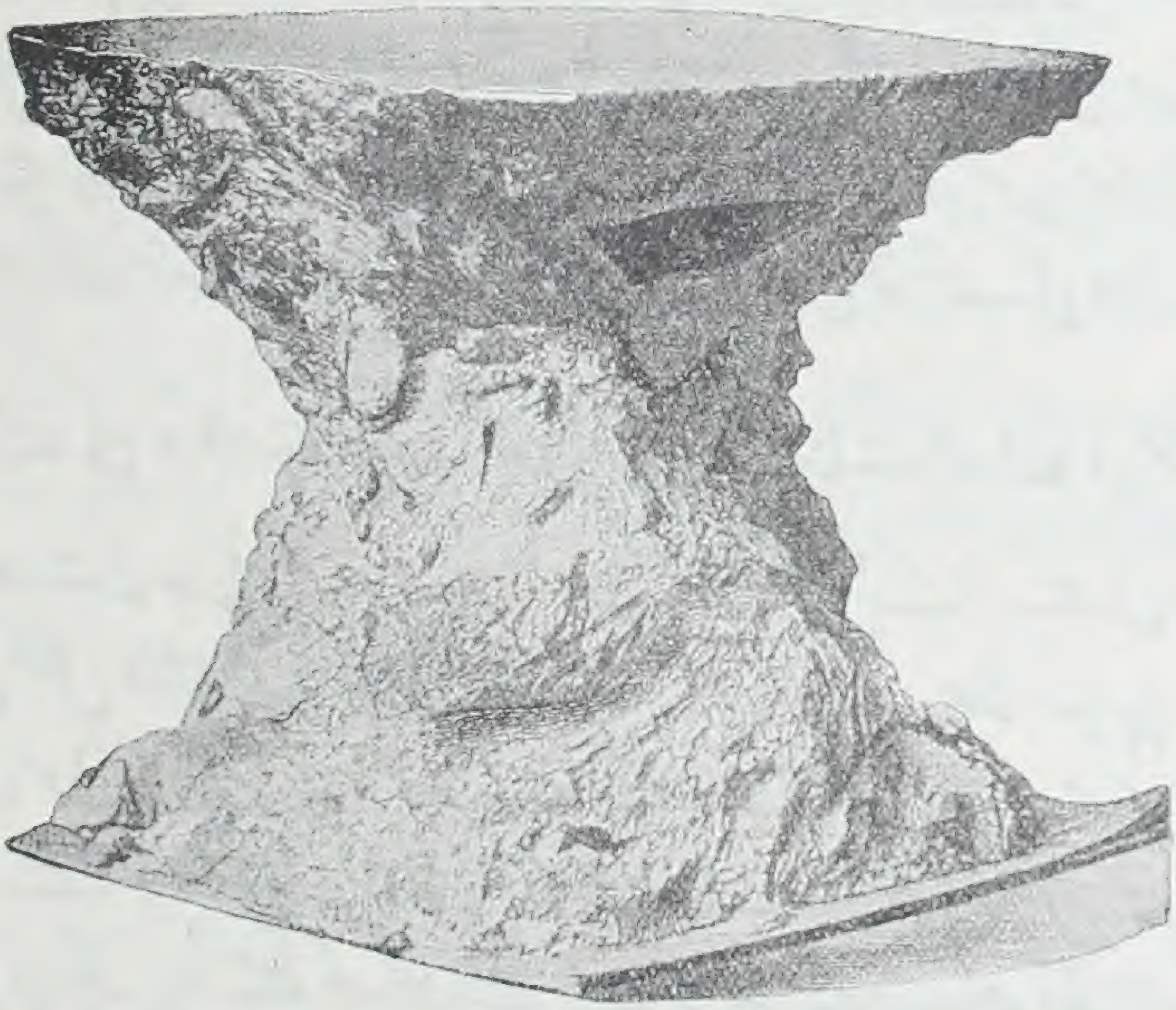
جمنے کی مدت —— معمولی طور پر ملا کر بنائے ہوئے اینٹے یا ڈلے کے جمنے کی مدت کی جانچ ایک وزندار ''سوئی'' کے نقش[۱] کے ذریعے کی جاتی ہے جس کی شکل شکل ۲۴۱ میں دکھائی گئی ہے۔ اس کا ایک چپٹا سرا $\frac{1}{16}$ انچ مربع ہے اور اس سوئی کا وزن $2\frac{1}{2}$ پونڈ ہے۔ سیمنٹ کو سمجھا جاتا ہے کہ جم گئی ہے جب کہ سوئی سے آہستگی کے ساتھ سطح کو چھوا جائے اور کوئی نقش نہ پیدا ہو۔ سوئی کو اس کی جگہ پر ڈھیلے کھلے حلقے یا واشر ھ کے ذریعے اٹھایا جاتا ہے۔ صفحہ ۵۳۸
جمنے کی مدت کی تخصیص اُس کام پر منحصر ہے جس کے لیے سیمنٹ مطلوب ہے۔ یہ مدت جلدی جمنے والی سیمنٹوں کے لیے ۱۰ سے ۳۰ منٹ تک ہے، اور دیر سے جمنے والی سیمنٹوں کے لیے ۲ گھنٹے سے ۵ گھنٹے تک۔

۱۹۱۔ کنکریٹ، پتھر اور اینٹ —— کنکریٹ کا امتحان

بعض اوقات ۶ انچ کے ضلع کے مکعبوں کو کچل کر کیا جاتا ہے۔ مضبوطی جمنے کے بعد کی عمر کے ساتھ بڑھتی ہے۔ اور تقابلی امتحانات کے لیے عمر عموماً ۳ مہینے اور ۹ مہینے لی جاتی ہے۔ دیگر بھربھری ٹھوس اشیا کی طرح اس میں بھی شکستگی فشار کی سمت سے ۴۵° کے زاویوں پر جز کی وجہ سے ہوتی ہے (دیکھو دفعہ ۳۷)۔ ٹوٹے ہوئے مکعب کی شکل کسی قدر دو مخروطوں کی سی ہوتی ہے

۱۔ جمنے کی مدت کی معیاری تخصیص اب وائیکٹ سوئی کے استعمال پر مبنی ہے جس کی تفصیلات اور جمنے کی مدتوں کے لیے دیکھو بی۔ ای ایس۔ اے تخصیص نمبر ۱۲ (۱۹۲۵ء)۔

جن کا راس ایک ہو (دیکھو شکل ۲۴۲) ۔ مضبوطی اس پر منحصر ہوتی ہے کہ سمنٹ کے ساتھ کونسی غیر عامل اشیا استعمال کی گئیں ۔ مختلف آمیزوں کے متعلق تفصیلی معلومات حاصل کرنے کے لیے کنکریٹ کے فن کی کتابوں سے مدد لی جائے ۔



شکل ۲۴۲ ۔

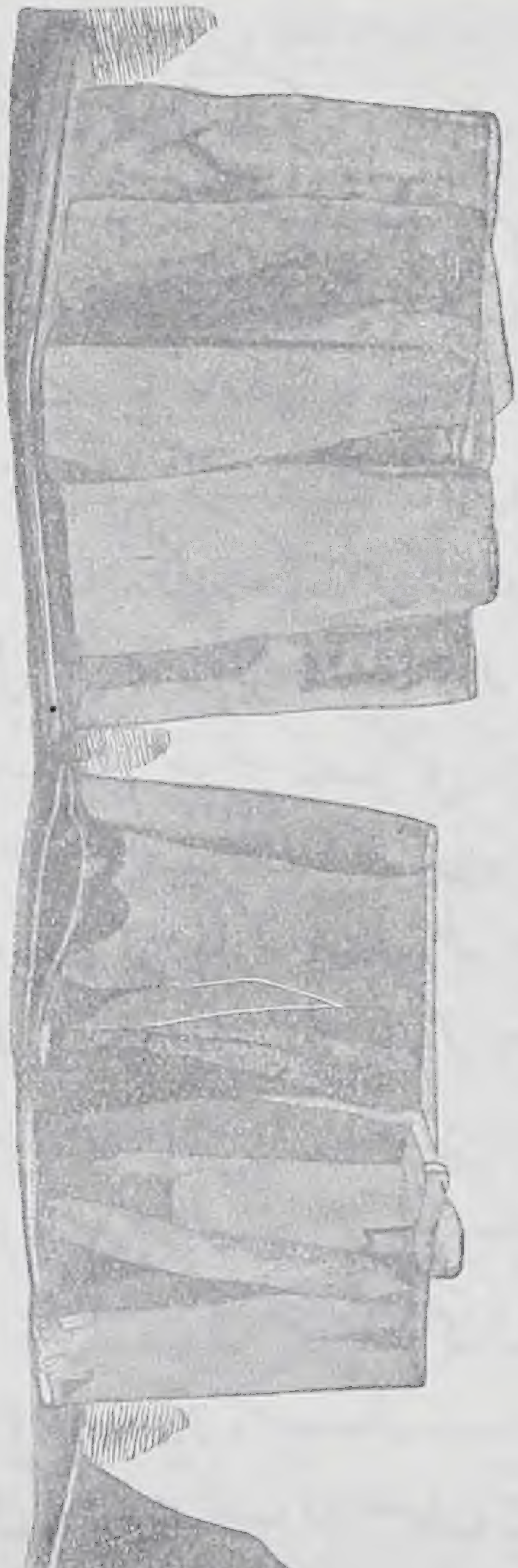
(انون کی کتاب "اشیائے تعمیر کا امتحان" سے)

پتھر ۔۔۔۔ عمارتوں میں پتھر پر عموماً کچل زور پڑتا ہے ۔ کچل زور کے تحت پتھر کی مضبوطی بڑی حد تک پتھر کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے ۔ گرینائیٹ کی مضبوطی اکثر ۱۵۰۰ ٹن فی مربع فٹ ہوتی ہے اور ریتیلے پتھر اور کم زور قسم کے چونا پتھروں کی مضبوطی اس کی ایک چوتھائی یا پانچواں حصہ ہو سکتی ہے ۔ تعمیری پتھر کا انتخاب عموماً پائداری اور شکل شباہت کے لحاظ سے کیا جاتا ہے نہ کہ انتہائی کچل مضبوطی کے لحاظ سے جو کہ بہت بلند عمارتوں کے سوا عموماً تمام اغراض کے لیے کافی سے زیادہ ہوتی ہے ۔ پتھر کا تخلخل اس طرح ناپا جاتا ہے کہ سوکھے پتھر کو تولتے ہیں اور پھر اس کو پانی میں ڈبو کر سیر شدہ کر کے تولتے ہیں ۔ سفحہ ۵۲۹

اینٹ ۔ اینٹوں کی مضبوطی بہت مختلف ہوتی ہے اور مٹی کے

اجزا، ساخت کے طریقے، اور دیگر حالات پر منحصر ہوتی ہے۔ ایک معمولی اینٹ کی اوسط مضبوطی تقریباً ۱۵۰ ٹن فی مربع فٹ لی جاسکتی ہے اور نیلی اسٹیفورڈ شائری[ھ] اینٹوں کی تقریباً ۴۰۰ ٹن فی مربع فٹ۔

کنکریٹ، پتھر اور اینٹ کے کچلاؤ کے امتحان —— کچلاؤ کے امتحان میں بچھونک اشیا کی نشست کا بہت اثر ہوتا ہے۔ دفعہ ۲۷ میں اس کا ذکر کیا گیا ہے اور مزید وضاحت شکل ۲۴۳ میں کی گئی ہے جس میں یارک شائر[لھ] کی موٹی ریت کے تین چار انچ مکعبوں کی شکستگی دکھائی گئی ہے۔ بائیں نمونے کو دباؤ کے دونوں چہروں پر سیسے کی تین $\frac{1}{12}$ انچ تختیاں لگائی گئی تھیں اور ۳۶ ٹن پر اس کی شکستگی اس طرح واقع ہوئی۔ بیچ کے نمونے کو صرف ایک ایک تختی کی نشست دی گئی تھی۔ اس نے ۵۶ ٹن کا وزن برداشت کیا۔



شکل ۲۴۳

(انون کی کتاب "اشیائے تعمیر کا امتحان" سے)

ھ Staffordshire

لھ Yorkshire

دائیں نمونے کو مقووں (millboards) کی نشست دی گئی تھی اور اس نے ۸۰ ٹن کا وزن برداشت کیا۔ پیرس پلاسٹر (Plaster of Paris) میں بٹھانے سے عموماً مقوے کی نشست کے مقابلے میں زیادہ اعلیٰ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ اور کچلاؤ کے امتحانات میں عموماً اس کو اور مقوے (millboards) کو استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ یاد رکھنا چاہیے کہ حقیقی تعمیروں میں ان اشیا کی کچل مضبوطی کسی اکیلے ٹکڑے کے امتحان سے حاصل ہونے والی مضبوطی سے کم ہوتی ہے اور ایک حد تک اس گارے کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے جس میں یہ شے بٹھائی گئی ہو۔ اگر گارا ایسا ہو کہ دباؤ کے تحت بہتا ہو تو اس سے فشار کی سمت کے علی القوائم ایک تنشی زور پیدا ہوگا۔

صفحہ ۵۴۰

ان بُھربُھری اشیا کے کچلاؤ کے امتحانات میں نشست کا بڑا کام یہ ہونا چاہیے کہ دباؤ کو یکساں طور پر تقسیم کرے اور شدید مقامی دباؤ سے پیدا ہونے والی ناکارگی کو روکے۔ شدید مقامی دباؤ زیر دباؤ شے کے ناہموار بیرونی چہروں سے پیدا ہوتے ہیں۔ اعلیٰ ترین مضبوطی حاصل کرنے کے لیے چہروں کو احتیاط کے ساتھ ہموار اور متوازی بنا دینا چاہیے اور امتحانی مشین کی فشاری تختی کی کُروی بیٹھک استعمال کرنی چاہیے۔

۱۹۲ - چوبینہ —— درخت کے تنے کی تراش بیرونی چھال سے مرکزی گودے تک دو حصوں پر مشتمل ہوتی ہے ایک اندرونی حصہ جو ذرا سیاہی مائل ہوتا ہے اور جو مرکز چوب (heartwood) کہلاتا ہے اور دوسرا بیرونی حصہ یا رس چوب (sapwood)۔ مرکز چوب اور رس چوب دونوں کو دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ بہت سی نلیوں پر مشتمل ہیں جو تراش میں حلقے دکھاتی ہیں۔ یہ سالانہ حلقے کہلاتے ہیں اور درخت کے ایک سال کے نمو کو تعبیر کرتے ہیں۔ سالانہ حلقے کا زیادہ غور سے معائنہ کیا جائے تو ہر حلقے میں دو قسم کے نمو نظر آئینگے اندرونی حصہ جو کم گنجان ہوگا بہار کی پیداوار ہوگا اور بیرونی حصہ گرما کی۔ درخت کا نمو سست ہو تو حلقے نزدیک نزدیک ہوتے ہیں اور اس صورت میں مضبوطی تیز نمو کے مقابلے میں زیادہ

ہوتی ہے۔ بالغ درختوں میں مرکز چوب، رس چوب سے زیادہ مضبوط اور قیمتی ہوتی ہے الا اس کے کہ درخت اتنا پرانا ہو کہ مرکز چوب کے وصف میں تنزل شروع ہو گیا ہو۔

۱۹۳- چوبینے کی مضبوطی ــــــ چوبینے کی ایک ٹکڑے کی مضبوطی مختلف سمتوں میں بہت مختلف ہوتی ہے۔ ریشے کی سمت میں تناؤ یا فشار کی مضبوطی علی القوائم سمت سے بہت زیادہ ہوتی ہے کیونکہ علی القوائم سمت میں ریشوں کو توڑنے کی ضرورت نہیں بلکہ صرف ایک دوسرے کو پھاڑ دینے کی اور اس طرح اس صورت میں سوال عام مفہوم کی مضبوطی کا نہیں بلکہ چپکیت کا ہے۔ نیز کسی لکڑی کی مضبوطی اس پر بھی منحصر ہے کہ درخت کے کس حصے سے کاٹی گئی یعنی مرکزی چوب سے لی گئی یا رس چوب سے اور درخت کے بالائی حصے سے یا نچلے حصے سے۔ چوبینے کی مضبوطی بڑی حد تک حسب ذیل چیزوں پر بھی منحصر ہے۔ رُتیائی کی مقدار اور قسم، مقام اور زمین جس کی پیداوار ہے، درخت کی عمر، اور کاٹنے کا موسم۔ عموماً وزنی لکڑی ہلکی لکڑی سے مضبوط ہوگی۔ اس کے لیے مقابلہ ایک ہی خشکی کی مختلف لکڑیوں میں کیا جاتا ہے۔

۱۹۴- چوبینے کے امتحانات ــــــ امتحانی ٹکڑوں کی تعداد ــــــ چوبینے جیسی متغیر شے میں قابلِ اعتبار نتائج حاصل کرنے کے لیے یہ ضروری ہے کہ مشابہ ٹکڑوں کی ایک کثیر تعداد کا امتحان کیا جائے۔ اور ان نتائج کا اوسط لیا جائے۔

امتحانی ٹکڑوں کی جسامت ــــــ چوبینے جیسی شے میں چھوٹے ٹکڑے قابلِ اطمینان نہیں ہوتے کیونکہ چوبینے میں گرہوں کی ایک خاص مقدار اور دیگر مقامی نقائص پائے جاتے ہیں اور اس طرح کا ایک نقص ایک

چھوٹے امتحانی ٹکڑے میں موجود ہو تو بہت ہی پست مضبوطی حاصل ہوگی اور اگر اس کے برعکس امتحانی ٹکڑا اس طرح کا نکلا کہ تمام نقائص سے پاک ہو تو نتیجہ بہت اعلیٰ حاصل ہوگا جو حقیقی اوسط نمونوں کی قیمت سے بہت زیادہ ہوگا۔ اس لیے چوبینے کے اہم امتحانات میں بڑی تراشیں استعمال کی جاتی ہیں۔ البتہ تحقیق سے پتہ چلا ہے کہ اگر تراش کا تناسب وہی ہو اور نقائص سے پاکی مساوی درجے کی ہو تو بڑی تراش سے وہی مضبوطی فی مربع انچ حاصل ہوگی جو چھوٹی تراش سے حاصل ہوگی۔

رطوبت کے اثرات ــــــ چوبینے کی مضبوطی اُس وقت اعظم ہوتی ہے جب کہ اس میں سے اس کے وزن کے ۴ یا ۵ فی صدی پانی کے سوا سارا پانی خشک ہو گیا ہو۔ بہت گیلے (تازہ کٹے ہوئے) چوبینے کی مضبوطی اُس اعظم مضبوطی کی تقریباً آدھی ہوتی ہے اور اس کو سکھائیں تو جب رطوبت خشک چوبینے کے وزن کے ۶۰ فی صدی سے کم ہو جاتی ہے اُس وقت سے اِس کی مضبوطی خشکی کے ساتھ بڑھتی جاتی ہے یہاں تک کہ اعظم قیمت آجائے۔ مختلف لکڑیوں کے مقابلے کے لیے ضروری ہے کہ رطوبت کے فی صد کا ایک معین معیار اختیار کیا جائے۔ اس کے لیے بالعموم ۱۲ سے ۱۵ فی صدی تک رطوبت اختیار کی جاتی ہے کیونکہ ہوا میں اچھی طرح سکھانے کے بعد اتنی مقدار باقی رہ جاتی ہے۔ رطوبت ۱۰ فی صدی سے کم ہو تو رطوبت سرعت کے ساتھ کرۂ ہوائی سے جذب ہونے لگتی ہے۔ خشک ہو کر پھر رطوبت جذب کرنے کا اثر تقریباً وہی ہوتا ہے جو اصلی رطوبت کا ہوتا ہے۔ صفحہ ۵۴۱

رطوبت کی دریافت ــــــ اس کو سہولت کے ساتھ اس طرح انجام دیا جا سکتا ہے کہ امتحانی ٹکڑے میں ایک سوراخ کیا جائے اور چھیلن کو فوراً تولا جائے اور ایک تنور میں تقریباً ۲۱۲° ف پر خشک کرنے کے بعد

دوبارہ تولا جائے۔

۱۹۵۔ چوبینے کے امتحانات کا اہم سلسلہ — چوبینے کے سب میں پہلے سائنٹیفک امتحانات جن میں رطوبت قلم بند کی گئی باؤشنگر[ہ] نے کیے۔ اُس نے رطوبت کے لیے خشک چوبینے کے وزن کے ۱۵ فی صدی کا معیار اختیار کیا۔ ان تجربات اور ان کے نتائج کا کچھ بیان انون کی کتاب "اشیا کا امتحان" میں ملیگا۔

فنِ ہوابازی کے سلسلے میں چوبینے کے امتحانات پر بہت توجہ کی گئی ہے اور اس کے متعلق معلومات پروفیسر[لہ] جنکن کی رپورٹ "ہوابازی میں استعمال ہونے والے تعمیری مسالے" کے باب دہم میں ملینگی۔ یہ رپورٹ پروفیسر اینڈریو دابرٹسن کی تحقیقات پر مبنی ہے اور انگلستان کے سرکاری دفتر سے صادر سے (۱۹۲۰ء میں) اور نیز ہوابازی کی مشیر کمیٹی کی رودادوں میں شائع ہوئی ہے۔ بہت سے امتحانات ممالک متحدہ امریکہ میں وہاں کے سررشتہ زراعت نے کیے ہیں اور ان کے نتائج ان کے رسالہ نمبر ۵۵۶ میں ملینگے۔ اس رسالے کے اعداد و شمار جو تقریباً ایک لاکھ ۳۰ ہزار امتحانات پر مبنی ہیں دفتر معیارات (سررشتہ تجارت ممالک متحدہ امریکہ) کی گشتی نشان ۱۰۱ میں دیے گئے ہیں۔

۱۹۶۔ تنشی امتحانات — چوبینے کے تنشی امتحانات دو سببوں سے قابلِ اطمینان نہیں پائے گئے۔ سوائے اس صورت کے کہ ریشہ بہت سیدھا ہو امتحانی ٹکڑے کو ریشے کے بالکل متوازی قطع کرنا ممکن نہیں۔ اگر ریشہ تناؤ کی سمت سے مائل ہو تو شکستگی جز کی وجہ سے واقع ہوگی اور ناکارگی کی وجہ طولی طبقوں کی جانبی چپک کا بہت خفیف ہونا ہے۔ امتحانی ٹکڑوں کو پکڑنے

ہ Bauschinger   لہ Prof. C. F. Jenkin

کے لیے سروں کو بہت بڑا رکھنا پڑتا ہے ورنہ ناکارگی یا تو اس طرح ہو جاتی ہے کہ سرے ریشوں کے علی القوائم کچلے جاتے ہیں یا ریشوں کے متوازی جز ہو جاتا ہے ۔ سرے بہت بڑے ہوں تو شکستگی کے لیے تراش چھوٹی رہ جاتی ہے اور شکستگی کے لیے بڑی تراشیں لینے کا فائدہ اوپر بیان کیا جا چکا ہے ۔ چوبینے کے تناؤ کے امتحانات زیادہ عملی اہمیت نہیں رکھتے کیونکہ تعمیروں میں چوبینہ بہت ہی شاذ تناؤ سے ٹوٹیگا ۔ عموماً اس میں جز یا پھٹاؤ واقع ہوگا ۔ تنشی شکستگی کی مزاحمت ریشوں میں بہت زیادہ ہوتی ہے ۔ بعض اوقات اس کی قیمت ۱۰ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ ہوتی ہے ۔

مختلف چوبینوں میں راست لچک کے مقیاس کا اختلاف ان کے انتہائی تنشی استحکام کے اختلاف کے بہت مماثل ہے اور زور اور فساد کی تناسبیت کی حد تقریباً انتہائی مضبوطی پر واقع ہوتی ہے ۔ درخت گرانے کے تین مہینے کے بعد امتحانات کرکے باؤشنگر نے معلوم کیا کہ جاڑوں میں قطع کیا ہوا چوبینہ دھوپوں میں قطع کیے ہوئے چوبینے سے تقریباً ۲۵ فی صدی زیادہ مضبوط ہوتا ہے ۔
لیکن یہ اختلاف رُتیائی سے بہت تیزی کے ساتھ دُور ہو گیا ۔ صفحہ ۵۴۲

ذیل کے اعداد سے چوبینے کی مختلف قسموں کے ریشوں کی سمت کے تنشی استحکام اور ینگ کے مقیاس کا کچھ اندازہ ہو جائیگا :-

	تنشی استحکام ٹن فی مربع انچ	ینگ کا مقیاس ہے ٹن فی مربع انچ
شاہ بلوط (برطانوی)	۴ تا ۸	۶۵۰
ایش (Ash)	۲ تا ۷	۷۰۰
ایلم	۲ تا ۶	۵۰۰
ساگوان	۲ تا ۷	۱۰۰۰
زرد صنوبر	۱ تا ۲	۷۰۰
سرخ صنوبر	۲ تا ۶	۷۰۰
سپروس (spruce)	۲ تا ۳	۶۰۰

۱۹۷- فشاری امتحانات

چھوٹے کندوں کا ریشوں کی سمت میں فشاری امتحان چوبینے کے وصف کی جانچ کا ایک عمدہ ذریعہ ہے۔ ناکارگی عموماً اس طرح واقع ہوتی ہے کہ ریشے مقامی طور پر ایک اندرونی سطح پر خم ہوجاتے ہیں جو دباؤ کی سمت سے مائل ہوتی ہے۔

لمبے فشاری ٹکڑے خم ہوتے ہیں اور خماؤ کے امتحان کی طرح ناکارہ ہوتے ہیں۔ چوبی داب روکوں کے بہت سے امتحانات کے نتائج لانزا[۱] کی "اطلاقی میکانیات" میں ملینگے۔

کچل مضبوطی ریشوں کے علی القوائم ریشوں کی سمت سے بہت کم ہوتی ہے۔ ناکارگی کا کوئی معین نقطہ نہیں اور جانسن نے اپنے امتحانات میں جائز فساد کی حد کو کھانچوں کا ۳ فی صدی اور ناکارگی کو ۱۵ فی صدی مانا۔

ذیل کے اعداد سے چوبینے کی مختلف اقسام کی ریشوں کی سمت کی کچل مزاحمت کا کچھ اندازہ ہوگا:-

شاہ بلوط	۲ تا ۴ ٹن فی مربع انچ
ایش	۴ " " "
زرد صنوبر	۲ تا ۲½ " " "
سرخ صنوبر	۴ تا ۵ " " "

۱۹۸- خماؤ کے امتحانات

خماؤ کا امتحان چوبینے کا سب میں عام امتحان ہے کیونکہ آسانی سے کسی پیچیدہ آلے کے بغیر کیا جاسکتا ہے۔ لمبے ٹکڑے لینے سے خاصی بڑی تراشوں پر امتحان کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ لچک کا مقیاس بہت زیادہ نہیں اس لیے انصراف بڑے ہوتے ہیں اور آسانی سے ناپے جاسکتے ہیں۔ خماؤ کے امتحانات میں شہتیر آزادانہ سہارے

---

[۱] Lanza

ہوئے اور تراش عموماً مستطیلی اور بوجھ مرکزی لیا جاتا ہے اور سہاروں اور بوجھ کے مقامات کو مقامی کھانچے (Indentation) پیدا ہو جانے سے اس طرح محفوظ رکھتے ہیں کہ دھاتی تختیاں استعمال کی جاتی ہیں جو قوت کو پھیلا دیتی ہیں۔ ناکارگی تناؤ، فشار یا رتیتوں کے متوازی طولی جزکی وجہ سے پیدا ہو سکتی ہے۔ خماؤ میں طولی جزی زور ہمیشہ موجود رہتا ہے (دیکھو دفعہ ۷۱)۔ شکستگی کا مقام اور طور عموماً کسی گرہ یا کسی دوسرے نقص کی موجودگی سے قرار پاتا ہے۔ پروفیسر جانسن اپنے ذاتی اور پروفیسر لانزا کے کیے ہوئے امتحانات کی رُو سے اس کو اغلب خیال کرتے ہیں کہ ایسے مستطیلی چوبی شہتیروں میں جن کا طول بوجھ کے یکساں پھیلے ہونے کی صورت میں گہرائی کا ۲۰ گنا اور وسط میں مرتکز ہونے کی صورت میں ۱۰ گنا ہو ناکارگی طولی جزکی وجہ سے واقع ہوگی اور ابعاد کے تناسب کو اسی مفروضے پر مبنی رکھنا چاہیے۔ ایسے شہتیروں کے لیے مجموعی بوجھ طول پر منحصر نہیں ہوگا۔ طول مذکورہ بالا تناسب سے زیادہ ہو تو ناکارگی طولی راست خماؤ کے زور کی وجہ سے ہوگی کیونکہ خماؤ کا راست زور طول کے ساتھ بڑھتا ہے۔ صفحہ ۵۴۳

چوبینے کے خماؤ کے امتحانات میں مضبوطی کے متعلق جو چیز سب میں زیادہ بالعموم ناپی جاتی ہے وہ "انشقاق کا مقیاس" (دیکھو دفعہ ۴۷) یا خماؤ کی مضبوطی کی قدر ہے یعنی

$$ز = \frac{۳}{۲} \frac{و ل}{ض ق^۲}$$ (دیکھو (۶)، دفعہ ۶۳، اور دفعہ ۶۶)

ہے۔ جہاں و وسطی شکستی بوجھ، ل فصل اور ض اور ق مستطیلی تراش کی چوڑائی اور گہرائی ہیں۔ تمام ابعاد انچوں میں ہیں اور ز اور و دونوں میں قوت کی وہی اکائی استعمال کی گئی ہے۔

خماؤ کے امتحانات میں انصراف اور بوجھ کی تناسبیت انتہائی بوجھ کے

ل Prof: Lanza

ج Prof: Johnson

ایک بڑے حصّے تک پائی جاتی ہے۔ اس بوجھ سے جو زور اوپر کی طرح ($\frac{۳}{۲}\frac{ول}{ض ق^۲}$) محسوب کیا جائے وہ اس انتہائی لچک مضبوطی کے مطابق ہوتا ہے جو ریشوں کے متوازی راست لچلاؤ کے امتحان کے ذریعے حاصل ہوتی ہے۔

خماؤ کے امتحانوں سے جو ینگ کا مقیاس حاصل ہوتا ہے وہ لچک مضبوطی اور خماؤ کی مضبوطی یا انشقاق کے مقیاس کے ساتھ بڑھتا ہے اور بوجھوں اور انحرافوں کو تناسبیت کی حد کے اندر ترسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ باؤشنگو کا خیال ہے کہ یہ لچک کا مقیاس چوبینے کے تعمیری اغراض کے لیے مفید ہونے کا ایک عمدہ پیمانہ ہے۔ ذیل کے اعداد سے چوبینے کی مختلف اقسام کے لیے "انشقاق کے مقیاس" یا خماؤ کی مضبوطی کی قدر کی اوسط قیمتیں معلوم ہونگی۔

ایش		۵ تا ۶ ٹن فی مربع انچ
ایلم		۴ تا ۵ " " "
شاہ بلوط		۵ تا ۶ " " "
زرد صنوبر	(امریکی)	۴ تا ۵ " " "
سُرخ صنوبر	(")	۳ تا ۴ " " "
ساگوان		۶ تا ۸ " " "
سپروس		۴ تا ۵ " " "

۱۹۹- جزی امتحانات —— چونکہ کسی مستوی کے جزی زور کے ساتھ اس کے علی القوائم بھی جزی زور موجود رہتا ہے اس لیے چوبینے کا جز ہمیشہ ریشوں کے متوازی واقع ہوتا ہے۔ جز سے ریشے علٰحدہ ہو جاتے ہیں ٹوٹتے نہیں۔ یہ پہلے کہا گیا ہے، کہ چوبی شہتیروں میں ناکارگی کا یہ طور بہت عام ہے۔ مستطیلی تراش کے تعدیلی محور پر جزی زور دفعہ ۱۷۱ کی رُو سے

$$\frac{۳}{۲}\frac{ق}{ض گ} \quad \text{..................} \quad (۱)$$

ہوتا ہے جہاں ق ایک تراش پر کا جزی زور ہے جس کا عرض ض اور گہرائی گ ہے۔ سروں پر سہارے ہوئے شہتیر پر ایک مرکزی بوجھ و کی صورت میں یہ حسبِ ذیل ہوگا:-

$$\frac{3}{4} \frac{و}{ض\,گ} \quad \text{.................} \quad (۲)$$

ریشوں کے متوازی جز کے راست تجربات سے زیادہ مضبوطی حاصل ہوتی ہے بہ نسبت اُس قیمت کے جو شہتیروں کی جزی ناکارگی سے (۲) سے محسوب ہو اور یہ ہونا بھی چاہیے اس لیے کہ جزی تجربات میں جز کا مستوی یوں ہی انتخاب کر لیا جاتا ہے اور خاؤ کے امتحانات میں ناکارگی حقیقی کم زور ترین مقام یعنی تعدیلی مستوی کے قریب واقع ہوتی ہے۔ جہاں کہ جزی زور کی حدت اعظم ہوتی ہے۔ صفحہ ۵۲۴

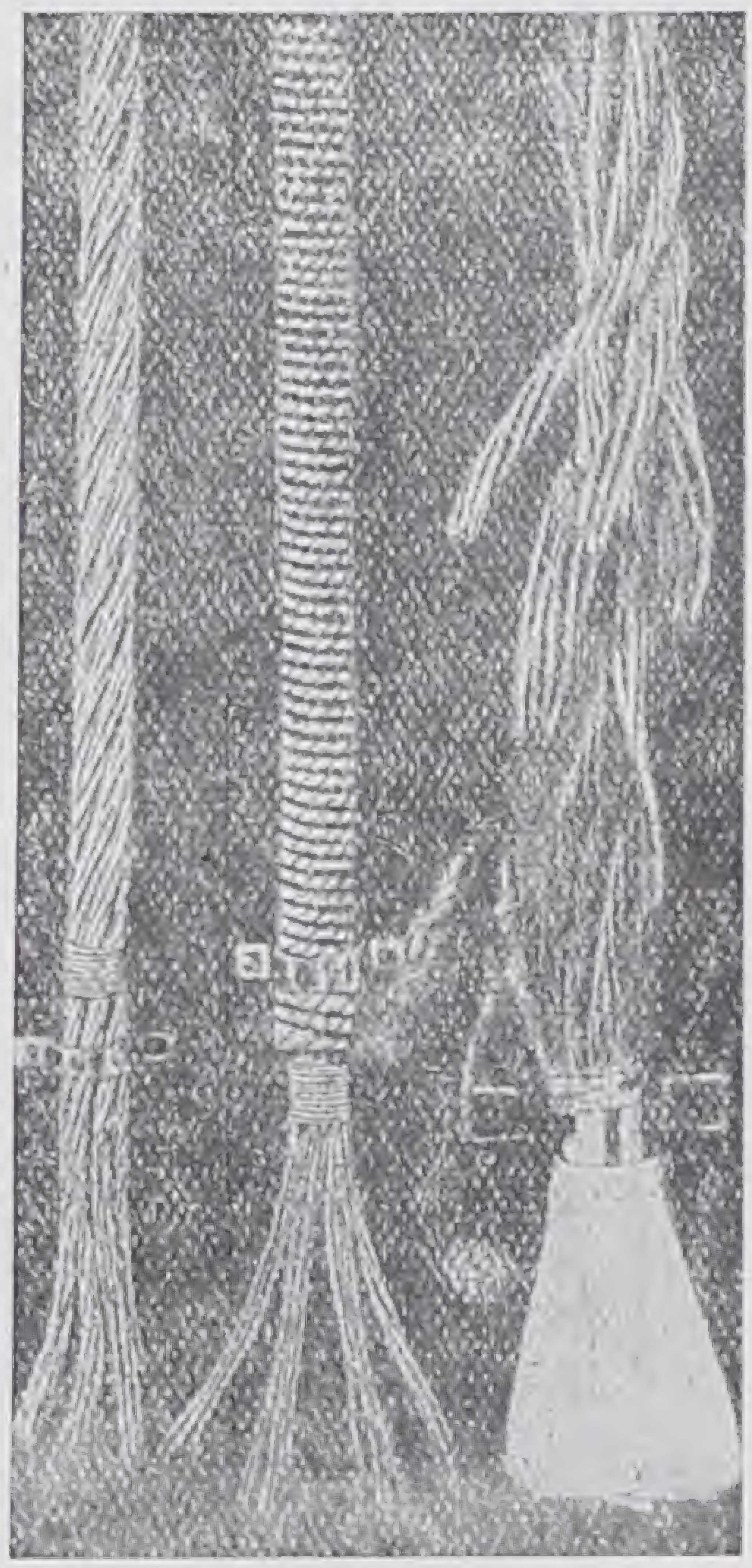
واٹر ٹاؤن[ف] کے توپ خانے میں ریشوں کے متوازی جزی مضبوطی کے جو امتحانات کیے گئے اُن سے حسبِ ذیل مضبوطیاں حاصل ہوئیں:-

ایش	۴۵۸ تا ۷۰۰ پونڈ فی مربع انچ
شاہ بلوط	۷۲۶ تا ۹۹۹ " " "
زرد صنوبر	۲۸۶ تا ۴۱۵ " " "
سپروس	۲۵۳ تا ۳۷۴ " " "

۲۰۰ - چوبینے کا طویل لداؤ — بھاری بوجھوں کے تحت چوبینے میں فساد مسلسل بڑھتا ہی جاتا ہے اور جو بوجھ کہ جلد شکستگی پیدا کرتے ہیں اُن کے نصف سے کچھ ہی زیادہ اس کے لیے کافی ہوتے ہیں کہ دیر تک عمل کر کے شکستگی پیدا کریں۔ شکستگی کے لیے جو عرصہ درکار ہوتا ہے وہ بوجھ کے گھٹنے سے بڑھتا ہے۔ معمولی امتحان سے جو شکستگی بوجھ حاصل ہوتا

ف Watertown

ہے اُس کے نصف کے لیے یہ عرصہ لا تناہی ہو جاتا ہے یعنی اُتنا بوجھ بغیر شکستگی کے مستقل طور پر برداشت کیا جا سکتا ہے۔



شکل ۲۴۲ - تار کی رسیوں کو ٹوپن پہنانے کا طریقہ
(گُڈمین کی کتاب "علم میکانیات کا اطلاق انجینیری میں" سے)

۲۰۱ - تار کی رسیوں کی مضبوطی

کشیدہ تار کا تننشی استحکام بہت بڑھا ہوا ہوتا ہے اور ان کی رسی بنا کر ان سے بھاری بوجھوں کے لیے کام لیا جاتا ہے۔ خم پذیر ہونے کے علاوہ جس کی وجہ سے فولادی تار کی رسیوں کو چرخیوں کے گرد لپیٹا جا سکتا ہے ان رسیوں کی مضبوطی اسی تراش اور وزن کی فولادی سلاخوں سے بہت زیادہ ہوتی ہے۔ علٰحدہ تاروں اور بٹی ہوئی رسیوں کے تننشی امتحانات سے ظاہر ہوتا ہے کہ رسی کے اندر تاروں کی پوری مضبوطی نہیں پیدا ہوتی۔ اس کی وجہ غالباً زیادہ تر یہ ہے کہ رسی میں بعض تار ابتداءً دوسرے تاروں سے ہلکے ہوتے ہیں اور اس طرح بوجھ کا ایک غیر واجبی حصہ برداشت کرتے ہیں۔

تار کی رسیوں کے تننشی امتحانات میں اس کا خیال رکھنا چاہیے کہ سروں کو گرفت کرتے وقت صدمہ نہ پہنچایا جائے ورنہ گرِپ ڈانک پر شکستگی واقع ہوگی۔ ایک بہت اطمینان بخش طریقہ جس کی پروفیسر گُڈمین نے سفارش کی ہے شکل ۲۴۲ میں دکھایا گیا ہے۔ رسی کو دونوں سروں سے تقریباً ۵ انچ کے

ه Socket

فاصلے پر ایک باریک تار سے کس کر باندھ دیتے ہیں اور ان بندشوں کے درمیان کے طول کو ڈامر دار پٹیاں کس کر لپیٹ دی جاتی ہیں تاکہ تار اپنی جگہ برقرار رہیں۔ اب سروں کو کھول کر اور رگڑ کر صاف کیا جاتا ہے اور تاروں کے سروں کو آنکڑوں کی شکل میں موڑ دیا جاتا ہے۔ پھر سیسے اور اینٹی منی کی ایک سخت بلونی کو ان سروں پر ایک مخروطی ٹوپ کی شکل میں ڈھالا جاتا ہے اور ان ٹوپوں کو امتحانی مشین کی بھنور کلبوں میں مخروطی ٹھپے کے ٹکڑوں میں جکڑا جاتا ہے۔ انھی مخروطی ٹھپوں سے ان ٹوپوں کو ڈھالنے میں سانچوں کا کام بھی لیا جاسکتا ہے۔

صفحہ ۵۴۵

ضمیمہ

ایک اکیلے مدور سوراخ کی تختی میں تناؤ ـــــ کسی خاص کامی زور کی حدت کو استعمال کرتے وقت جو قدرِ سلامتی یا سلامتی کی گنجائش اختیار کی جاتی ہے اُس کے اختیار کرنے میں یہ اکثر فرض کیا جاتا ہے کہ زیرِ بحث مشینوں یا تعمیری ارکان میں زور کی تقسیم یکساں ہے ۔ اس کی مثال ایک بندھن سلاخ یا ایک تختی ہے جو سادہ تناؤ میں ہو۔ لیکن در اصل تراش کی کسی یکایک تبدیلی کے پاس تناؤ کی صحیح تقسیم کو محسوب کرنا مشکل بلکہ اکثر ناممکن ہوتا ہے ۔ مثلاً رِیوٹایا ہوا جوڑ کتنی ہی احتیاط کے ساتھ کیوں نہ تیار کیا گیا ہو اُس میں "کامی" زور کی حدت کے لیے ایک قرار دادہ تخمینے یا اوسط حدت سے زیادہ صحت کا دعویٰ نہیں کیا جا سکتا ۔ ایسی صورتوں میں زور کی تقسیم مقابلتاً کتنی پیچیدہ ہوتی ہے اس کا اندازہ ذیل کے حساب سے ہوگا جو ایک بہت آسان صورت میں زور کی تقسیم کے لیے کیا گیا ہے یعنی ایک ایسی تختی جس میں ایک اکیلا مدور سوراخ ہو اور جو اس سوراخ سے قطع نظر یکساں تناؤ کے تحت ہو۔

ایک ایسی پتلی چوڑی تختی کے زوروں کی جس میں ایک واحد استوانی سوراخ ہو جس کا محور تختی کے علی القوائم ہو تحقیق کی جا چکی ہے اور ایک اس سے زیادہ عام بحث بھی مسٹر اِنگلس نے شائع کی ہے جس میں ایک ایسی تختی سے بحث کی گئی ہے جس میں

ـہ Mr. C. Inglis

ایک ناقصی (elliptical) سوراخ ہو جو انتہائی صورت میں ایک لمبی تڑاق ہو سکتا ہے۔ یکساں تناؤ کے تحت ایک اکیلے مدور سوراخ کی تختی کی ذیل کی آسان بحث کے لیے مصنف مسٹر ساوتھ ول کا ممنونِ منت ہے۔

زوروں کے لیے جو ترقیم اختیار کی گئی ہے وہ وہی ہے جو عام ترین قسم کے زور کی صورت میں یعنی اس صورت میں مستعمل ہے جس میں تین علی القوائم محاور کے کسی خاص انتخاب سے زور کے کئی اجزائے ترکیبی لازماً صفر نہیں ہوتے۔ موجودہ مسئلے میں اس ترقیم کا جو استعمال کیا گیا ہے اس سے زور کی تقسیم کے زیادہ عام مسائل کو سمجھنے میں آسانی ہوگی۔ اتنا کہنے سے اس ترقیم کی کافی توضیح ہو جائیگی کہ اگر تین باہم علی القوائم محاور ہ لا، ہ ما، ہ ی (شکل ۲۴۵) انتخاب کیے جائیں تب کسی زور کے کسی جزوِ ترکیبی کو لا، ما، ی میں سے دو حروف کے اوپر ایک قوس بنا کر تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ پہلے حرف سے اُن مستویوں کے عمادوں کی سمت معلوم ہوگی جن پر زور کا یہ جزوِ ترکیبی عمل کرتا ہے اور دوسرے حرف سے اس زور کی سمت معلوم ہوگی۔ مثلاً لالا سے ایک زور تعبیر ہوتا ہے جو ہ لا کے علی القوائم مستوی (یعنی مستوی ما ی) پر عمل کرتا ہے اور سمت ہ لا میں ہے۔ یعنی اس سے ایک راست عمادی زور تعبیر ہوتا ہے۔ اسی طرح لاما سے مراد ایسا زور ہے جو مستوی ما ی پر سمت ہ ما میں عمل کرتا ہے۔ یعنی ایک جزی زور مراد ہے۔ اس ترقیم سے اور کتاب ہذا کی دفعہ ۸ سے ظاہر ہے کہ

لاما = مالا، مای = یما اور یلا = لای

اس بحث سے یہ دکھانا مقصود ہے کہ ایک سوراخ کے گرد و پیش تختی کے زوروں کی شدت کیا ہو جاتی ہے۔ ہم ایک مستطیلی شکل کی تختی پر غور کرینگے جس پر ایک یکساں منقسم تناؤ متوازی پہلوؤں کے ایک جوڑے کی سمت میں عمل کرتا ہے اور جس میں ایک اکیلا مدور سوراخ کیا گیا ہے جس کے فاصلے پہلوؤں سے سوراخ کے ابعاد کے مقابلے میں بڑے ہیں۔ صفحہ ۵۴۶

اس مسئلے پر ایک عام بحث کرتے ہیں ممکنہ سہولت پیدا کرنے کے لیے تختی کو یہ سمجھا جا سکتا ہے کہ پتلے پرتوں پر مشتمل ہے جن پر زور بالکل ایک جیسا ہے۔ تب چونکہ کوئی وجہ نہیں کہ پرت ایک دوسرے پر کوئی قوت لگائیں اس لیے ہم فرض

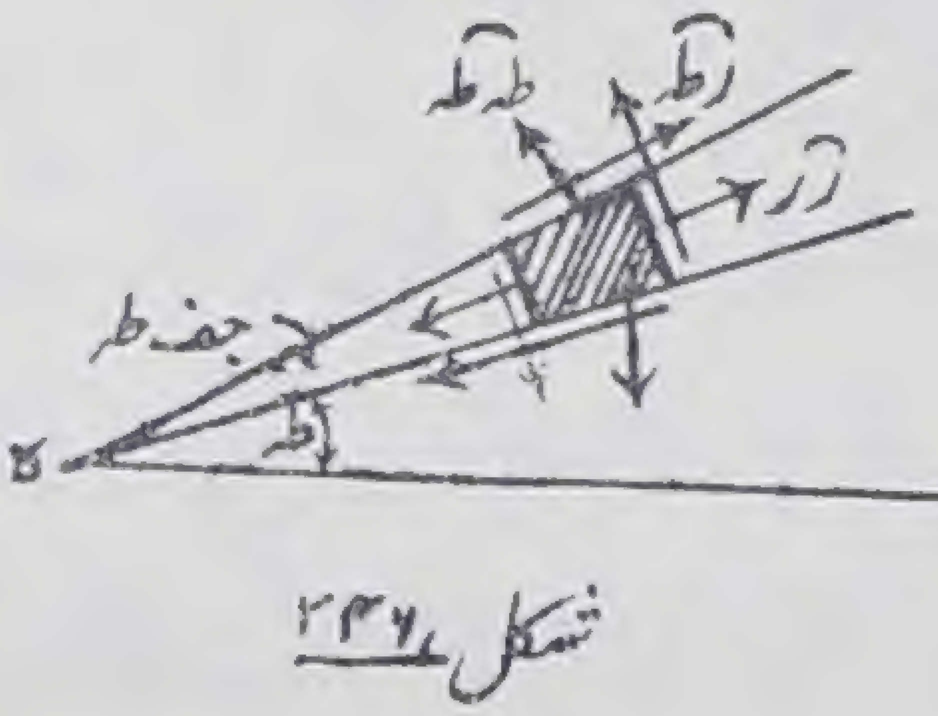
کر سکتے ہیں کہ زوری ی ی (شکل ۲۴۵) ساری تختی میں صفر ہے اور نیز جزی زوری لا لا اور ما ما بھی جو تختی کے چہروں کے متوازی مستویوں پر عمل کرتے ہیں صفر ہیں۔

اس طرح اب صرف

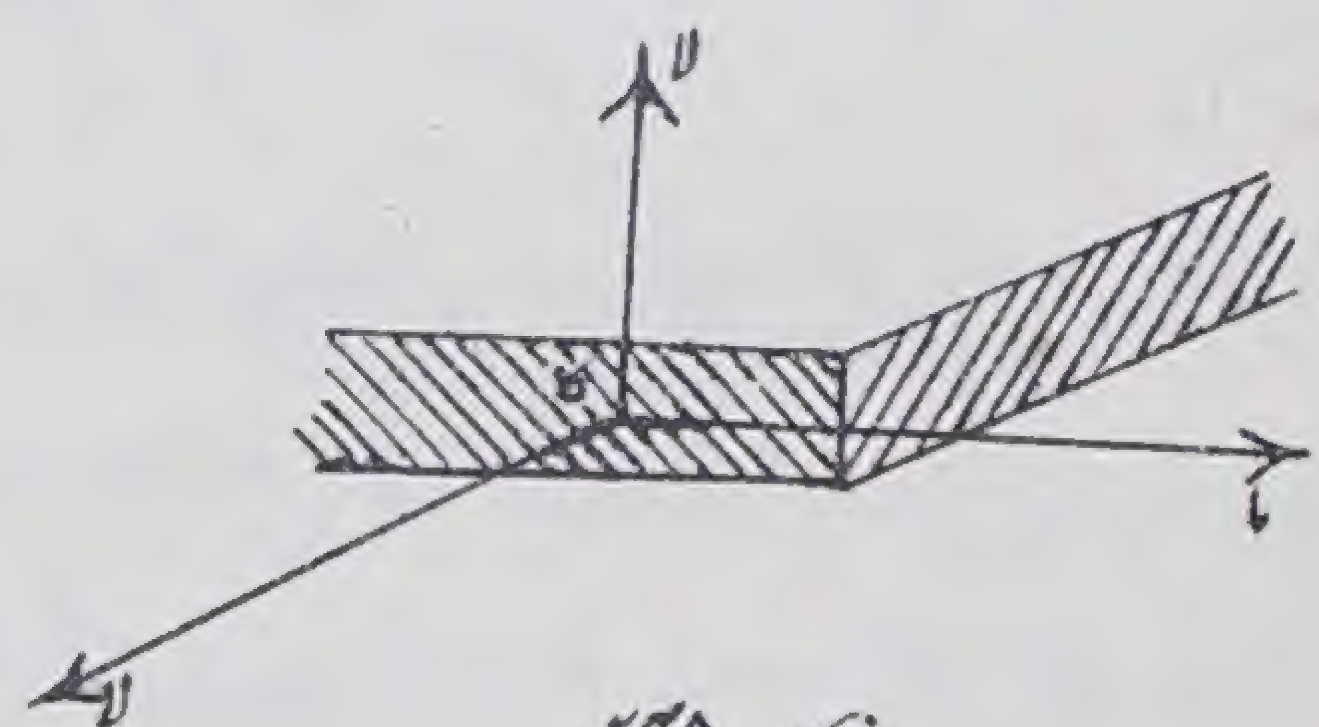
لا لا، ما ما اور لا ما

پر غور کرنا باقی رہ جاتا ہے اور کسی ٹکڑے کے تعادل کی شرط سمت ی ی میں خود بخود پوری ہو جاتی ہے (یعنی اس شرط سے ایک مساوات متماثلہ حاصل ہوتی ہے)۔ ہم اب تعادل کی باقی مساواتیں حاصل کرینگے۔ موجودہ اغراض کے لیے استوانی محدد استعمال کرنا بہتر ہوگا اور محور مدور سوراخ کا محور لیا جائیگا۔

فرض کرو کہ ی (شکل ۲۴۶) سطحی خاکے میں سوراخ کے محور کو تعبیر کرتا ہے اور فرض کرو کہ ی لا تختی کی وسطی سطح کے مستوی میں کوئی ثابت سمت ہے۔ آسانی کے لیے ہم اس کو تختی پر کی حاصل کھینچ کی سمت میں لینگے۔



شکل ۲۴۶



شکل ۲۴۵

زور رر، طہ طہ، اور ر طہ ہونگے جیسا کہ شکل ۲۴۶ میں دکھایا گیا ہے۔

ہم سایہ دار ٹکڑے کے تعادل پر غور کرینگے۔ اس ٹکڑے پر جو مختلف قوتیں عمل کر رہی ہیں اُن کو لکھنے سے نیم قطری سمت کے لیے

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ر}}\left[\text{ر} \times \text{رر}\right] + \frac{\text{جف ر طہ}}{\text{جف طہ}} - \text{طہ طہ} = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

حاصل ہوتا ہے اور علی القوائم سمت کے لیے

$$\frac{\text{جف طہ طہ}}{\text{جف طہ}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ر}}\left[\text{ر} \times \text{ر طہ}\right] + \text{ر طہ} = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

نیز اگر و اور ء کسی نقطے کے ہٹاؤ نیم قطری سمت میں اور طہ کے بڑھنے کی سمت میں ہوں تو (۱) دفعہ ۱۹ کی مدد سے زور اور فساد کے ذیل کے ربط حاصل ہونگے:۔

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}} = \text{نیم قطری تطول} = \frac{۱}{\text{ے}}\left[\widehat{\text{رر}} - \frac{۱}{\text{م}}\widehat{\text{طہ طہ}}\right] \quad \text{.........} (۳)$$

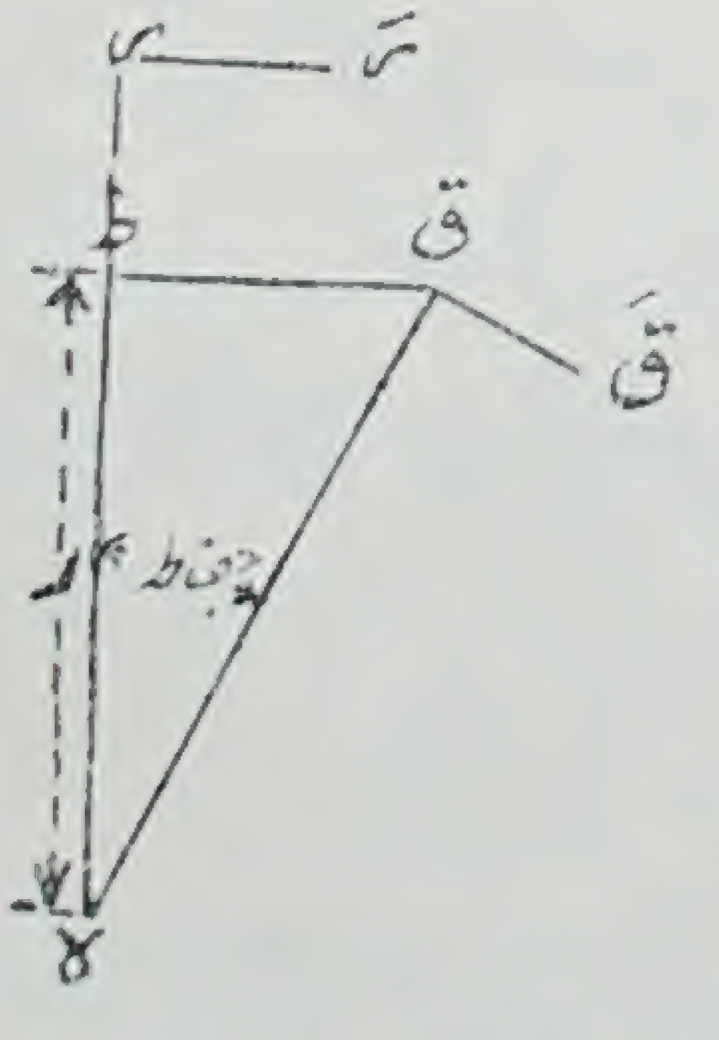
$$\frac{\text{و}}{\text{ر}} + \frac{۱}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ء}}{\text{جف طہ}} = \text{''محیطی تطول''} = \frac{۱}{\text{ے}}\left[\widehat{\text{طہ طہ}} - \frac{۱}{\text{م}}\widehat{\text{رر}}\right] \quad \text{.........} (۴)$$

$$(۵)\ \cdots \begin{cases} \dfrac{\text{جف ء}}{\text{جف ر}} - \dfrac{\text{ء}}{\text{ر}} + \dfrac{۱}{\text{ر}}\,\dfrac{\text{جف و}}{\text{جف طہ}} = \text{جزی فساد} = \dfrac{\widehat{\text{رطہ}}}{\text{س}} \\ = ۲\left(۱ + \dfrac{۱}{\text{م}}\right)\dfrac{\widehat{\text{رطہ}}}{\text{ے}} \end{cases}$$

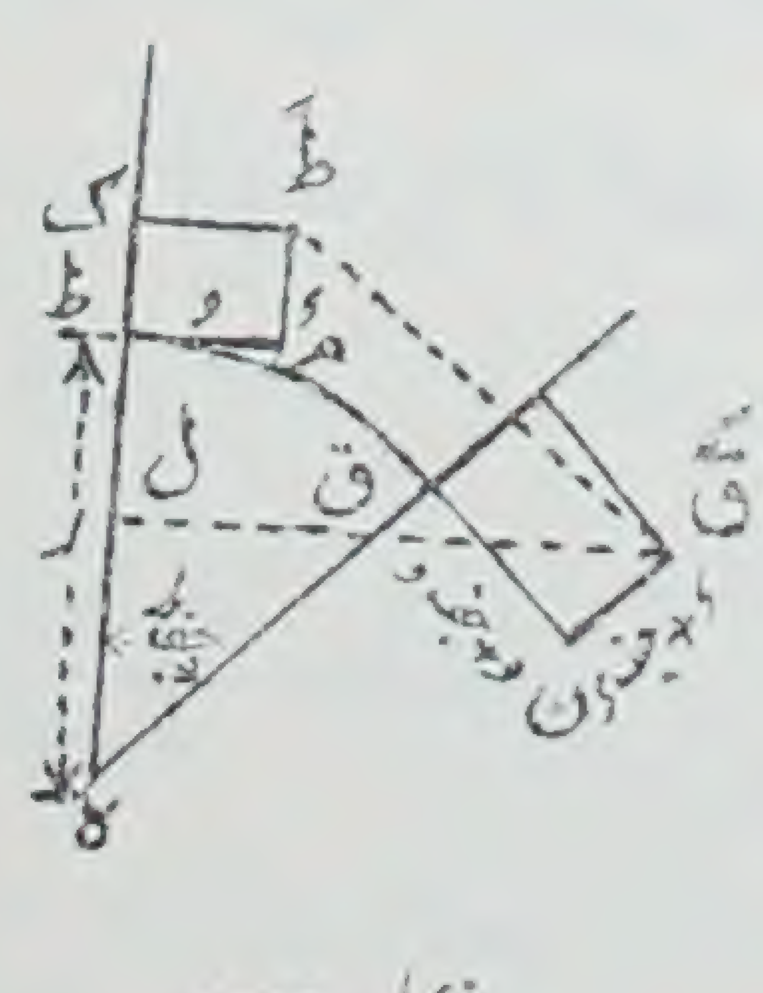
جہاں س اُستواری کا مقیاس اور ے ینگ کا مقیاس ہے (دیکھو (۱) دفعہ ۱۳)۔

نیم قطری تطول کے جملہ $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}}$ سے طلبہ مانوس ہونگے (دیکھو (۵) دفعہ ۱۲۶)

اور نیز ''محیطی'' تطول کے جملے کی رقم $\frac{\text{و}}{\text{ر}}$ سے بھی مانوس ہونگے (دیکھو (۴) دفعہ ۱۲۶)۔ یہاں (۴) میں جو مکمل جملہ حاصل ہوتا ہے وہ طَ قَ کو طہ ق کی رقوم میں بیان کرنے سے حاصل ہوتا ہے (دیکھو شکل ۲۴۷ جس میں جف طہ بہت مبالغے کے ساتھ دکھایا گیا ہے)۔ صفحہ ۵۴۷



شکل ۲۴۸



شکل ۲۴۷

و اور ی کو بہت چھوٹا اور جف ط کو انتہا میں بے انتہا چھوٹا (یعنی جب جف ط = جف ط اور جم جف ط = ۱) سمجھنے سے حسب ذیل مساواتیں حاصل ہونگی :—

$$\text{طق} = \text{ر} \times \text{جف ط}$$

$$\text{طَقَ} = \sqrt{(\text{قَل} - \text{مط})^{2} + (\text{ہَک} - \text{ہَل})^{2}}$$

$$= \text{ر} \times \text{جف ط} \sqrt{\left\{1 + \frac{\text{و}}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ط}}\right\}^{2} + \left\{\frac{\text{ی}}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ط}}\right\}^{2}}$$

$$= \text{طق}\left(1 + \frac{\text{و}}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ط}}\right)$$

جہاں دوسرے رُتبے کی رقموں کو نظر انداز کردیا گیا ہے ۔ اس طرح محیطی نطول

$$= \frac{\text{طَقَ}}{\text{طق}} - 1 = \frac{\text{و}}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ط}}$$

جزی فساد کا جملہ اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ ابتدائی علی القوائم زاویہ ق ط ہ میں فساد سے پیدا ہونے والی تبدیلی کے لیے جملہ لکھا جائے ۔ اگر تینوں نقطوں ط، ق اور ہ (شکل ۲۴۸) میں ایک مساوی ہٹاؤ ی واقع ہوتا تو خط ط ق بقدر زاویہ $\frac{\text{ی}}{\text{ر}}$ کے گھوم جاتا اور زاویہ ہ ط ق میں اسی قدر اضافہ ہوتا ۔ اس کے برخلاف اگر ہ اور ط کے لیے ی مساوی نہ ہو تو زاویہ بقدر $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ر}}$ کے گھٹ جائیگا ۔ اور اگر ط اور ق کے لیے و مساوی نہ ہو تو بقدر $\frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ط}}$ کے گھٹ جائیگا ۔ اس طرح صفحہ ۵۴۸
حاصل گھٹاؤ جو جزی فساد کے مساوی ہے حسب ذیل ہوگا :—

$$\frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ط}} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ر}} - \frac{\text{ی}}{\text{ر}}$$

جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا ہے ۔

(۳) اور (۴) سے ایک بار ط ط اور ایک بار ر ر کو ساقط کرنے سے :—

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}} + \frac{1}{\text{م}}\left(\frac{\text{و}}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ط}}\right) = \left(1 - \frac{1}{\text{م}^2}\right)\frac{\text{زر}}{\text{ے}} \quad \ldots\ldots (6)$$

اور

$$\frac{\text{و}}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ط}} + \frac{1}{\text{م}}\cdot\frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}} = \left(1 - \frac{1}{\text{م}^2}\right)\frac{\text{طط}}{\text{ے}} \quad \ldots\ldots (7)$$

(۵)، (۶) اور (۷) سے زر، طط اور رط کی قیمتیں (۱) اور (۲) میں درج کرنے سے :-

$$\text{ر}\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف ر}^2} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}} - \frac{\text{و}}{\text{ر}} + \frac{\text{م}-1}{2\text{م}}\frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف ط}^2} + \frac{\text{م}+1}{2\text{م}}\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ر جف ط}}$$

$$- \frac{3\text{م}-1}{2\text{م}}\frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ط}} = 0 \quad \ldots\ldots (8)$$

اور

$$\frac{\text{م}+1}{2\text{م}}\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف ر جف ط}} + \frac{3\text{م}-1}{2\text{م}}\frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ط}} + \frac{\text{م}-1}{2\text{م}}\left(\text{ر}\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ر}^2}\right.$$

$$\left. + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ر}} - \frac{\text{ی}}{\text{ر}}\right) + \frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ط}^2} = 0 \quad \ldots\ldots (9)$$

یہ ہمارے مسئلے کی بنیادی تفرقی مساواتیں ہیں - ہم کو و اور ی کے لیے ایسے جملے معلوم کرنا ہیں جن سے (۸) اور (۹) ہر نقطے پر پورے ہوں اور اس کے علاوہ سوراخ کے کنارے پر (جو ر = ا سے تعبیر ہوتا ہے جہاں ا سوراخ کا نصف قطر ہے)

$$\text{زر} = 0 \quad \text{اور} \quad \text{رط} = 0 \quad \ldots\ldots (10)$$

ہونا چاہیے -

ہم حل کے لیے حسب ذیل شکل فرض کریں گے :-

$$\left.\begin{aligned} \text{و} &= \tilde{\text{و}}\ \text{جم}\,(\text{ک ط} + \text{عی}) \\ \text{ی} &= \tilde{\text{ی}}\ \text{جب}\,(\text{ک ط} + \text{عی}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (11)$$

جہاں ک ایک صحیح عدد ہے، عی ایک اختیاری مقدار ہے اور وٓ اور یٓ صرف ر کے تفاعل ہیں - (۸) اور (۹) میں درج کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ (۱۱) سے ایک ممکن حل

حاصل ہوگا اگر :—

$$\text{ر}\frac{\text{فر}^2\,\text{وی}}{\text{فر ر}^2}+\frac{\text{فر وی}}{\text{فر ر}}-\left(1+\frac{\text{م}-1}{2\text{م}}\text{ک}^2\right)+\text{ک}\left(\frac{\text{م}+1}{2\text{م}}\frac{\text{فر عی}}{\text{فر ر}}\right.$$

$$\left.-\frac{3\text{م}-1}{2\text{م}}\frac{\text{عی}}{\text{ر}}\right)=0 \quad \cdots\cdots (12)$$

اور

$$\text{ک}\left(\frac{\text{م}+1}{2\text{م}}\frac{\text{فر وی}}{\text{فر ر}}+\frac{3\text{م}-1}{2\text{م}}\frac{\text{وی}}{\text{ر}}\right)-\frac{\text{م}-1}{2\text{م}}\left(\text{ر}\frac{\text{فر}^2\,\text{عی}}{\text{فر ر}^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\text{فر وی}}{\text{فر ر}}\right)+\left(\frac{\text{م}-1}{2\text{م}}+\text{ک}^2\right)\frac{\text{عی}}{\text{ر}}=0 \quad \cdots\cdots (13)$$

اور یہ کہ احاطے کی شرائط (۱۰) متماثلاً پوری ہونگی اگر :—

$$\left.\begin{aligned}\frac{\text{فر وی}}{\text{فر ر}}+\frac{\text{وی}+\text{ک عی}}{\text{م ر}}&=0\\ \frac{\text{فر عی}}{\text{فر ر}}-\frac{\text{ک وی}+\text{عی}}{\text{ر}}&=0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (14)$$

پہلے حسبِ ذیل شکل کے ایک حل پر غور کرو :—

$$\text{وی}=\text{و.}\ ،\ \text{عی}=\text{ع.}$$

جہاں و. اور ع. صرف ر کے تفاعل ہیں۔ تب (۱۲) اور (۱۳) میں ک = ۰ رکھنے سے

$$\left.\begin{aligned}\text{ر}\frac{\text{فر}^2\,\text{و.}}{\text{فر ر}^2}+\frac{\text{فر و.}}{\text{فر ر}}-\frac{\text{و.}}{\text{ر}}&=0\\ \text{اور}\quad \text{ر}\frac{\text{فر}^2\,\text{ع.}}{\text{فر ر}^2}+\frac{\text{فر ع.}}{\text{فر ر}}-\frac{\text{ع.}}{\text{ر}}&=0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (15)$$

ان مساواتوں کا حل یہ ہے :—

$$\left.\begin{aligned}\text{و.}&=\text{ا.}\,\text{ر}+\frac{\text{ب.}}{\text{ر}}\\ \text{ع.}&=\text{ج.}\,\text{ر}+\frac{\text{د.}}{\text{ر}}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (16)$$

جہاں ا، ب، ج، د اختیاری مستقل ہیں۔ احاطے کی شرائط (۱۴) سے حسبِ ذیل ربط حاصل ہونگے :-

$$\left.\begin{aligned}(\text{۱}+\tfrac{\text{۱}}{\text{م}})\,\text{ا} &= (\text{۱}-\tfrac{\text{۱}}{\text{م}})\,\text{ب}\\ \text{اور}\qquad \text{د} &= \text{۰}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱۷})$$

اس طرح حل آخرکار یہ ہوا :-

$$\left.\begin{aligned}\text{و} &= \text{ا}\,(\text{ر}+\frac{\text{م}+\text{۱}}{\text{م}-\text{۱}}\,\frac{\text{ر}^{\text{۲}}}{\text{ر}})\\ \text{ع} &= \text{ج}\,\text{ر}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱۸})$$

جہاں ا اور ج اختیاری مستقل ہیں۔

اب حسبِ ذیل حل لو :-

$$\left.\begin{aligned}\text{و} &= \text{و}_{\text{۲}}\ \text{جم}\ (\text{۲ط}+\text{ع}_{\text{۲}})\\ \text{ع} &= \text{ع}_{\text{۲}}\ \text{جب}\ (\text{۲ط}+\text{ع}_{\text{۲}})\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱۹})$$

(ک = ۱ کو اس لیے نہیں لیا گیا کہ فی الحال یہ ہمارے مفید مطلب نہیں کیونکہ صریحاً حل ایسا ہونا چاہیے جو ایک قطر کے گرد متشاکل ہو۔)

مساواتیں (۱۲) اور (۱۳) حسبِ ذیل شکل اختیار کرتی ہیں :-

$$\left.\begin{aligned}&\text{ر}\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{و}_{\text{۲}}}{\text{فر ر}^{\text{۲}}}+\frac{\text{فر و}_{\text{۲}}}{\text{فر ر}}-\frac{\text{۳م}-\text{۲}}{\text{م}}\times\frac{\text{و}_{\text{۲}}}{\text{ر}}+\frac{\text{م}+\text{۱}}{\text{م}}\,\frac{\text{فر ع}_{\text{۲}}}{\text{فر ر}}-\frac{\text{۳م}-\text{۱}}{\text{م}}\,\frac{\text{ع}_{\text{۲}}}{\text{ر}}=\text{۰}\\ \text{اور}\ &\frac{\text{م}+\text{۱}}{\text{م}}\,\frac{\text{فر و}_{\text{۲}}}{\text{فر ر}}+\frac{\text{۳م}-\text{۱}}{\text{م}}\times\frac{\text{و}_{\text{۲}}}{\text{ر}}-\frac{\text{م}-\text{۱}}{\text{۲م}}\left(\text{ر}\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ع}_{\text{۲}}}{\text{فر ر}^{\text{۲}}}+\frac{\text{فر ع}_{\text{۲}}}{\text{فر ر}}\right)\\ &+\frac{\text{۹م}-\text{۱}}{\text{۲م}}\,\frac{\text{ع}_{\text{۲}}}{\text{ر}}=\text{۰}\end{aligned}\right\} \quad \ldots (\text{۲۰})$$

ان کو حل کرنے کے لیے فرض کرو کہ

$$\left.\begin{aligned} \text{و}_{2} &= \text{ل}\, \text{ر}^{\text{ف}} \\ \text{ع}_{2} &= \text{مہ}\, \text{ر}^{\text{ف}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (21)$$

جہاں ل اور مہ مستقل ہیں۔ تب یہ حاصل ہوگا:-

$$\left.\begin{aligned} &\text{ل}\left(\text{ف}^{2} - \frac{3\text{م}-2}{\text{م}}\right) + \text{مہ}\left(\frac{\text{م}+1}{\text{م}}\,\text{ف} - \frac{3\text{م}-1}{\text{م}}\right) = 0 \\ \text{اور}\quad &\text{ل}\left(\frac{\text{م}+1}{\text{م}}\,\text{ف} + \frac{3\text{م}-1}{\text{م}}\right) - \text{مہ}\left(\frac{\text{م}-1}{2\text{م}}\,\text{ف}^{2} - \frac{9\text{م}-1}{2\text{م}}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \cdots (22)$$

جن سے ل اور مہ کو ساقط کرکے مختصر کرنے سے

$$\left.\begin{aligned} &(\text{ف}^{2}-1)(\text{ف}^{2}-9) = 0 \\ \text{یعنی}\quad &\text{ف} = \pm 1 \ \text{یا}\ \pm 3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (23)$$

اس طرح عام حل حسبِ ذیل ہوگا:-

$$\left.\begin{aligned} \text{و}_{2} &= \text{ا}_{2}\,\text{ر} + \frac{\text{ب}_{2}}{\text{ر}} + \text{ج}_{2}\,\text{ر}^{3} + \frac{\text{د}_{2}}{\text{ر}^{3}} \\ \text{ع}_{2} &= -\text{ا}_{2}\,\text{ر} - \frac{\text{م}-1}{2\text{م}}\,\frac{\text{ب}_{2}}{\text{ر}} - \frac{3\text{م}+1}{2}\,\text{ج}_{2}\,\text{ر}^{3} + \frac{\text{د}_{2}}{\text{ر}^{3}} \end{aligned}\right\} \cdots (24)$$

جہاں ا_{2}، ب_{2}، ج_{2}، د_{2} اختیاری مستقل ہیں۔

اب احاطے کی شرائط (۱۴) سے حسبِ ذیل ربط حاصل ہونگے:-

$$\text{ا}_{2} - \left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)\frac{\text{ب}_{2}}{\text{ل}^{2}} - 3\,\frac{\text{د}_{2}}{\text{ل}^{4}} = 0$$

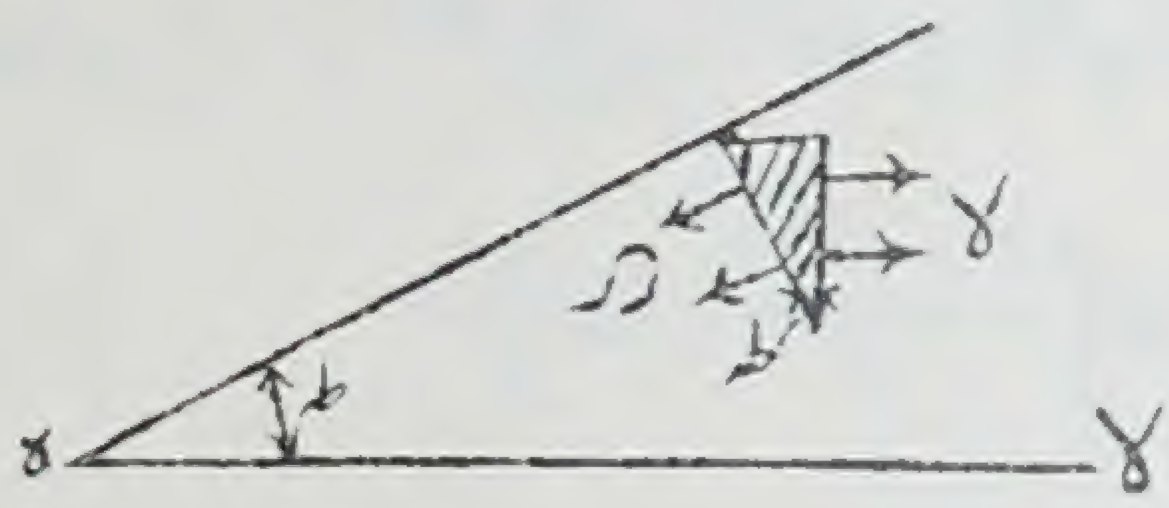
$$\text{اور}\quad \text{ا}_{2} + \left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)\frac{\text{ب}_{2}}{\text{ل}^{2}} + 3(\text{م}+1)\,\text{ج}_{2}\,\text{ل}^{2} + \frac{6\,\text{د}_{2}}{\text{ل}^{4}} = 0$$

$$\text{اور جمع سے}\quad \text{ا}_{2} + (\text{م}+1)\,\text{ج}_{2}\,\text{ل}^{2} + \frac{\text{د}_{2}}{\text{ل}^{4}} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (25)$$

$$\text{اور تفریق سے}\quad \left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)\frac{\text{ب}_{2}}{\text{ل}^{2}} + (\text{م}+1)\,\text{ج}_{2}\,\text{ل}^{2} + \frac{3\,\text{د}_{2}}{\text{ل}^{4}} = 0 \quad \cdots\cdots (26)$$

ظاہر ہے کہ ک کو مختلف صحیح اعداد کے مساوی قیمتیں دینے سے لا انتہا حل

حاصل ہونگے۔ لیکن ہم اب دکھائینگے کہ اب مزید رقموں پر غور کیے بغیر ہمارے اختیاری مستقلوں کو اس طرح انتخاب کیا جاسکتا ہے کہ مطلوبہ شرائط پوری ہو جائیں۔ ہم یہ مانینگے کہ تختی کی وسعت لا انتہا ہے اور یہ کہ سوراخ سے لا متناہی فاصلے پر زور صرف ایک یکساں تناؤ



شکل ۲۴۹

$$\text{لالا} = \text{لا}$$

پر مشتمل ہیں۔

تب اگر ر بڑا ہو تو استوانی محددوں میں (ر، ط) پر کے زور شکل ۲۴۹ میں دکھائے ہوئے سایہ دار حصے کے تعادل کی شرائط سے ر کی بے انتہا بڑی قیمتوں کے لیے حسب ذیل حاصل ہونگے :۔

$$\text{رر} = \text{لا جم}^2\text{ط} = \frac{\text{لا}}{2}\left(1 + \text{جم ۲ط}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (27)$$

اور

$$\text{طط} = \text{لا جب}^2\text{ط} = \frac{\text{لا}}{2}\left(1 - \text{جم ۲ط}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

اب اگر ہم حاصل شدہ حلوں کو اکٹھا کر کے لکھیں :۔

$$\begin{cases} \text{و} = \text{و} + \text{و}_2 \text{ جم} (2\text{ط} + \text{ع}_2) \\ \text{ی} = \text{ع} + \text{ع}_2 \text{ جب} (2\text{ط} + \text{ع}_2) \end{cases}$$

تو حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے :۔

$$\text{رر} = \text{ے}\left[\frac{\text{م}}{\text{م}-1}\, 1.\left(1 - \frac{\text{و}^2}{\text{ر}^2}\right) + \frac{\text{م}}{\text{م}+1}\text{ جم} (2\text{ط} + \text{ع}_2) \left\{ 1_2 - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right) \frac{\text{ب}_2}{\text{ر}^2} - \frac{3\,\text{د}_2}{\text{ر}^4} \right\}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

حصہ نمبر ۵۵ اس طرح شرط (۲۷) سے یہ حاصل ہوگا :۔

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{ل}}{۲} &= \frac{\text{ےم}}{\text{م}-۱}\,\text{ا}_۱ \\ \text{ع}_۲ &= ۰ \\ \frac{\text{ل}}{۲} &= \frac{\text{ےم}}{\text{م}+۱}\,\text{ا}_۲ \end{aligned}\right\} \quad \text{.................. (۳۰)}$$

اور یہ حاصل ہوتا ہے :-

$$\widehat{\text{طط}} = \text{ے}\left[\frac{\text{م}}{\text{م}-۱}\,\text{ا}_۱\left(۱+\frac{\text{ر}_۱^۲}{\text{ر}^۲}\right) + \frac{\text{م}}{\text{م}+۱}\,\text{جم}\,(۲\text{ط}+\text{ع}_۲)\left\{-\text{ا}_۲-\right.\right.$$

$$\left.\left.۳(\text{م}+۱)\,\text{ج}_۲\,\text{ر}^۲+\frac{۳\,\text{د}_۲}{\text{ر}^۴}\right\}\right] \quad \text{.................. (۳۱)}$$

اور شرط (۲۸) سے نتیجہ (۳۰) دوبارہ حاصل ہوتا ہے اور نیز یہ کہ

$$\text{ج}_۲ = ۰ \quad \text{.................. (۳۲)}$$

(۲۵) اور (۲۶) میں $\text{ج}_۲ = ۰$ رکھنے سے :-

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{د}_۲}{\text{ر}_۱^۴} &= -\text{ا}_۲ \\ \text{اور}\quad \frac{\text{ب}_۲}{\text{ر}_۱^۲} &= \frac{۴\text{م}}{\text{م}+۱}\,\text{ا}_۲ \end{aligned}\right\} \quad \text{.................. (۳۳)}$$

آخر میں (۳۰)، (۳۲) اور (۳۳) کو (۲۹) اور (۳۱) میں درج کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہے :-

$$\left.\begin{aligned} \text{رر} &= \frac{\text{ل}}{۲}\left[\left(۱-\frac{\text{ر}_۱^۲}{\text{ر}^۲}\right) + \text{جم}\,۲\text{ط}\left(۱-۴\frac{\text{ر}_۱^۲}{\text{ر}^۲}+\frac{۳\,\text{ر}_۱^۴}{\text{ر}^۴}\right)\right] \\ \text{اور}\quad \widehat{\text{طط}} &= \frac{\text{ل}}{۲}\left[\left(۱+\frac{\text{ر}_۱^۲}{\text{ر}^۲}\right) - \text{جم}\,۲\text{ط}\left(۱+\frac{۳\,\text{ر}_۱^۴}{\text{ر}^۴}\right)\right] \\ \text{اور (۱) کی رو سے}\quad \widehat{\text{رط}} &= -\frac{\text{ل}}{۲}\,\text{جب}\,۲\text{ط}\left(۱+۲\frac{\text{ر}_۱^۲}{\text{ر}^۲}-۳\frac{\text{ر}_۱^۴}{\text{ر}^۴}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{....... (۳۴)}$$

یہ معلومہ نتائج ہیں۔ صرف اتنا اور کہہ دینا کافی ہے کہ (۱۸) میں کا جو مستقل ج معلوم نہیں کیا گیا وہ صرف اس کے متناظر ہے کہ تختی کو سوراخ کے محور کے گرد ایک استوار جسم والی گردش دی جائے۔

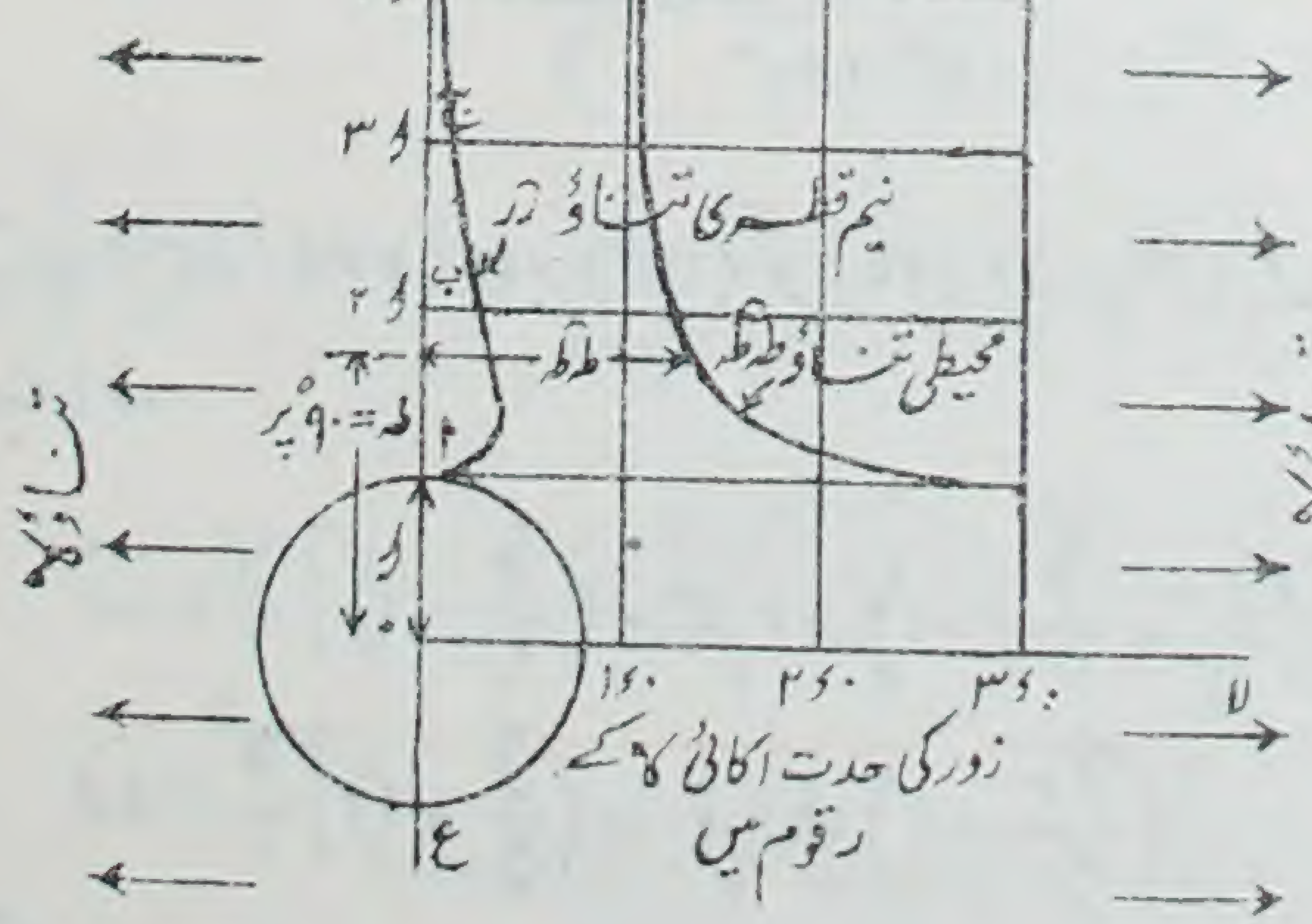
سب میں زیادہ دلچسپ قیمتیں اُس تراشش کے طط اور رر کی ہونگی جو سوراخ کے محور میں سے گزرے اور تناؤ ل کی سمت کے علی القوائم ہو یعنی شکل ۲۵۰ میں ط = ۹۰° والی تراش ع ہ ا ب ج د۔ اور (۳۴) کی رُو سے یہ قیمتیں حسب ذیل ہونگی:—

$$\left.\begin{aligned} \text{طط} &= \frac{\text{ل}}{۲}\left(۲ + \frac{\text{ر}_۰^۲}{\text{ر}^۲} + \frac{۳\,\text{ر}_۰^۴}{\text{ر}^۴}\right) \\ \text{رر} &= \frac{۳\,\text{ل}}{۲}\left(\frac{\text{ر}_۰^۲}{\text{ر}^۲} - \frac{\text{ر}_۰^۴}{\text{ر}^۴}\right) \\ \text{رط} &= ۰ \end{aligned}\right\} \quad \text{(۳۴ا)}$$

اس تراش میں سوراخ کے محیط پر (یعنی ا اور ع شکل ۲۵۰ پر) ر = ر۰ اور

$$\text{طط} = ۳\,\text{ل}$$

یعنی محیطی تناؤ سوراخ سے دور کے نقاط پر کے یکساں تناؤ کا تین گنا ہوتا ہے۔ شکل ۲۵۰ میں صدر تراشش ا ب ج د کے مختلف نقاط پر کی محیطی تناؤ کی حدتوں کو صفحہ ۵۵۲



شکل ۲۵۰ - نیم قطری اور محیطی تناؤ ایک سوراخدار تختی میں جس پر یکساں تناؤ ل ہو۔

ترسیم کیا گیا ہے ۔ اس کو دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ تناؤ طہ طہ نقطہ ا سے باہر کی طرف تیزی سے گھٹتا ہے چنانچہ ر = ۴ ا پر یہ تقریباً یکساں ہوگیا ہے اور ۲ سے بہت زیادہ نہیں اور رر اس مقام پر بہت خفیف ہے ۔ اس طرح ایک لاتناہی یا بڑے عرض کی تختی کے استدلال سے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ ایک متوسط عرض کی تختی میں یا ایسی تختی میں جس میں متعدد سوراخ وور دور ہوں کم و بیش اسی طرح کا نتیجہ درست ہوگا یعنی اعظم تناؤ تراش پر کے اوسط تناؤ کے ۳ گنے سے زیادہ نہیں ہوگا[ل]۔

تراش طہ = ۰ پر نیم قطری تناؤ رر لاتناہی عرض کی تصوری تختی میں ر = ۱۶۰ پر اعظم قیمت ۰٫۳۷۵ کو پہنچتا ہے ۔

ل ۔ اس نتیجے کی تجرباتی تصدیق بصری ذرائع سے حاصل ہوئی ہے ۔ دیکھو کوکر اور اسکوبل کا مضمون "تختی میں ریوٹ کی وجہ سے زور کی تقسیم" مندرجہ بحری تعمیر کی مجلس کی روداد ۱۹۱۳ء اور کتاب ہذا کی دفعہ ۱۸۵ ا ۔ نیز رسالہ انجینیرنگ ، ۷ جنوری ۱۹۲۱ء ۔

ریاضی کی جدولیں

زاویہ درجے	زاویہ نیم قطری	وتر	جیب	مماس	مماس التمام	جیب التمام			
°۰	۰	۰	۰	۰	∞	۱	۱٫۴۱۴	۱٫۵۷۰۸	°۹۰
۱	٫۰۱۷۵	٫۰۱۷	٫۰۱۷۵	٫۰۱۷۵	۵۷٫۲۹۰۰	٫۹۹۹۸	۱٫۴۰۲	۱٫۵۵۳۳	۸۹
۲	٫۰۳۴۹	٫۰۳۵	٫۰۳۴۹	٫۰۳۴۹	۲۸٫۶۳۶۳	٫۹۹۹۴	۱٫۳۸۹	۱٫۵۳۵۹	۸۸
۳	٫۰۵۲۴	٫۰۵۲	٫۰۵۲۳	٫۰۵۲۴	۱۹٫۰۸۱۱	٫۹۹۸۶	۱٫۳۷۷	۱٫۵۱۸۴	۸۷
۴	٫۰۶۹۸	٫۰۷۰	٫۰۶۹۸	٫۰۶۹۹	۱۴٫۳۰۰۷	٫۹۹۷۶	۱٫۳۶۴	۱٫۵۰۱۰	۸۶
۵	٫۰۸۷۳	٫۰۸۷	٫۰۸۷۲	٫۰۸۷۵	۱۱٫۴۳۰۱	٫۹۹۶۲	۱٫۳۵۱	۱٫۴۸۳۵	۸۵
۶	٫۱۰۴۷	٫۱۰۵	٫۱۰۴۵	٫۱۰۵۱	۹٫۵۱۴۴	٫۹۹۴۵	۱٫۳۳۸	۱٫۴۶۶۱	۸۴
۷	٫۱۲۲۲	٫۱۲۲	٫۱۲۱۹	٫۱۲۲۸	۸٫۱۴۴۳	٫۹۹۲۵	۱٫۳۲۵	۱٫۴۴۸۶	۸۳
۸	٫۱۳۹۶	٫۱۴۰	٫۱۳۹۲	٫۱۴۰۵	۷٫۱۱۵۴	٫۹۹۰۳	۱٫۳۱۲	۱٫۴۳۱۲	۸۲
۹	٫۱۵۷۱	٫۱۵۷	٫۱۵۶۴	٫۱۵۸۴	۶٫۳۱۳۸	٫۹۸۷۷	۱٫۲۹۹	۱٫۴۱۳۷	۸۱
۱۰	٫۱۷۴۵	٫۱۷۴	٫۱۷۳۶	٫۱۷۶۳	۵٫۶۷۱۳	٫۹۸۴۸	۱٫۲۸۶	۱٫۳۹۶۳	۸۰

زاویہ		وتر	جیب	ماس	ماس التمام	جیب التمام			
درجے	نیم قطری								
۰°	۰	۰	۰	۰	∞	۱	۱٫۴۱۴	۱٫۵۷۰۸	۹۰°
۱۱	٫۱۹۲۰	٫۱۹۲	٫۱۹۰۸	٫۱۹۴۴	۵٫۱۴۴۶	٫۹۸۱۶	۱٫۲۷۲	۱٫۳۷۸۸	۷۹
۱۲	٫۲۰۹۴	٫۲۰۹	٫۲۰۷۹	٫۲۱۲۶	۴٫۷۰۴۶	٫۹۷۸۱	۱٫۲۵۹	۱٫۳۶۱۴	۷۸
۱۳	٫۲۲۶۹	٫۲۲۶	٫۲۲۵۰	٫۲۳۰۹	۴٫۳۳۱۵	٫۹۷۴۴	۱٫۲۴۵	۱٫۳۴۳۹	۷۷
۱۴	٫۲۴۴۳	٫۲۴۴	٫۲۴۱۹	٫۲۴۹۳	۴٫۰۱۰۸	٫۹۷۰۳	۱٫۲۳۱	۱٫۳۲۶۵	۷۶
۱۵	٫۲۶۱۸	٫۲۶۱	٫۲۵۸۸	٫۲۶۷۹	۳٫۷۳۲۱	٫۹۶۵۹	۱٫۲۱۸	۱٫۳۰۹۰	۷۵
۱۶	٫۲۷۹۳	٫۲۷۸	٫۲۷۵۶	٫۲۸۶۷	۳٫۴۸۷۴	٫۹۶۱۳	۱٫۲۰۴	۱٫۲۹۱۵	۷۴
۱۷	٫۲۹۶۷	٫۲۹۶	٫۲۹۲۴	٫۳۰۵۷	۳٫۲۷۰۹	٫۹۵۶۳	۱٫۱۹۰	۱٫۲۷۴۱	۷۳
۱۸	٫۳۱۴۲	٫۳۱۳	٫۳۰۹۰	٫۳۲۴۹	۳٫۰۷۷۷	٫۹۵۱۱	۱٫۱۷۶	۱٫۲۵۶۶	۷۲
۱۹	٫۳۳۱۶	٫۳۳۰	٫۳۲۵۶	٫۳۴۴۳	۲٫۹۰۴۲	٫۹۴۵۵	۱٫۱۶۱	۱٫۲۳۹۲	۷۱
۲۰	٫۳۴۹۱	٫۳۴۷	٫۳۴۲۰	٫۳۶۴۰	۲٫۷۴۷۵	٫۹۳۹۷	۱٫۱۴۷	۱٫۲۲۱۷	۷۰
۲۱	٫۳۶۶۵	٫۳۶۴	٫۳۵۸۴	٫۳۸۳۹	۲٫۶۰۵۱	٫۹۳۳۶	۱٫۱۳۳	۱٫۲۰۴۳	۶۹
۲۲	٫۳۸۴۰	٫۳۸۲	٫۳۷۴۶	٫۴۰۴۰	۲٫۴۷۵۱	٫۹۲۷۲	۱٫۱۱۸	۱٫۱۸۶۸	۶۸
۲۳	٫۴۰۱۴	٫۳۹۹	٫۳۹۰۷	٫۴۲۴۵	۲٫۳۵۵۹	٫۹۲۰۵	۱٫۱۰۴	۱٫۱۶۹۴	۶۷
۲۴	٫۴۱۸۹	٫۴۱۶	٫۴۰۶۷	٫۴۴۵۲	۲٫۲۴۶۰	٫۹۱۳۵	۱٫۰۸۹	۱٫۱۵۱۹	۶۶
۲۵	٫۴۳۶۳	٫۴۳۳	٫۴۲۲۶	٫۴۶۶۳	۲٫۱۴۴۵	٫۹۰۶۳	۱٫۰۷۵	۱٫۱۳۴۵	۶۵

زاویہ		وتر	جیب	ماس	ماس التمام	جیب التمام			
درجے	نیم قطری								
۰°	۰	۰	۰	۰	∞	۱	۱٫۴۱۴	۱٫۵۷۰۸	۹۰°
۲۶	٫۴۵۳۸	٫۴۵۰	٫۴۳۸۴	٫۴۸۷۷	۲٫۰۵۰۳	٫۸۹۸۸	۱٫۰۶۰	۱٫۱۱۷۰	۶۴
۲۷	٫۴۷۱۲	٫۴۶۷	٫۴۵۴۰	٫۵۰۹۵	۱٫۹۶۲۶	٫۸۹۱۰	۱٫۰۴۵	۱٫۰۹۹۶	۶۳
۲۸	٫۴۸۸۷	٫۴۸۴	٫۴۶۹۵	٫۵۳۱۷	۱٫۸۸۰۷	٫۸۸۲۹	۱٫۰۳۰	۱٫۰۸۲۱	۶۲
۲۹	٫۵۰۶۱	٫۵۰۱	٫۴۸۴۸	٫۵۵۴۳	۱٫۸۰۴۰	٫۸۷۴۶	۱٫۰۱۵	۱٫۰۶۴۷	۶۱
۳۰	٫۵۲۳۶	٫۵۱۸	٫۵۰۰۰	٫۵۷۷۴	۱٫۷۳۲۱	٫۸۶۶۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۴۷۲	۶۰
۳۱	٫۵۴۱۱	٫۵۳۴	٫۵۱۵۰	٫۶۰۰۹	۱٫۶۶۴۳	٫۸۵۷۲	٫۹۸۵	۱٫۰۲۹۷	۵۹
۳۲	٫۵۵۸۵	٫۵۵۱	٫۵۲۹۹	٫۶۲۴۹	۱٫۶۰۰۳	٫۸۴۸۰	٫۹۷۰	۱٫۰۱۲۳	۵۸
۳۳	٫۵۷۶۰	٫۵۶۸	٫۵۴۴۶	٫۶۴۹۴	۱٫۵۳۹۹	٫۸۳۸۷	٫۹۵۴	٫۹۹۴۸	۵۷
۳۴	٫۵۹۳۴	٫۵۸۵	٫۵۵۹۲	٫۶۷۴۵	۱٫۴۸۲۶	٫۸۲۹۰	٫۹۳۹	٫۹۷۷۴	۵۶
۳۵	٫۶۱۰۹	٫۶۰۱	٫۵۷۳۶	٫۷۰۰۲	۱٫۴۲۸۱	٫۸۱۹۲	٫۹۲۳	٫۹۵۹۹	۵۵
۳۶	٫۶۲۸۳	٫۶۱۸	٫۵۸۷۸	٫۷۲۶۵	۱٫۳۷۶۴	٫۸۰۹۰	٫۹۰۸	٫۹۴۲۵	۵۴
۳۷	٫۶۴۵۸	٫۶۳۵	٫۶۰۱۸	٫۷۵۳۶	۱٫۳۲۷۰	٫۷۹۸۶	٫۸۹۲	٫۹۲۵۰	۵۳
۳۸	٫۶۶۳۲	٫۶۵۱	٫۶۱۵۷	٫۷۸۱۳	۱٫۲۷۹۹	٫۷۸۸۰	٫۸۷۷	٫۹۰۷۶	۵۲
۳۹	٫۶۸۰۷	٫۶۶۸	٫۶۲۹۳	٫۸۰۹۸	۱٫۲۳۴۹	٫۷۷۷۱	٫۸۶۱	٫۸۹۰۱	۵۱
۴۰	٫۶۹۸۱	٫۶۸۴	٫۶۴۲۸	٫۸۳۹۱	۱٫۱۹۱۸	٫۷۶۶۰	٫۸۴۵	٫۸۷۲۷	۵۰

زاویہ		وتر	جیب	ماس	ماس التمام	جیب التمام			
درجے	نیم قطری								
۰°	۰	۰	۰	۰	∞	۱	۱٫۴۱۴	۱٫۵۷۰۸	۹۰°
۴۱	٫۷۱۵۶	٫۷۰۰	٫۶۵۶۱	٫۸۶۹۳	۱٫۱۵۰۴	٫۷۵۴۷	٫۸۲۹	٫۸۵۵۲	۴۹
۴۲	٫۷۳۳۰	٫۷۱۷	٫۶۶۹۱	٫۹۰۰۴	۱٫۱۱۰۶	٫۷۴۳۱	٫۸۱۳	٫۸۳۷۸	۴۸
۴۳	٫۷۵۰۵	٫۷۳۳	٫۶۸۲۰	٫۹۳۲۵	۱٫۰۷۲۴	٫۷۳۱۴	٫۷۹۷	٫۸۲۰۳	۴۷
۴۴	٫۷۶۷۹	٫۷۴۹	٫۶۹۴۷	٫۹۶۵۷	۱٫۰۳۵۵	٫۷۱۹۳	٫۷۸۱	٫۸۰۲۹	۴۶
۴۵°	٫۷۸۵۴	٫۷۶۵	٫۷۰۷۱	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	٫۷۰۷۱	٫۷۶۵	٫۷۸۵۴	۴۵°
			جیب التمام	ماس التمام	ماس	جیب	وتر	نیم قطریاں	درجے
								زاویہ	

لوگارتھم

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰	۰۰۰۰	۰۰۴۳	۰۰۸۶	۰۱۲۸	۰۱۷۰						۴	۹	۱۳	۱۷	۲۱	۲۶	۳۰	۳۴	۳۸
						۰۲۱۲	۰۲۵۳	۰۲۹۴	۰۳۳۴	۰۳۷۴	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	۳۲	۳۶
۱۱	۰۴۱۴	۰۴۵۳	۰۴۹۲	۰۵۳۱	۰۵۶۹						۴	۸	۱۲	۱۵	۱۹	۲۳	۲۷	۳۱	۳۵
						۰۶۰۷	۰۶۴۵	۰۶۸۲	۰۷۱۹	۰۷۵۵	۴	۷	۱۱	۱۵	۱۹	۲۲	۲۶	۳۰	۳۳
۱۲	۰۷۹۲	۰۸۲۸	۰۸۶۴	۰۸۹۹	۰۹۳۴	۰۹۶۹					۳	۷	۱۱	۱۴	۱۸	۲۱	۲۵	۲۸	۳۲
							۱۰۰۴	۱۰۳۸	۱۰۷۲	۱۱۰۶	۳	۷	۱۰	۱۴	۱۷	۲۰	۲۴	۲۷	۳۱
۱۳	۱۱۳۹	۱۱۷۳	۱۲۰۶	۱۲۳۹	۱۲۷۱						۳	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۲۰	۲۳	۲۶	۳۰
						۱۳۰۳	۱۳۳۵	۱۳۶۷	۱۳۹۹	۱۴۳۰	۳	۷	۱۰	۱۲	۱۶	۱۹	۲۲	۲۵	۲۹
۱۴	۱۴۶۱	۱۴۹۲	۱۵۲۳	۱۵۵۳							۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴	۲۸
					۱۵۸۴	۱۶۱۴	۱۶۴۴	۱۶۷۳	۱۷۰۳	۱۷۳۲	۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶
۱۵	۱۷۶۱	۱۷۹۰	۱۸۱۸	۱۸۴۷	۱۸۷۵	۱۹۰۳					۳	۶	۹	۱۱	۱۴	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶
							۱۹۳۱	۱۹۵۹	۱۹۸۷	۲۰۱۴	۳	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۶	۱۹	۲۲	۲۵

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۶	۲۰۴۱	۲۰۶۸	۲۰۹۵	۲۱۲۲	۲۱۴۸						۳	۵	۸	۱۱	۱۳	۱۶	۱۹	۲۲	۲۴
						۲۱۷۵	۲۲۰۱	۲۲۲۷	۲۲۵۳	۲۲۷۹	۳	۵	۸	۱۰	۱۳	۱۵	۱۸	۲۱	۲۳
۱۷	۲۳۰۴	۲۳۳۰	۲۳۵۵	۲۳۸۰	۲۴۰۵	۲۴۳۰					۳	۵	۸	۱۰	۱۳	۱۵	۱۸	۲۰	۲۳
							۲۴۵۵	۲۴۸۰	۲۵۰۴	۲۵۲۹	۲	۵	۷	۱۰	۱۲	۱۵	۱۷	۱۹	۲۲
۱۸	۲۵۵۳	۲۵۷۷	۲۶۰۱	۲۶۲۵	۲۶۴۸						۲	۵	۷	۹	۱۲	۱۴	۱۷	۱۹	۲۱
						۲۶۷۲	۲۶۹۵	۲۷۱۸	۲۷۴۲	۲۷۶۵	۲	۵	۷	۹	۱۱	۱۴	۱۶	۱۸	۲۱
۱۹	۲۷۸۸	۲۸۱۰	۲۸۳۳	۲۸۵۶	۲۸۷۸						۲	۴	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۶	۱۸	۲۰
						۲۹۰۰	۲۹۲۳	۲۹۴۵	۲۹۶۷	۲۹۸۹	۲	۴	۶	۸	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹
۲۰	۳۰۱۰	۳۰۳۲	۳۰۵۴	۳۰۷۵	۳۰۹۶	۳۱۱۸	۳۱۳۹	۳۱۶۰	۳۱۸۱	۳۲۰۱	۲	۴	۶	۸	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹
۲۱	۳۲۲۲	۳۲۴۳	۳۲۶۳	۳۲۸۴	۳۳۰۴	۳۳۲۴	۳۳۴۵	۳۳۶۵	۳۳۸۵	۳۴۰۴	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
۲۲	۳۴۲۴	۳۴۴۴	۳۴۶۴	۳۴۸۳	۳۵۰۲	۳۵۲۲	۳۵۴۱	۳۵۶۰	۳۵۷۹	۳۵۹۸	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۷
۲۳	۳۶۱۷	۳۶۳۶	۳۶۵۵	۳۶۷۴	۳۶۹۲	۳۷۱۱	۳۷۲۹	۳۷۴۷	۳۷۶۶	۳۷۸۴	۲	۴	۶	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷
۲۴	۳۸۰۲	۳۸۲۰	۳۸۳۸	۳۸۵۶	۳۸۷۴	۳۸۹۲	۳۹۰۹	۳۹۲۷	۳۹۴۵	۳۹۶۲	۲	۴	۵	۷	۹	۱۱	۱۲	۱۴	۱۶
۲۵	۳۹۷۹	۳۹۹۷	۴۰۱۴	۴۰۳۱	۴۰۴۸	۴۰۶۵	۴۰۸۲	۴۰۹۹	۴۱۱۶	۴۱۳۳	۲	۳	۵	۷	۹	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۲۶	۴۱۵۰	۴۱۶۶	۴۱۸۳	۴۲۰۰	۴۲۱۶	۴۲۳۲	۴۲۴۹	۴۲۶۵	۴۲۸۱	۴۲۹۸	۲	۳	۵	۷	۸	۱۰	۱۱	۱۳	۱۵
۲۷	۴۳۱۴	۴۳۳۰	۴۳۴۶	۴۳۶۲	۴۳۷۸	۴۳۹۳	۴۴۰۹	۴۴۲۵	۴۴۴۰	۴۴۵۶	۲	۳	۵	۶	۸	۹	۱۱	۱۳	۱۴
۲۸	۴۴۷۲	۴۴۸۷	۴۵۰۲	۴۵۱۸	۴۵۳۳	۴۵۴۸	۴۵۶۴	۴۵۷۹	۴۵۹۴	۴۶۰۹	۲	۳	۵	۶	۸	۹	۱۱	۱۲	۱۴
۲۹	۴۶۲۴	۴۶۳۹	۴۶۵۴	۴۶۶۹	۴۶۸۳	۴۶۹۸	۴۷۱۳	۴۷۲۸	۴۷۴۲	۴۷۵۷	۱	۳	۴	۶	۷	۹	۱۰	۱۲	۱۳
۳۰	۴۷۷۱	۴۷۸۶	۴۸۰۰	۴۸۱۴	۴۸۲۹	۴۸۴۳	۴۸۵۷	۴۸۷۱	۴۸۸۶	۴۹۰۰	۱	۳	۴	۶	۷	۹	۱۰	۱۱	۱۳
۳۱	۴۹۱۴	۴۹۲۸	۴۹۴۲	۴۹۵۵	۴۹۶۹	۴۹۸۳	۴۹۹۷	۵۰۱۱	۵۰۲۴	۵۰۳۸	۱	۳	۴	۶	۷	۸	۱۰	۱۱	۱۲
۳۲	۵۰۵۱	۵۰۶۵	۵۰۷۹	۵۰۹۲	۵۱۰۵	۵۱۱۹	۵۱۳۲	۵۱۴۵	۵۱۵۹	۵۱۷۲	۱	۳	۴	۵	۷	۸	۹	۱۱	۱۲
۳۳	۵۱۸۵	۵۱۹۸	۵۲۱۱	۵۲۲۴	۵۲۳۷	۵۲۵۰	۵۲۶۳	۵۲۷۶	۵۲۸۹	۵۳۰۲	۱	۳	۴	۵	۶	۸	۹	۱۰	۱۲
۳۴	۵۳۱۵	۵۳۲۸	۵۳۴۰	۵۳۵۳	۵۳۶۶	۵۳۷۸	۵۳۹۱	۵۴۰۳	۵۴۱۶	۵۴۲۸	۱	۳	۴	۵	۶	۸	۹	۱۰	۱۱
۳۵	۵۴۴۱	۵۴۵۳	۵۴۶۵	۵۴۷۸	۵۴۹۰	۵۵۰۲	۵۵۱۴	۵۵۲۷	۵۵۳۹	۵۵۵۱	۱	۲	۴	۵	۶	۷	۹	۱۰	۱۱
۳۶	۵۵۶۳	۵۵۷۵	۵۵۸۷	۵۵۹۹	۵۶۱۱	۵۶۲۳	۵۶۳۵	۵۶۴۷	۵۶۵۸	۵۶۷۰	۱	۲	۴	۵	۶	۷	۸	۱۰	۱۱
۳۷	۵۶۸۲	۵۶۹۴	۵۷۰۵	۵۷۱۷	۵۷۲۹	۵۷۴۰	۵۷۵۲	۵۷۶۳	۵۷۷۵	۵۷۸۶	۱	۲	۳	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۳۸	۵۷۹۸	۵۸۰۹	۵۸۲۱	۵۸۳۲	۵۸۴۳	۵۸۵۵	۵۸۶۶	۵۸۷۷	۵۸۸۸	۵۸۹۹	۱	۲	۳	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۳۹	۵۹۱۱	۵۹۲۲	۵۹۳۳	۵۹۴۴	۵۹۵۵	۵۹۶۶	۵۹۷۷	۵۹۸۸	۵۹۹۹	۶۰۱۰	۱	۲	۳	۴	۵	۷	۸	۹	۱۰
۴۰	۶۰۲۱	۶۰۳۱	۶۰۴۲	۶۰۵۳	۶۰۶۴	۶۰۷۵	۶۰۸۵	۶۰۹۶	۶۱۰۷	۶۱۱۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۸	۹	۱۰

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴۱	۶۱۲۸	۶۱۳۸	۶۱۴۹	۶۱۶۰	۶۱۷۰	۶۱۸۰	۶۱۹۱	۶۲۰۱	۶۲۱۲	۶۲۲۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴۲	۶۲۳۲	۶۲۴۳	۶۲۵۳	۶۲۶۳	۶۲۷۴	۶۲۸۴	۶۲۹۴	۶۳۰۴	۶۳۱۴	۶۳۲۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴۳	۶۳۳۵	۶۳۴۵	۶۳۵۵	۶۳۶۵	۶۳۷۵	۶۳۸۵	۶۳۹۵	۶۴۰۵	۶۴۱۵	۶۴۲۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴۴	۶۴۳۵	۶۴۴۴	۶۴۵۴	۶۴۶۴	۶۴۷۴	۶۴۸۴	۶۴۹۳	۶۵۰۳	۶۵۱۳	۶۵۲۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴۵	۶۵۳۲	۶۵۴۲	۶۵۵۱	۶۵۶۱	۶۵۷۱	۶۵۸۰	۶۵۹۰	۶۵۹۹	۶۶۰۹	۶۶۱۸	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۴۶	۶۶۲۸	۶۶۳۷	۶۶۴۶	۶۶۵۶	۶۶۶۵	۶۶۷۵	۶۶۸۴	۶۶۹۳	۶۷۰۲	۶۷۱۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۷	۸
۴۷	۶۷۲۱	۶۷۳۰	۶۷۳۹	۶۷۴۹	۶۷۵۸	۶۷۶۷	۶۷۷۶	۶۷۸۵	۶۷۹۴	۶۸۰۳	۱	۲	۳	۴	۵	۵	۶	۷	۸
۴۸	۶۸۱۲	۶۸۲۱	۶۸۳۰	۶۸۳۹	۶۸۴۸	۶۸۵۷	۶۸۶۶	۶۸۷۵	۶۸۸۴	۶۸۹۳	۱	۲	۳	۴	۴	۵	۶	۷	۸
۴۹	۶۹۰۲	۶۹۱۱	۶۹۲۰	۶۹۲۸	۶۹۳۷	۶۹۴۶	۶۹۵۵	۶۹۶۴	۶۹۷۲	۶۹۸۱	۱	۲	۳	۴	۴	۵	۶	۷	۸
۵۰	۶۹۹۰	۶۹۹۸	۷۰۰۷	۷۰۱۶	۷۰۲۴	۷۰۳۳	۷۰۴۲	۷۰۵۰	۷۰۵۹	۷۰۶۷	۱	۲	۳	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۵۱	۷۰۷۶	۷۰۸۴	۷۰۹۳	۷۱۰۱	۷۱۱۰	۷۱۱۸	۷۱۲۶	۷۱۳۵	۷۱۴۳	۷۱۵۲	۱	۲	۳	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۵۲	۷۱۶۰	۷۱۶۸	۷۱۷۷	۷۱۸۵	۷۱۹۳	۷۲۰۲	۷۲۱۰	۷۲۱۸	۷۲۲۶	۷۲۳۵	۱	۲	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۷
۵۳	۷۲۴۳	۷۲۵۱	۷۲۵۹	۷۲۶۷	۷۲۷۵	۷۲۸۴	۷۲۹۲	۷۳۰۰	۷۳۰۸	۷۳۱۶	۱	۲	۲	۳	۴	۵	۶	۶	۷
۵۴	۷۳۲۴	۷۳۳۲	۷۳۴۰	۷۳۴۸	۷۳۵۶	۷۳۶۴	۷۳۷۲	۷۳۸۰	۷۳۸۸	۷۳۹۶	۱	۲	۲	۳	۴	۵	۶	۶	۷
۵۵	۷۴۰۴	۷۴۱۲	۷۴۱۹	۷۴۲۷	۷۴۳۵	۷۴۴۳	۷۴۵۱	۷۴۵۹	۷۴۶۶	۷۴۷۴	۱	۲	۲	۳	۴	۵	۵	۶	۷

	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٥٦	٧٤٨٢	٧٤٩٠	٧٤٩٧	٧٥٠٥	٧٥١٣	٧٥٢٠	٧٥٢٨	٧٥٣٦	٧٥٤٣	٧٥٥١	١	٢	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧
٥٧	٧٥٥٩	٧٥٦٦	٧٥٧٤	٧٥٨٢	٧٥٨٩	٧٥٩٧	٧٦٠٤	٧٦١٢	٧٦١٩	٧٦٢٧	١	٢	٢	٣	٤	٥	٥	٦	٧
٥٨	٧٦٣٤	٧٦٤٢	٧٦٤٩	٧٦٥٧	٧٦٦٤	٧٦٧٢	٧٦٧٩	٧٦٨٦	٧٦٩٤	٧٧٠١	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧
٥٩	٧٧٠٩	٧٧١٦	٧٧٢٣	٧٧٣١	٧٧٣٨	٧٧٤٥	٧٧٥٢	٧٧٦٠	٧٧٦٧	٧٧٧٤	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٧
٦٠	٧٧٨٢	٧٧٨٩	٧٧٩٦	٧٨٠٣	٧٨١٠	٧٨١٨	٧٨٢٥	٧٨٣٢	٧٨٣٩	٧٨٤٦	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٦
٦١	٧٨٥٣	٧٨٦٠	٧٨٦٨	٧٨٧٥	٧٨٨٢	٧٨٨٩	٧٨٩٦	٧٩٠٣	٧٩١٠	٧٩١٧	١	١	٢	٣	٤	٤	٥	٦	٦
٦٢	٧٩٢٤	٧٩٣١	٧٩٣٨	٧٩٤٥	٧٩٥٢	٧٩٥٩	٧٩٦٦	٧٩٧٣	٧٩٨٠	٧٩٨٧	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٦	٦
٦٣	٧٩٩٣	٨٠٠٠	٨٠٠٧	٨٠١٤	٨٠٢١	٨٠٢٨	٨٠٣٥	٨٠٤١	٨٠٤٨	٨٠٥٥	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٤	٨٠٦٢	٨٠٦٩	٨٠٧٥	٨٠٨٢	٨٠٨٩	٨٠٩٦	٨١٠٢	٨١٠٩	٨١١٦	٨١٢٢	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٥	٨١٢٩	٨١٣٦	٨١٤٢	٨١٤٩	٨١٥٦	٨١٦٢	٨١٦٩	٨١٧٦	٨١٨٢	٨١٨٩	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٦	٨١٩٥	٨٢٠٢	٨٢٠٩	٨٢١٥	٨٢٢٢	٨٢٢٨	٨٢٣٥	٨٢٤١	٨٢٤٨	٨٢٥٤	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٧	٨٢٦١	٨٢٦٧	٨٢٧٤	٨٢٨٠	٨٢٨٧	٨٢٩٣	٨٢٩٩	٨٣٠٦	٨٣١٢	٨٣١٩	١	١	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٦
٦٨	٨٣٢٥	٨٣٣١	٨٣٣٨	٨٣٤٤	٨٣٥١	٨٣٥٧	٨٣٦٣	٨٣٧٠	٨٣٧٦	٨٣٨٢	١	١	٢	٣	٣	٤	٤	٥	٦
٦٩	٨٣٨٨	٨٣٩٥	٨٤٠١	٨٤٠٧	٨٤١٤	٨٤٢٠	٨٤٢٦	٨٤٣٢	٨٤٣٩	٨٤٤٥	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٦
٧٠	٨٤٥١	٨٤٥٧	٨٤٦٣	٨٤٧٠	٨٤٧٦	٨٤٨٢	٨٤٨٨	٨٤٩٤	٨٥٠٠	٨٥٠٦	١	١	٢	٢	٣	٤	٤	٥	٦

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۷۱	۸۵۱۳	۸۵۱۹	۸۵۲۵	۸۵۳۱	۸۵۳۷	۸۵۴۳	۸۵۴۹	۸۵۵۵	۸۵۶۱	۸۵۶۷	۱	۱	۲	۲	۳	۴	۴	۵	۵
۷۲	۸۵۷۳	۸۵۷۹	۸۵۸۵	۸۵۹۱	۸۵۹۷	۸۶۰۳	۸۶۰۹	۸۶۱۵	۸۶۲۱	۸۶۲۷	۱	۱	۲	۲	۳	۴	۴	۵	۵
۷۳	۸۶۳۳	۸۶۳۹	۸۶۴۵	۸۶۵۱	۸۶۵۷	۸۶۶۳	۸۶۶۹	۸۶۷۵	۸۶۸۱	۸۶۸۶	۱	۱	۲	۲	۳	۴	۴	۵	۵
۷۴	۸۶۹۲	۸۶۹۸	۸۷۰۴	۸۷۱۰	۸۷۱۶	۸۷۲۲	۸۷۲۷	۸۷۳۳	۸۷۳۹	۸۷۴۵	۱	۱	۲	۲	۳	۴	۴	۵	۵
۷۵	۸۷۵۱	۸۷۵۶	۸۷۶۲	۸۷۶۸	۸۷۷۴	۸۷۷۹	۸۷۸۵	۸۷۹۱	۸۷۹۷	۸۸۰۲	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۵	۵
۷۶	۸۸۰۸	۸۸۱۴	۸۸۲۰	۸۸۲۵	۸۸۳۱	۸۸۳۷	۸۸۴۲	۸۸۴۸	۸۸۵۴	۸۸۵۹	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۵	۵
۷۷	۸۸۶۵	۸۸۷۱	۸۸۷۶	۸۸۸۲	۸۸۸۷	۸۸۹۳	۸۸۹۹	۸۹۰۴	۸۹۱۰	۸۹۱۵	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
۷۸	۸۹۲۱	۸۹۲۷	۸۹۳۲	۸۹۳۸	۸۹۴۳	۸۹۴۹	۸۹۵۴	۸۹۶۰	۸۹۶۵	۸۹۷۱	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
۷۹	۸۹۷۶	۸۹۸۲	۸۹۸۷	۸۹۹۳	۸۹۹۸	۹۰۰۴	۹۰۰۹	۹۰۱۵	۹۰۲۰	۹۰۲۵	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
۸۰	۹۰۳۱	۹۰۳۶	۹۰۴۲	۹۰۴۷	۹۰۵۳	۹۰۵۸	۹۰۶۳	۹۰۶۹	۹۰۷۴	۹۰۷۹	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
۸۱	۹۰۸۵	۹۰۹۰	۹۰۹۶	۹۱۰۱	۹۱۰۶	۹۱۱۲	۹۱۱۷	۹۱۲۲	۹۱۲۸	۹۱۳۳	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
۸۲	۹۱۳۸	۹۱۴۳	۹۱۴۹	۹۱۵۴	۹۱۵۹	۹۱۶۵	۹۱۷۰	۹۱۷۵	۹۱۸۰	۹۱۸۶	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
۸۳	۹۱۹۱	۹۱۹۶	۹۲۰۱	۹۲۰۶	۹۲۱۲	۹۲۱۷	۹۲۲۲	۹۲۲۷	۹۲۳۲	۹۲۳۸	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
۸۴	۹۲۴۳	۹۲۴۸	۹۲۵۳	۹۲۵۸	۹۲۶۳	۹۲۶۹	۹۲۷۴	۹۲۷۹	۹۲۸۴	۹۲۸۹	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
۸۵	۹۲۹۴	۹۲۹۹	۹۳۰۴	۹۳۰۹	۹۳۱۵	۹۳۲۰	۹۳۲۵	۹۳۳۰	۹۳۳۵	۹۳۴۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۸۶	۹۳۴۵	۹۳۵۰	۹۳۵۵	۹۳۶۰	۹۳۶۵	۹۳۷۰	۹۳۷۵	۹۳۸۰	۹۳۸۵	۹۳۹۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
۸۷	۹۳۹۵	۹۴۰۰	۹۴۰۵	۹۴۱۰	۹۴۱۵	۹۴۲۰	۹۴۲۵	۹۴۳۰	۹۴۳۵	۹۴۴۰	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
۸۸	۹۴۴۵	۹۴۵۰	۹۴۵۵	۹۴۶۰	۹۴۶۵	۹۴۶۹	۹۴۷۴	۹۴۷۹	۹۴۸۴	۹۴۸۹	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
۸۹	۹۴۹۴	۹۴۹۹	۹۵۰۴	۹۵۰۹	۹۵۱۳	۹۵۱۸	۹۵۲۳	۹۵۲۸	۹۵۳۳	۹۵۳۸	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
۹۰	۹۵۴۲	۹۵۴۷	۹۵۵۲	۹۵۵۷	۹۵۶۲	۹۵۶۶	۹۵۷۱	۹۵۷۶	۹۵۸۱	۹۵۸۶	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
۹۱	۹۵۹۰	۹۵۹۵	۹۶۰۰	۹۶۰۵	۹۶۰۹	۹۶۱۴	۹۶۱۹	۹۶۲۴	۹۶۲۸	۹۶۳۳	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
۹۲	۹۶۳۸	۹۶۴۳	۹۶۴۷	۹۶۵۲	۹۶۵۷	۹۶۶۱	۹۶۶۶	۹۶۷۱	۹۶۷۵	۹۶۸۰	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
۹۳	۹۶۸۵	۹۶۸۹	۹۶۹۴	۹۶۹۹	۹۷۰۳	۹۷۰۸	۹۷۱۳	۹۷۱۷	۹۷۲۲	۹۷۲۷	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
۹۴	۹۷۳۱	۹۷۳۶	۹۷۴۱	۹۷۴۵	۹۷۵۰	۹۷۵۴	۹۷۵۹	۹۷۶۳	۹۷۶۸	۹۷۷۳	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
۹۵	۹۷۷۷	۹۷۸۲	۹۷۸۶	۹۷۹۱	۹۷۹۵	۹۸۰۰	۹۸۰۵	۹۸۰۹	۹۸۱۴	۹۸۱۸	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
۹۶	۹۸۲۳	۹۸۲۷	۹۸۳۲	۹۸۳۶	۹۸۴۱	۹۸۴۵	۹۸۵۰	۹۸۵۴	۹۸۵۹	۹۸۶۳	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
۹۷	۹۸۶۸	۹۸۷۲	۹۸۷۷	۹۸۸۱	۹۸۸۶	۹۸۹۰	۹۸۹۴	۹۸۹۹	۹۹۰۳	۹۹۰۸	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
۹۸	۹۹۱۲	۹۹۱۷	۹۹۲۱	۹۹۲۶	۹۹۳۰	۹۹۳۴	۹۹۳۹	۹۹۴۳	۹۹۴۸	۹۹۵۲	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
۹۹	۹۹۵۶	۹۹۶۱	۹۹۶۵	۹۹۶۹	۹۹۷۴	۹۹۷۸	۹۹۸۳	۹۹۸۷	۹۹۹۱	۹۹۹۶	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴

لوگارثم

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
٫۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۲	۱۰۰۵	۱۰۰۷	۱۰۰۹	۱۰۱۲	۱۰۱۴	۱۰۱۶	۱۰۱۹	۱۰۲۱	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲
٫۰۱	۱۰۲۳	۱۰۲۶	۱۰۲۸	۱۰۳۰	۱۰۳۳	۱۰۳۵	۱۰۳۸	۱۰۴۰	۱۰۴۲	۱۰۴۵	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲
٫۰۲	۱۰۴۷	۱۰۵۰	۱۰۵۲	۱۰۵۴	۱۰۵۶	۱۰۵۹	۱۰۶۲	۱۰۶۴	۱۰۶۷	۱۰۶۹	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲
٫۰۳	۱۰۷۲	۱۰۷۴	۱۰۷۶	۱۰۷۹	۱۰۸۱	۱۰۸۴	۱۰۸۶	۱۰۸۹	۱۰۹۱	۱۰۹۴	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲
٫۰۴	۱۰۹۶	۱۰۹۹	۱۱۰۲	۱۱۰۴	۱۱۰۷	۱۱۰۹	۱۱۱۲	۱۱۱۴	۱۱۱۷	۱۱۱۹	۰	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲
٫۰۵	۱۱۲۲	۱۱۲۵	۱۱۲۷	۱۱۳۰	۱۱۳۲	۱۱۳۵	۱۱۳۸	۱۱۴۰	۱۱۴۳	۱۱۴۶	۰	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲
٫۰۶	۱۱۴۸	۱۱۵۱	۱۱۵۳	۱۱۵۶	۱۱۵۹	۱۱۶۱	۱۱۶۴	۱۱۶۷	۱۱۶۹	۱۱۷۲	۰	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲
٫۰۷	۱۱۷۵	۱۱۷۸	۱۱۸۰	۱۱۸۳	۱۱۸۶	۱۱۸۹	۱۱۹۱	۱۱۹۴	۱۱۹۷	۱۱۹۹	۰	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲
٫۰۸	۱۲۰۲	۱۲۰۵	۱۲۰۸	۱۲۱۱	۱۲۱۳	۱۲۱۶	۱۲۱۹	۱۲۲۲	۱۲۲۵	۱۲۲۷	۰	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳
٫۰۹	۱۲۳۰	۱۲۳۳	۱۲۳۶	۱۲۳۹	۱۲۴۲	۱۲۴۵	۱۲۴۷	۱۲۵۰	۱۲۵۳	۱۲۵۶	۰	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
٫۱۰	۱۲۵۹	۱۲۶۲	۱۲۶۵	۱۲۶۸	۱۲۷۱	۱۲۷۴	۱۲۷۶	۱۲۷۹	۱۲۸۲	۱۲۸۵	۰	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳
٫۱۱	۱۲۸۸	۱۲۹۱	۱۲۹۴	۱۲۹۷	۱۳۰۰	۱۳۰۳	۱۳۰۶	۱۳۰۹	۱۳۱۲	۱۳۱۵	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲	۳
٫۱۲	۱۳۱۸	۱۳۲۱	۱۳۲۴	۱۳۲۷	۱۳۳۰	۱۳۳۴	۱۳۳۷	۱۳۴۰	۱۳۴۳	۱۳۴۶	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲	۳
٫۱۳	۱۳۴۹	۱۳۵۲	۱۳۵۵	۱۳۵۸	۱۳۶۱	۱۳۶۵	۱۳۶۸	۱۳۷۱	۱۳۷۴	۱۳۷۷	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳
٫۱۴	۱۳۸۰	۱۳۸۴	۱۳۸۷	۱۳۹۰	۱۳۹۳	۱۳۹۶	۱۴۰۰	۱۴۰۳	۱۴۰۶	۱۴۰۹	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳
٫۱۵	۱۴۱۳	۱۴۱۶	۱۴۱۹	۱۴۲۲	۱۴۲۶	۱۴۲۹	۱۴۳۲	۱۴۳۵	۱۴۳۹	۱۴۴۲	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳
٫۱۶	۱۴۴۵	۱۴۴۹	۱۴۵۲	۱۴۵۵	۱۴۵۹	۱۴۶۲	۱۴۶۶	۱۴۶۹	۱۴۷۲	۱۴۷۶	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳
٫۱۷	۱۴۷۹	۱۴۸۳	۱۴۸۶	۱۴۸۹	۱۴۹۳	۱۴۹۶	۱۵۰۰	۱۵۰۳	۱۵۰۷	۱۵۱۰	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳
٫۱۸	۱۵۱۴	۱۵۱۷	۱۵۲۱	۱۵۲۴	۱۵۲۸	۱۵۳۱	۱۵۳۵	۱۵۳۸	۱۵۴۲	۱۵۴۵	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳
٫۱۹	۱۵۴۹	۱۵۵۲	۱۵۵۶	۱۵۶۰	۱۵۶۳	۱۵۶۷	۱۵۷۰	۱۵۷۴	۱۵۷۸	۱۵۸۱	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۳
٫۲۰	۱۵۸۵	۱۵۸۹	۱۵۹۲	۱۵۹۶	۱۶۰۰	۱۶۰۳	۱۶۰۷	۱۶۱۱	۱۶۱۴	۱۶۱۸	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۳
٫۲۱	۱۶۲۲	۱۶۲۶	۱۶۲۹	۱۶۳۳	۱۶۳۷	۱۶۴۱	۱۶۴۴	۱۶۴۸	۱۶۵۲	۱۶۵۶	۰	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳	۳
٫۲۲	۱۶۶۰	۱۶۶۳	۱۶۶۷	۱۶۷۱	۱۶۷۵	۱۶۷۹	۱۶۸۳	۱۶۸۷	۱۶۹۰	۱۶۹۴	۰	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳	۳
٫۲۳	۱۶۹۸	۱۷۰۲	۱۷۰۶	۱۷۱۰	۱۷۱۴	۱۷۱۸	۱۷۲۲	۱۷۲۶	۱۷۳۰	۱۷۳۴	۰	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳	۴
٫۲۴	۱۷۳۸	۱۷۴۲	۱۷۴۶	۱۷۵۰	۱۷۵۴	۱۷۵۸	۱۷۶۲	۱۷۶۶	۱۷۷۰	۱۷۷۴	۰	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳	۴

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
؍۲۵	۱۷۷۸	۱۷۸۲	۱۷۸۶	۱۷۹۱	۱۷۹۵	۱۷۹۹	۱۸۰۳	۱۸۰۷	۱۸۱۱	۱۸۱۶	۰	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳	۴
؍۲۶	۱۸۲۰	۱۸۲۴	۱۸۲۸	۱۸۳۲	۱۸۳۷	۱۸۴۱	۱۸۴۵	۱۸۴۹	۱۸۵۴	۱۸۵۸	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۳	۴
؍۲۷	۱۸۶۲	۱۸۶۶	۱۸۷۱	۱۸۷۵	۱۸۷۹	۱۸۸۴	۱۸۸۸	۱۸۹۲	۱۸۹۷	۱۹۰۱	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۳	۴
؍۲۸	۱۹۰۵	۱۹۱۰	۱۹۱۴	۱۹۱۹	۱۹۲۳	۱۹۲۸	۱۹۳۲	۱۹۳۶	۱۹۴۱	۱۹۴۵	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
؍۲۹	۱۹۵۰	۱۹۵۴	۱۹۵۹	۱۹۶۳	۱۹۶۸	۱۹۷۲	۱۹۷۷	۱۹۸۲	۱۹۸۶	۱۹۹۱	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
؍۳۰	۱۹۹۵	۲۰۰۰	۲۰۰۴	۲۰۰۹	۲۰۱۴	۲۰۱۸	۲۰۲۳	۲۰۲۸	۲۰۳۲	۲۰۳۷	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
؍۳۱	۲۰۴۲	۲۰۴۶	۲۰۵۱	۲۰۵۶	۲۰۶۱	۲۰۶۵	۲۰۷۰	۲۰۷۵	۲۰۸۰	۲۰۸۴	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
؍۳۲	۲۰۸۹	۲۰۹۴	۲۰۹۹	۲۱۰۴	۲۱۰۹	۲۱۱۳	۲۱۱۸	۲۱۲۳	۲۱۲۸	۲۱۳۳	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
؍۳۳	۲۱۳۸	۲۱۴۳	۲۱۴۸	۲۱۵۳	۲۱۵۸	۲۱۶۳	۲۱۶۸	۲۱۷۳	۲۱۷۸	۲۱۸۳	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴
؍۳۴	۲۱۸۸	۲۱۹۳	۲۱۹۸	۲۲۰۳	۲۲۰۸	۲۲۱۳	۲۲۱۸	۲۲۲۳	۲۲۲۸	۲۲۳۴	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
؍۳۵	۲۲۳۹	۲۲۴۴	۲۲۴۹	۲۲۵۴	۲۲۵۹	۲۲۶۵	۲۲۷۰	۲۲۷۵	۲۲۸۰	۲۲۸۶	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
؍۳۶	۲۲۹۱	۲۲۹۶	۲۳۰۱	۲۳۰۷	۲۳۱۲	۲۳۱۷	۲۳۲۳	۲۳۲۸	۲۳۳۳	۲۳۳۹	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
؍۳۷	۲۳۴۴	۲۳۵۰	۲۳۵۵	۲۳۶۰	۲۳۶۶	۲۳۷۱	۲۳۷۷	۲۳۸۲	۲۳۸۸	۲۳۹۳	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
؍۳۸	۲۳۹۹	۲۴۰۴	۲۴۱۰	۲۴۱۵	۲۴۲۱	۲۴۲۷	۲۴۳۲	۲۴۳۸	۲۴۴۳	۲۴۴۹	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
؍۳۹	۲۴۵۵	۲۴۶۰	۲۴۶۶	۲۴۷۲	۲۴۷۷	۲۴۸۳	۲۴۸۹	۲۴۹۵	۲۵۰۰	۲۵۰۶	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۵	۵

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
.۴۰	۲۵۱۲	۲۵۱۸	۲۵۲۳	۲۵۲۹	۲۵۳۵	۲۵۴۱	۲۵۴۷	۲۵۵۳	۲۵۵۹	۲۵۶۴	۱	۱	۲	۲	۳	۴	۴	۵	۵
.۴۱	۲۵۷۰	۲۵۷۶	۲۵۸۲	۲۵۸۸	۲۵۹۴	۲۶۰۰	۲۶۰۶	۲۶۱۲	۲۶۱۸	۲۶۲۴	۱	۱	۲	۲	۳	۴	۴	۵	۵
.۴۲	۲۶۳۰	۲۶۳۶	۲۶۴۲	۲۶۴۹	۲۶۵۵	۲۶۶۱	۲۶۶۷	۲۶۷۳	۲۶۷۹	۲۶۸۵	۱	۱	۲	۲	۳	۴	۴	۵	۶
.۴۳	۲۶۹۲	۲۶۹۸	۲۷۰۴	۲۷۱۰	۲۷۱۶	۲۷۲۳	۲۷۲۹	۲۷۳۵	۲۷۴۲	۲۷۴۸	۱	۱	۲	۳	۳	۴	۴	۵	۶
.۴۴	۲۷۵۴	۲۷۶۱	۲۷۶۷	۲۷۷۳	۲۷۸۰	۲۷۸۶	۲۷۹۳	۲۷۹۹	۲۸۰۵	۲۸۱۲	۱	۱	۲	۳	۳	۴	۴	۵	۶
.۴۵	۲۸۱۸	۲۸۲۵	۲۸۳۱	۲۸۳۸	۲۸۴۴	۲۸۵۱	۲۸۵۸	۲۸۶۴	۲۸۷۱	۲۸۷۷	۱	۱	۲	۳	۳	۴	۵	۵	۶
.۴۶	۲۸۸۴	۲۸۹۱	۲۸۹۷	۲۹۰۴	۲۹۱۱	۲۹۱۷	۲۹۲۴	۲۹۳۱	۲۹۳۸	۲۹۴۴	۱	۱	۲	۳	۳	۴	۵	۵	۶
.۴۷	۲۹۵۱	۲۹۵۸	۲۹۶۵	۲۹۷۲	۲۹۷۹	۲۹۸۵	۲۹۹۲	۲۹۹۹	۳۰۰۶	۳۰۱۳	۱	۱	۲	۳	۳	۴	۵	۵	۶
.۴۸	۳۰۲۰	۳۰۲۷	۳۰۳۴	۳۰۴۱	۳۰۴۸	۳۰۵۵	۳۰۶۲	۳۰۶۹	۳۰۷۶	۳۰۸۳	۱	۱	۲	۳	۴	۴	۵	۶	۶
.۴۹	۳۰۹۰	۳۰۹۷	۳۱۰۵	۳۱۱۲	۳۱۱۹	۳۱۲۶	۳۱۳۳	۳۱۴۱	۳۱۴۸	۳۱۵۵	۱	۱	۲	۳	۴	۴	۵	۶	۶
.۵۰	۳۱۶۲	۳۱۷۰	۳۱۷۷	۳۱۸۴	۳۱۹۲	۳۱۹۹	۳۲۰۶	۳۲۱۴	۳۲۲۱	۳۲۲۸	۱	۱	۲	۳	۴	۴	۵	۶	۷
.۵۱	۳۲۳۶	۳۲۴۳	۳۲۵۱	۳۲۵۸	۳۲۶۶	۳۲۷۳	۳۲۸۱	۳۲۸۹	۳۲۹۶	۳۳۰۴	۱	۲	۲	۳	۴	۵	۵	۶	۷
.۵۲	۳۳۱۱	۳۳۱۹	۳۳۲۷	۳۳۳۴	۳۳۴۲	۳۳۵۰	۳۳۵۷	۳۳۶۵	۳۳۷۳	۳۳۸۱	۱	۲	۲	۳	۴	۵	۵	۶	۷
.۵۳	۳۳۸۸	۳۳۹۶	۳۴۰۴	۳۴۱۲	۳۴۲۰	۳۴۲۸	۳۴۳۶	۳۴۴۳	۳۴۵۱	۳۴۵۹	۱	۲	۲	۳	۴	۵	۶	۶	۷
.۵۴	۳۴۶۷	۳۴۷۵	۳۴۸۳	۳۴۹۱	۳۴۹۹	۳۵۰۸	۳۵۱۶	۳۵۲۴	۳۵۳۲	۳۵۴۰	۱	۲	۲	۳	۴	۵	۶	۶	۷

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
٫۵۵	۳۵۴۸	۳۵۵۶	۳۵۶۵	۳۵۷۳	۳۵۸۱	۳۵۸۹	۳۵۹۷	۳۶۰۶	۳۶۱۴	۳۶۲۲	۱	۲	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۷
٫۵۶	۳۶۳۱	۳۶۳۹	۳۶۴۸	۳۶۵۶	۳۶۶۴	۳۶۷۳	۳۶۸۱	۳۶۹۰	۳۶۹۸	۳۷۰۷	۱	۲	۳	۳	۴	۵	۶	۷	۸
٫۵۷	۳۷۱۵	۳۷۲۴	۳۷۳۳	۳۷۴۱	۳۷۵۰	۳۷۵۸	۳۷۶۷	۳۷۷۶	۳۷۸۴	۳۷۹۳	۱	۲	۳	۳	۴	۵	۶	۷	۸
٫۵۸	۳۸۰۲	۳۸۱۱	۳۸۱۹	۳۸۲۸	۳۸۳۷	۳۸۴۶	۳۸۵۵	۳۸۶۴	۳۸۷۳	۳۸۸۲	۱	۲	۳	۴	۴	۵	۶	۷	۸
٫۵۹	۳۸۹۰	۳۸۹۹	۳۹۰۸	۳۹۱۷	۳۹۲۶	۳۹۳۶	۳۹۴۵	۳۹۵۴	۳۹۶۳	۳۹۷۲	۱	۲	۳	۴	۵	۵	۶	۷	۸
٫۶۰	۳۹۸۱	۳۹۹۰	۳۹۹۹	۴۰۰۹	۴۰۱۸	۴۰۲۷	۴۰۳۶	۴۰۴۶	۴۰۵۵	۴۰۶۴	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۶	۷	۸
٫۶۱	۴۰۷۴	۴۰۸۳	۴۰۹۳	۴۱۰۲	۴۱۱۱	۴۱۲۱	۴۱۳۰	۴۱۴۰	۴۱۵۰	۴۱۵۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
٫۶۲	۴۱۶۹	۴۱۷۸	۴۱۸۸	۴۱۹۸	۴۲۰۷	۴۲۱۷	۴۲۲۷	۴۲۳۶	۴۲۴۶	۴۲۵۶	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
٫۶۳	۴۲۶۶	۴۲۷۶	۴۲۸۵	۴۲۹۵	۴۳۰۵	۴۳۱۵	۴۳۲۵	۴۳۳۵	۴۳۴۵	۴۳۵۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
٫۶۴	۴۳۶۵	۴۳۷۵	۴۳۸۵	۴۳۹۵	۴۴۰۶	۴۴۱۶	۴۴۲۶	۴۴۳۶	۴۴۴۶	۴۴۵۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
٫۶۵	۴۴۶۷	۴۴۷۷	۴۴۸۷	۴۴۹۸	۴۵۰۸	۴۵۱۹	۴۵۲۹	۴۵۳۹	۴۵۵۰	۴۵۶۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
٫۶۶	۴۵۷۱	۴۵۸۱	۴۵۹۲	۴۶۰۳	۴۶۱۳	۴۶۲۴	۴۶۳۴	۴۶۴۵	۴۶۵۶	۴۶۶۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۹	۱۰
٫۶۷	۴۶۷۷	۴۶۸۸	۴۶۹۹	۴۷۱۰	۴۷۲۱	۴۷۳۲	۴۷۴۲	۴۷۵۳	۴۷۶۴	۴۷۷۵	۱	۲	۳	۴	۵	۷	۸	۹	۱۰
٫۶۸	۴۷۸۶	۴۷۹۷	۴۸۰۸	۴۸۱۹	۴۸۳۱	۴۸۴۲	۴۸۵۳	۴۸۶۴	۴۸۷۵	۴۸۸۷	۱	۲	۳	۴	۶	۷	۸	۹	۱۰
٫۶۹	۴۸۹۸	۴۹۰۹	۴۹۲۰	۴۹۳۲	۴۹۴۳	۴۹۵۵	۴۹۶۶	۴۹۷۷	۴۹۸۹	۵۰۰۰	۱	۲	۳	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
٫۷۰	۵۰۱۲	۵۰۲۳	۵۰۳۵	۵۰۴۷	۵۰۵۸	۵۰۷۰	۵۰۸۲	۵۰۹۳	۵۱۰۵	۵۱۱۷	۱	۲	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۱
٫۷۱	۵۱۲۹	۵۱۴۰	۵۱۵۲	۵۱۶۴	۵۱۷۶	۵۱۸۸	۵۲۰۰	۵۲۱۲	۵۲۲۴	۵۲۳۱	۱	۲	۴	۵	۶	۷	۸	۱۰	۱۱
٫۷۲	۵۲۴۸	۵۲۶۰	۵۲۷۲	۵۲۸۴	۵۲۹۷	۵۳۰۹	۵۳۲۱	۵۳۳۳	۵۳۴۶	۵۳۵۸	۱	۲	۴	۵	۶	۷	۹	۱۰	۱۱
٫۷۳	۵۳۷۰	۵۳۸۳	۵۳۹۵	۵۴۰۸	۵۴۲۰	۵۴۳۳	۵۴۴۵	۵۴۵۸	۵۴۷۰	۵۴۸۳	۱	۳	۴	۵	۶	۸	۹	۱۰	۱۱
٫۷۴	۵۴۹۵	۵۵۰۸	۵۵۲۱	۵۵۳۴	۵۵۴۶	۵۵۵۹	۵۵۷۲	۵۵۸۵	۵۵۹۸	۵۶۱۰	۱	۳	۴	۵	۶	۸	۹	۱۰	۱۲
٫۷۵	۵۶۲۳	۵۶۳۶	۵۶۴۹	۵۶۶۲	۵۶۷۵	۵۶۸۹	۵۷۰۲	۵۷۱۵	۵۷۲۸	۵۷۴۱	۱	۳	۴	۵	۷	۸	۹	۱۰	۱۲
٫۷۶	۵۷۵۴	۵۷۶۸	۵۷۸۱	۵۷۹۴	۵۸۰۸	۵۸۲۱	۵۸۳۴	۵۸۴۸	۵۸۶۱	۵۸۷۵	۱	۳	۴	۵	۷	۸	۹	۱۱	۱۲
٫۷۷	۵۸۸۸	۵۹۰۲	۵۹۱۶	۵۹۲۹	۵۹۴۳	۵۹۵۷	۵۹۷۰	۵۹۸۴	۵۹۹۸	۶۰۱۲	۱	۳	۴	۵	۷	۸	۱۰	۱۱	۱۲
٫۷۸	۶۰۲۶	۶۰۳۹	۶۰۵۳	۶۰۶۷	۶۰۸۱	۶۰۹۵	۶۱۰۹	۶۱۲۴	۶۱۳۸	۶۱۵۲	۱	۳	۴	۶	۷	۸	۱۰	۱۱	۱۳
٫۷۹	۶۱۶۶	۶۱۸۰	۶۱۹۴	۶۲۰۹	۶۲۲۳	۶۲۳۷	۶۲۵۲	۶۲۶۶	۶۲۸۱	۶۲۹۵	۱	۳	۴	۶	۷	۹	۱۰	۱۱	۱۳
٫۸۰	۶۳۱۰	۶۳۲۴	۶۳۳۹	۶۳۵۳	۶۳۶۸	۶۳۸۳	۶۳۹۷	۶۴۱۲	۶۴۲۷	۶۴۴۲	۱	۳	۴	۶	۷	۹	۱۰	۱۲	۱۳
٫۸۱	۶۴۵۷	۶۴۷۱	۶۴۸۶	۶۵۰۱	۶۵۱۶	۶۵۳۱	۶۵۴۶	۶۵۶۱	۶۵۷۷	۶۵۹۲	۲	۳	۵	۶	۸	۹	۱۱	۱۲	۱۳
٫۸۲	۶۶۰۷	۶۶۲۲	۶۶۳۷	۶۶۵۳	۶۶۶۸	۶۶۸۳	۶۶۹۹	۶۷۱۴	۶۷۳۰	۶۷۴۵	۲	۳	۵	۶	۸	۹	۱۱	۱۲	۱۴
٫۸۳	۶۷۶۱	۶۷۷۶	۶۷۹۲	۶۸۰۸	۶۸۲۳	۶۸۳۹	۶۸۵۵	۶۸۷۱	۶۸۸۷	۶۹۰۲	۲	۳	۵	۶	۸	۹	۱۱	۱۳	۱۴
٫۸۴	۶۹۱۸	۶۹۳۴	۶۹۵۰	۶۹۶۶	۶۹۸۲	۶۹۹۸	۷۰۱۵	۷۰۳۱	۷۰۴۷	۷۰۶۳	۲	۳	۵	۶	۸	۱۰	۱۱	۱۳	۱۵

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
٫۸۵	۷۰۷۹	۷۰۹۶	۷۱۱۲	۷۱۲۹	۷۱۴۵	۷۱۶۱	۷۱۷۸	۷۱۹۴	۷۲۱۱	۷۲۲۸	۲	۳	۵	۷	۸	۱۰	۱۲	۱۳	۱۵
٫۸۶	۷۲۴۴	۷۲۶۱	۷۲۷۸	۷۲۹۵	۷۳۱۱	۷۳۲۸	۷۳۴۵	۷۳۶۲	۷۳۷۹	۷۳۹۶	۲	۳	۵	۷	۸	۱۰	۱۲	۱۳	۱۵
٫۸۷	۷۴۱۳	۷۴۳۰	۷۴۴۷	۷۴۶۴	۷۴۸۲	۷۴۹۹	۷۵۱۶	۷۵۳۴	۷۵۵۱	۷۵۶۸	۲	۳	۵	۷	۹	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
٫۸۸	۷۵۸۶	۷۶۰۳	۷۶۲۱	۷۶۳۸	۷۶۵۶	۷۶۷۴	۷۶۹۱	۷۷۰۹	۷۷۲۷	۷۷۴۵	۲	۴	۵	۷	۹	۱۱	۱۲	۱۴	۱۶
٫۸۹	۷۷۶۲	۷۷۸۰	۷۷۹۸	۷۸۱۶	۷۸۳۴	۷۸۵۲	۷۸۷۰	۷۸۸۹	۷۹۰۷	۷۹۲۵	۲	۴	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۴	۱۶
٫۹۰	۷۹۴۳	۷۹۶۲	۷۹۸۰	۷۹۹۸	۸۰۱۷	۸۰۳۵	۸۰۵۴	۸۰۷۲	۸۰۹۱	۸۱۱۰	۲	۴	۶	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷
٫۹۱	۸۱۲۸	۸۱۴۷	۸۱۶۶	۸۱۸۵	۸۲۰۴	۸۲۲۲	۸۲۴۱	۸۲۶۰	۸۲۷۹	۸۲۹۹	۲	۴	۶	۸	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷
٫۹۲	۸۳۱۸	۸۳۳۷	۸۳۵۶	۸۳۷۵	۸۳۹۵	۸۴۱۴	۸۴۳۳	۸۴۵۳	۸۴۷۲	۸۴۹۲	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۷
٫۹۳	۸۵۱۱	۸۵۳۱	۸۵۵۱	۸۵۷۰	۸۵۹۰	۸۶۱۰	۸۶۳۰	۸۶۵۰	۸۶۷۰	۸۶۹۰	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
٫۹۴	۸۷۱۰	۸۷۳۰	۸۷۵۰	۸۷۷۰	۸۷۹۰	۸۸۱۰	۸۸۳۱	۸۸۵۱	۸۸۷۲	۸۸۹۲	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
٫۹۵	۸۹۱۳	۸۹۳۳	۸۹۵۴	۸۹۷۴	۸۹۹۵	۹۰۱۶	۹۰۳۶	۹۰۵۷	۹۰۷۸	۹۰۹۹	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۵	۱۷	۱۹
٫۹۶	۹۱۲۰	۹۱۴۱	۹۱۶۲	۹۱۸۳	۹۲۰۴	۹۲۲۶	۹۲۴۷	۹۲۶۸	۹۲۹۰	۹۳۱۱	۲	۴	۶	۸	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹
٫۹۷	۹۳۳۳	۹۳۵۴	۹۳۷۶	۹۳۹۷	۹۴۱۹	۹۴۴۱	۹۴۶۲	۹۴۸۴	۹۵۰۶	۹۵۲۸	۲	۴	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۲۰
٫۹۸	۹۵۵۰	۹۵۷۲	۹۵۹۴	۹۶۱۶	۹۶۳۸	۹۶۶۱	۹۶۸۳	۹۷۰۵	۹۷۲۷	۹۷۵۰	۲	۴	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۶	۱۸	۲۰
٫۹۹	۹۷۷۲	۹۷۹۵	۹۸۱۷	۹۸۴۰	۹۸۶۳	۹۸۸۶	۹۹۰۸	۹۹۳۱	۹۹۵۴	۹۹۷۷	۲	۵	۷	۹	۱۱	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰

سوالات نمبر ۱ (صفحہ ۵۶۶)

(۱) ۲٫۲۷ ٹن فی مربع اِنچ۔

(۲) ۴۷۷۵۰ پونڈ انچ، ۳٫۴۳°

(۳) ۱۱٫۴ انچ، ۲٫۲۳°

(۴) ۹۹۱۰ پونڈ فی مربع اِنچ

(۵) ۲٫۳۸۶ ٹن فی مربع انچ، ۱٫۰۵°

(۶) ۱٫۴۴۳ اور ۱٫۶۷

(۷) ۰٫۷۷۶ اور ۰٫۹۸۴

(۸) ۶۳۷۰ پونڈ فی مربع اِنچ، ۲۶° ۳۴′

(۹) ۱۴٫۶۳ اِنچ، ۱۵٫۳۴ اِنچ

(۱۰) ۲۵٫۴ ۱ - b

(۱۱) ۴۴۲۳ پونڈ فی مربع انچ

(۱۲) ۶۰۶۰ پونڈ فی مربع انچ

(۱۳) ۳۰ × $۱۰^{۶}$ اور ۸٫۱۱ × $۱۰^{۶}$ پونڈ فی مربع اِنچ، ۰٫۲۷۱

(۱۴) ۱٫۳۱ اِنچ، ۷۸۲۰ پونڈ فی مربع اِنچ، ۱۱۰ پونڈ

(۱۵) ۸ فٹ ۶ اِنچ

(۱۶) ۱۶۲٫۵ پونڈ، ۱٫۵۴۶ اِنچ

(۱۷) ۱۳٫۹۶ پونڈ

(۱۸) ۴۷٫۸ انچ، ۱٫۱۵ اِنچ

(۱۹) ۲۳٫۹ پونڈ اِنچ۔

(۲۰) ۴۸ فٹ، ۰٫۳۶۸۴ انچ

(۲۱) ۱٫۴۳۸ اِنچ، ۳٫۶۱ اِنچ، ٫۹۷ اِنچ، ۲٫۲۸۶ اِنچ

(۲۲) ۳٫۷۶° لپیٹا جانا، ۲۰٫۱۴° کھلنا، ۲۳٫۴° لپیٹا جانا، ۲۸٫۹° کھلنا۔

(۲۳) ۲۳٫۱°، ۷۹٫۵°، ۱۴٫۳°، ۴۷٫۷°،

سوالات نمبر ۱۱ (صفحہ ۶۶۹)

(۱) $\frac{۱}{۳۰}$ انچ
(۲) ۱۰۳ پونڈ فی مربع انچ
(۳) ۱۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ، ۱۱۱ پونڈ فی مربع انچ، ۳۱۲۰ پونڈ فی مربع انچ
(۴) ۲٫۰۹ انچ، ۵۰۰ پونڈ فی مربع انچ
(۵) ۱۵۳۹ پونڈ فی مربع انچ
(۶) ۲٫۱۸ انچ
(۷) ۲٫۰۴ انچ
(۸) ۱۴۴۰۰ فشار، ۱۰۲۸۶ تناؤ اور مشترک سطح پر ۱۴۲۸۶ تناؤ
اور ۱۰۴۰۰ فشار، تمام پونڈ فی مربع انچ میں -
(۹) ۰٫۰۰۳۶۸ انچ
(۱۰) ۱۶۹۵۳، ۲۲۶۷، ۲۳۵۴۵ پونڈ فی مربع انچ
(۱۱) ۲۹۵۰ چکر فی منٹ، ۱٫۰۲۶۹ انچ
(۱۲) ۱٫۵۳۵ : ۱٫۰۵۶ : ۱
(۱۳) ۱۰۷۰ پونڈ فی مربع انچ

سوالات نمبر ۱۲ (صفحہ ۷۵۰)

(۱) ۶٫۶۷ ٹن فی مربع انچ تناؤ، ۳٫۹۴ ٹن فی مربع انچ فشار
(۲) ۷۹۲۲ پونڈ فی مربع انچ تناؤ، ۲۲۶۶۰ پونڈ فی مربع انچ فشار
(۳) ۴٫۵۳ ٹن
(۴) ۸٫۸۳ اور ۳٫۷ ٹن فی مربع انچ
(۵) ۱۳۷۳۳ اور ۱۸۶۲۰ پونڈ فی مربع انچ
(۶) ۰٫۰۰۳۵۵۷ انچ، ۰٫۰۰۲۴۹۵ انچ

(۷) ۶۸۳۰ اور ۱۲۹۳۰ پونڈ فی مربع انچ

(۸) $۳\frac{۱}{۳}$ پونڈ انچ، ۶٫۳۶ چکر، ۶۶٫۶ انچ پونڈ، ۱۹۱٫۱ پونڈ

(۹) ۳۱٫۵ ٹن، ۴٫۸ ٹن فٹ

(۱۰) ۲۰٫۸۳ ٹن، ۶٫۵۱ ٹن فٹ، ۱٫۲۵ ٹن، ۰٫۵۷ ٹن

(۱۱) ۳۰٫۵ ٹن

(۱۲) ۹٫۷۶ ٹن، ۲۱٫۹ ٹن فٹ

(۱۳) ۰٫۴۳ ٹن فی مربع انچ

(۱۴) سرے، ۰٫۰۵۵۳ و ل، $\frac{۹}{۲}$، ۹٫۴۵۹ و — چوٹی
۰٫۰۷۵ و ل، ۱۹٫۴۵۹ و، صفر۔

(۱۵) ۱۹۹۲ پونڈ فی مربع انچ، ۵۰٫۵°

(۱۶) ۸۲۸۰ پونڈ فی مربع انچ

(۱۷) ۱۲۱ فٹ

(۱۸) ۱٫۲ انچ

(۱۹) ۴۱۶۷ پونڈ فی مربع انچ، ۳۹٫۴°، ۸۳۳۳ پونڈ فی مربع انچ

(۲۰) ۴٫۴۶ انچ، ۱۱۲۰۰ پونڈ فی مربع انچ

(۲۱) ۷۹٫۷۴ فٹ، ۲۲٫۹۵ و پونڈ، ۱۰۲٫۶۹ پونڈ

سوالات نمبر ۱۳ (صفحہ ۷۸۹)

(۱) ۴۵٫۵ پونڈ فی مربع انچ

(۲) ۶۴٫۹ پونڈ فی مربع انچ

(۳) ۷۵ پونڈ فی مربع انچ

(۴) ۸۲٫۴ پونڈ فی مربع انچ

(۵) ۹٫۵۲ انچ

(۶) ۱۹۲ پونڈ فی مربع انچ

سوالات نمبر ۱۴ (صفحہ ۸۳۳)

(۱) ۲٫۴۵ فی ثانیہ
(۲) ۳۳٫۲۴ فی منٹ
(۳) ۲۲٫۴۴ فی ثانیہ
(۴) ۳۲ فی ثانیہ
(۵) ۱۸٫۴ فی ثانیہ
(۶) ۲۹٫۹ فی ثانیہ
(۷) ۱۰۴۲ چکر فی منٹ
(۸) ۱۰۶۶۷، ۱۳۷۳، ۶۲۷۰ چکر فی منٹ
(۹) ۳۷۰۴ پونڈ فی مربع انچ
(۱۰) ۶۶۷ فی منٹ
(۱۱) ۷۰۱ فی منٹ
(۱۲) ۶۵۱ فی منٹ

فہرستِ اصطلاحات

مضبوطیٔ اشیاء حصہ دوم

انگریزی	اردو
A	
Adjusting screw	ترتیبی پیچ
Analyser	تجزیہ گر
Anticlastic	ضد انحنائی
Anti-node	ضد عقدہ
Arched ribs	کماندار پسلیاں
Autographic recorder	خود نویس راقم
B	
Bed plate	نشست تختی
Bevel gearing	مائل گیرائی
Bibliography	کتابیات
Briquette	اینٹیا
Buffer	حائلہ
Bursting stress	پھاڑ زور

انگریزی	اردو
C	
Calcination	کلساؤ
Calibration	تعییر
Case-hardening	سطح سختانا
Catenary	زنجیرہ
Centre of Percussion	مرکزِ تصادم
Centrifugal force	مرکز گریز قوت
Chuck	چک
Circumferential tension	محیطی تناؤ
Collapsing pressure	تہدیمی دباؤ
Compound cylinder	مرکب استوانہ
Concave side	مقعر پہلو
Controlling value	ضابط کوارٹی

انگریزی	اردو
Counterpoise	توازنی وزن مقابل وزن
Critical length	فاصل طول
Cross head	چلیپا سر
D	
Deformation	بگاڑ
Dip	جھوک
Disc	قرص
Dished plate	رکابی نما تختی
Distributed loads	منقسم بوجھ
Driving Shaft	چلاؤ دُھرا
Drop hammer	گرہتوڑا
E	
Exhaust valve	نکاس کواڑی
Extradox	پشت
Eye-piece	چشمیہ
F	
Fillet	چیپ
Flue-tube	دُود راہ نلی
Flywheel	اُڑ پہیہ
Fulcrum	نصاب
G	
Gripping screw	گرفتی پیچ
Guide block	قائد بلاک

انگریزی	اردو
H	
Hanging wire	معلق تار
Heartwood	مرکز چوب - بیچی لکڑی
Helical Spring	مرغولی کمانی مرغولہ دار کمانی
Hoop tension	حلقہ تناؤ
Hub	ناف - قبہ
Hyperbolic Curve	زائدی منحنی
I	
Illuminating mirror	تنویری آئینہ
Indicator	مظہار
Intrados	شکم
J	
Jockey weight	سوارہ وزن
Journal bearing	دائر مسند
K	
Keyway	چابی راہ
Kinetic method	حرکیاتی طریقہ
L	
Lap-welding	آغوشی تپا جوڑ
Limiting stress	انتہائی زور
Lobe	فص
Lubrication	تدہین

انگریزی	اُردو
M	
Micrometer screw	خردہ پیما پیچ
N	
Nave	ناف
Node	عقدہ
O	
Optical magnification	مناظری تکبیر
P	
Plunger	غوّاص
Polarised light	مُقطّب نور
Polariser	مُقطِّب
Profile	یک رُخی نقشہ
Projection	ظِل - اظلال
Propeller	داسر
Pull	کھینچ
R	
Radial lines	نیم قطری خطوط
Ram	قوچ
Recoil bolt	بازگشت بولٹ
Resonance	گُمک
Retarding force	ابطائی قوت
Rim	گگر
Rotating disc	گھومتا قُرص
"Run down	"واماندہ"
S	

انگریزی	اُردو
Sapwood	رس چوب - رسدار لکڑی
Scleroscope	صلابت بین
Screw gearing	پیچ گیرائی
Seasoned	رُتیائی - رُتیایا
Serrated wedge	دندانہ دار فانہ
Set screw	جوڑ پیچ
Shackle	بھنور کلی
Shaft	دُھرا
Shanks	ڈنڈے
Shearing test	جزی جانچ
Shear stress	جزی زور
Sighting hole	شست سُوراخ
Socket	گھر
Spindle	تکلا
Spoke	آرا
Spur gearing	مہمیزی گیرائی
Stay	تھام
Steelyard	تک - فولادی گز
T	
Tachometer	رفتار پیما
Tensile stress	تنشی زور
Testing machine	جانچ کل
Tongue	جیبھ
Torque	پیچندگی

انگریزی	اُردو
Tortion	مروڑ
Travelling Counterpoise	متحرک توازنی وزن
Trigger	لبلبہ
Two-hinged rib	دو قبضی پسلی
W	
Wedge grips	فانہ نما پکڑیں
Whirling speed	ورطئی رفتار
Winding	لپیٹن - لپیٹ
Worm	پیچہ
Worm-wheel	پیچہ پہیا
X	
Xylonite	زیلونائٹ

اشاریہ

مضبوطی اشیاء - حصۂ دوم

غلط نامہ

مضبوطیٔ اشیاء - حصۂ دوم

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۵۴۴	۹	مڑوڑ	مروڑ
۵۵۲	۱۵	سہ	صہ
۵۶۰	۱۲	معیارِ	معیار
۵۶۲	۱۷	ښنی	بنی
۵۶۳	۱۸	$\frac{(۱۰.۱۸)^۲ \times ۱۰^۶}{۸ \times ۳۰ \times ۱۰^۶}$	$\frac{(۱۰.۱۸)^۲ \times ۱۰^۶}{۸ \times ۳۰ \times ۱۰^۶}$
۵۸۷	شکل ۱۶۱	اعظم زور کے	اعظم زور کے
۶۶۱	۱۷	۳٫۳	۳٫۳
۶۷۷	فٹ نوٹ	$\left(\frac{\text{ما}^۲\ \text{مف ب}}{\text{ما} + \text{س}}\right)$	$\left(\frac{\text{ما}^۲\ \text{مف ب}}{\text{ما} + \text{س}}\right)$
۶۸۴	۲۴	ف سے	ف سے ملایا
۶۸۶	۹	$\left(\frac{۲۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴}\right)$	$\left(۲\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} \times ۲\frac{۱}{۴}\right)$
۶۹۱	۴	کھینچ وُ	کھینچ
۷۲۵	۱	مرتکر	مرتکز
۷۲۷	۸	خماؤ- کے	خماؤ کے

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۷۲۷	۱۴	$= \text{س}\left(۱ - \frac{۳\text{ط}}{۲}\right)$	$= \text{س}\left(۱ - \frac{۳\text{ط}}{۲}\right)$
۷۳۰	۱۰	تنشی	تپیشی
۷۳۵	۸	$\text{م}_۱$	$\text{م}_۲$
۷۳۷	۷	تنشی	تپشی
۷۳۸	۲	$\text{م}_۱$	$\text{م}_۲$
۷۴۰	۴	$\frac{\text{م}_۲ \times \text{گ}}{۲\ \bar{۱}}$	$\frac{\text{م}_۲ \times \text{گ}}{۲\ \bar{۱}}$
۷۴۶	۱۷	$\text{اس}_۱$	$\text{س}_۱$
۷۵۲	۱۵	چھوٹی	چوٹی
۷۶۳	۸ غ	$\left(\text{م لا}\frac{\text{فز}^۲\text{ط}}{\text{فز لا}} + \frac{\text{فز ط}}{\text{فز لا}} + \text{م}\frac{\text{فز ط}}{\text{فز لا}}\right)$	
	ص		$\left(\text{م لا}\frac{\text{فز}^۲\text{ط}}{\text{فز لا}^۲} + \frac{\text{فز ط}}{\text{فز لا}} + \text{م}\frac{\text{فز ط}}{\text{فز لا}}\right)$
۷۷۲	۳	$\text{لا}^۲\text{ک}_\text{و}\ \text{لا}$	$\text{لا} \times \text{ک}_\text{و}\ \text{لا}$
۷۸۹	حاشیہ	صفحہ ۵۸	صفحہ ۴۵۸
۸۰۲	۱۵	جیبری	جبری

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۸۰۶	۴	محرچ	چرخ
۸۰۶	۱۷	۴۸ آ ے ج / ل۳ (ن ۱۷/۳۵ ول)	۴۸ آ ے ج / ۲ل۳ (و+۱۷/۳۵ ول)
۸۰۹	۱۰	ر فر۲ا / ج فرت۲ -	- و/ج - فر۲ا / فرت۲
۸۱۷	فٹ نوٹ	لہ	ہ
۸۳۲	۱۰	۱۲۰۰ یونڈ	۱۲۰۰ پونڈ
۸۴۷	۴	مقناطسی	مقناطیسی
۸۴۹	۳	خانے	فانے
۸۵۶	۷	یونڈ	پونڈ
۸۵۸	۳	باڑھیں	باڑھیں
〃	۶	نو	تو
۸۷۲	حاشیہ	صفحہ ۴۰۷	صفحہ ۵۰۷
۸۷۹	۲۰	مشاہدہ	مشاہدہ
۸۸۷	۱	برآمدبیرم	برآمدہ بیرم
〃	۵	زور	زور
۸۸۹	شکل ۲۲۸	چرقی	چرخی
۸۹۲	۲۲	دقت	وقت
۸۹۴	غ ص ۲۳	Ratchet کتا بیپیے	(کتابہیے) (Ratchet)
۸۹۸	۱۰	گزرنے	گرنے
〃	۱۴	اورازوں	اوزاروں
〃	۲۰	حطی	خطی
۸۹۹	۲۱	دبیے	دیے
〃	شکل ۲۳۱	ایخ	انچ ۴

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۸۹۹	شکل ۲۳۱	انون	آنون
۹۰۰	۱۲	نخت	تحت
۹۰۱	۴	منختی	سختی
۹۰۳	۱۱	برداشت' کیے	برداشت کیے
۹۰۸	۴	آتے	آلے
۹۱۲	۱۰	نکس	عکس
۹۱۸	۱	متنشی	تفتشی
〃	۲	اینیٹا	اینیٹیا
〃	۱۷	اینٹا	اینٹیا
۹۱۹	۴	اینٹوں	اینٹیوں
۹۲۰	۱۴	شکستی	شکستی
۹۲۵	۱	ہی	سی
۹۲۷	۵	ایسی	ایسی
۹۳۰	۲۰	ی	سی
۹۳۷	۲	انتہالی	انتہائی
۹۴۹	۱۶	۲۱۲	۲۲۲
۹۵۴	۷	۵۰۷۲	۵۰۷۰
۹۵۷	۱	ہاس	مماس
۹۶۶	۷	۱۴۳۳	۱۴۳۲
۹۷۰	۸	۵۷×۱	۵۷۸۱
〃	۱۵	۶۸/۷	۶۸۸۷
۹۷۴	۳	۳۱،۵	۳۱،۲۵

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
		اصطلاحات				اشاریہ	
۱	آخری			۴	۲	مُحدور	مُحدّور
۲	۶	کماتی	کمانی	״	۱۸و۱۹	مرغوبی	مرغولی
״	۱۶	سوارہ	سوارہ				
		مزید اغلاط					
۵۷۱	شکل ۱۵۶	۲ ف دل	۲ ف رل	۸۸۸	۵	ت کو	ت
۵۷۷	شکل ۱۶۰	ف ہ ل ہف لا	ف لا ل ہف لا	۹۰۴	۶	حل	حمل
۶۲۰	شکل ۱۶۲ ا	ہونیوالا	ہونے والے	۹۰۵	۶	بہ	یہ
۷۲۳	شکل ۱۸۵ کے اندر	ط	طَ	۹۴۴	شکل ۲۳۷	گَ	قَ
۷۶۷	۱۵	چنے ہونے	چنے ہوئے	״	شکل ۲۴۶/۲۴۷	جفط	جفط
۷۸۲	۲۳	دائنی	دائری	۹۴۹	۱۷	ج ا۲	ج ر۲